E I 7/57 (5)

11599
E

E. I. 7.

61

Landesbibliothek
Coburg

# ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

## TOMVS V.

QVI
COMMENTATIONEM
DE PRÆCIPUIS
SCRIPTIS MATHEMATICIS
COMMENTATIONEM
DE
STUDIO MATHEMATICO
RECTE INSTITUENDO
ET
INDICES IN TOMOS
QUINQUE MATHESEOS
UNIVERSÆ CONTINET.

---

*AUTORE*
CHRISTIANO WOLFIO,
POTENTISSIMI SUECORUM REGIS, HASSIÆ LANDGRAVII,
CONSILIARIO REGIMINIS, MATHEMATUM AC PHILOSOPHIÆ
PROFESSORE PRIMARIO, IN ACADEMIA MARBURGENSI, PROFESSORE PETROPOLITANO HONORARIO, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE
BORUSSICÆ MEMBRO.

---

CUM PRIVILEGIO SACRÆ CÆSAREÆ MAJESTATIS
ET POLONIARUM REGIS ATQUE SAXONIÆ ELECTORIS.

---

*HALÆ MAGDEBURGICÆ, A. MDCCXLI.*
PROSTAT IN OFFICINA RENGERIANA

Landesbibliothek
Coburg

# PRÆFATIO.

PRodit tandem Tomus quintus novæ editionis Elementorum noſtrorum Matheſeos univerſæ, qui dudum lucem adſpeciſſet, niſi alii labores aliaque impedimenta indeclinabilia moram injeciſſent. Equidem nihil reſtabat quam recenſio Autorum, qui Matheſin vel ſuis inventis, vel ſcriptis illuſtrarunt, quam adjeceramus tam Germanicæ Elementorum Matheſeos, quam primæ Latinæ editioni vna cum Indice in quatuor Elementorum horum Tomos: ne tamen nimis ſterilis judicaretur Tomus quintus, addere lubuit

Commentationem de ſtudio mathematico recte inſtituendo. Primo igitur loco ſiſtitur brevis Commentatio de præcipuis Scriptis mathematicis. Omnia recenſere nec potuimus, nec recenſeri conſultum fuit. Recenſuimus ea, quæ ipſimet poſſidemus, & pauca quædam, quæ aliunde nobis nota ſunt. Hanc autorum notitiam abunde ſufficere credimus ei, qui vel ſe totum Matheſi dare, vel eius aliquam partem ſibi quaſi propriam reddere decreverit. Et quoniam ſingulis adhuc annis ſcripta mathematica prodeunt, unusquisque, cui volupe fuerit, hanc recenſionem facile continuabit. Qui vero Matheſi tantummodo operam navare voluerit, ut non modo divinæ huius ſcientiæ compos fiat, verum etiam intellectus eum perfectionis gradum concíliet, ut eodem in omni cognitione reliqua rite ac prompte utatur; ei abunde ſatisfacient ſola Elementa noſtra, ut nullo alio librorum apparatu indigeat. Quodſi autem quis in aliqua ejus parte ulterius progredi voluerit, ex commentatione noſtra facile videbit, quem vel quosnam ſibi eligere debeat duces, ut voti ſui compos reddatur. Ceterum cum nemo Autorum ſibi propoſuerit, ut eam omni perſpicuitate explicaret, quam tyro merito deſideraverit, ac demonſtrationes daret

con-

consummatas, quas in Logica appellamus; suademus serio ne quis ad lectionem aliorum Autorum accedat, antequam nostra sibi familiaria reddiderit. Verendum enim, ne confundatur, & perplexitate desertor studii utilissimi efficiatur. Si quis solius intellectus perficiendi gratia ad Mathesin animum appellit, is vel in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ Elementaris & Trigonometriæ plane subsistere, vel ex ceteris addere potest, quæ maxime sunt ad ipsius palatum, modo sibi caveat, ne negligat eas disciplinas, ex quibus demonstrandi principia petuntur, nisi hæc tanquam certa sumere voluerit, etsi eorum evidentiam non perceperit. Et quænam hic observanda sint, ex Commentatione de studio mathematico recte instituendo haud difficulter addiscet. Secundo loco hic comparet Commentatio de studio mathematico recte instituendo. Non omnes, qui eidem sese dedunt, eodem fine ad ipsum accedunt. Quamobrem nostrum fuit, non idem singulis dare consilium, sed potius pro diversitate finis diversa. Equidem elementa nostra eo modo concinnavimus, ut singulis satisfaciant, quocunque tandem animo ad Mathesin accedant; cum tamen omnibus non conveniant omnia, indicandum omnino erat,

quænam omittenda ſint, quænam prætermitti minime debeant, & quomodo in iis percipiendis ſit verſandum, prouti unusquisque hunc vel alium finem ſibi propoſuerit, quamvis iis, qui ſciendi cupidine flagrant & in philoſophia aliisque ſcientiis cum laude verſari voluerint, commendanda ſit lectio integrorum noſtrorum Elementorum. Ea ſane hoc modo conſcripſimus, ut haud multo temporis ſpatio integram Matheſin addiſcere liceat, ac deinde qualibet ejus parte ulterius progredi detur, quantum libuerit. Cognitu nimirum utiliſſima & quæ ad ulteriora viam ſternunt, cum primis principiis ita connexa ſunt, vt ideas maxime adæquatas ex his Elementis haurire & ex aliis operibus petenda cum iisdem connectere liceat: id quod etiam in operibus noſtris philoſophicis eadem methodo conſcriptis intendimus. Neque enim alia datur via, qua ad certam & ſolidam rerum cognitionem perveniatur. Etſi autem Matheſis multas afferat utilitates ad felicitatem generis humani promovendam, ut adeo digna ſit, quæ excolatur; non tamen hinc recte infertur, eam omnibus omnino eſſe addiſcendam, qui ſtudiis literariis operam navant. Sufficit enim eſſe aliquos, qui eidem vel uni alterive parti ſe conſecrant, ut huma-

manum genus utilitates istas consequatur. Enim vero quatenus studium mathematicum perficit intellectum, ea eius utilitas est, ut nemo ad scientias alias tractandas admitti debeat nisi in Mathesi versatus. Hæc ipsa utilitas omni ævo agnita, ex quo scientiæ honos fuit. Semper enim unanimi consensu assertum, ac hodienum asseritur, studio Matheseos perfici intellectum. Non tamen defuere, qui utilitatem istam in dubium vocarunt, cum viderent viros in Mathesi præstantes nihil agere, ubi extra eandem demonstrationes dare audent. Immo hinc enata est opinio, quasi solius Matheseos sit ea, quæ affirmantur, vel negantur, demonstrare; in Philosophia vero & facultatibus, quæ vocantur superioribus ad demonstrationes perveniri non posse. Ex hoc labyrintho patet egrediendi via, si paulo intimius inspicias, cur Mathesis acuat intellectum. Memini jam alias plus simplici vice me monuisse, methodo tribuendum esse, ut Matheseos studio perficiatur intellectus. Ut vero methodum distincte cognoscas eamque in potestatem tuam redigas, non quælibet tractatio sufficit, sed legitimo quodam modo tractanda est Mathesis. Quinam igitur sit modus, a quo tam præclara utilitas unice speranda, in Commentatione nostra ex instituto do-

docemus. Neque enim hactenus satis hoc animadversum ab aliis: unde accidit, ut Mathematici summi, qui divinis prorsus inventis scientiam nobilissimam ditarunt, genuinam demonstrationis formam non perspexerint, quemadmodum in ipsa Commentatione clarissime ostendi. Quicquid igitur alii sentiant de Tomo hoc quinto Elementorum Matheseos, quorum unicuique liberum suum relinquimus iudicium, ego hoc nomine eundem maximi facio, quod genuinum facultatum mentis nostræ usum hinc addiscere liceat, quo ad solidam rerum cognitionem pervenitur. Non nego eundem usum regulis comprehendi in Logica, & a nobis in opere præsertim Latino majore, quod de Logica conscripsimus, demonstrari. Monui tamen jam alias, studio Matheseos rite instituto eum acquirendum esse. Quomodo igitur id ipsum rite instituatur, ut in omni cognitionis genere facultatum humanarum rectum facere addiscas usum, in Commentatione nostra tanta perspicuitate docuimus, ut, quid amplius desiderari possit, non videamus. Quamobrem si quis consilio nostro uti voluerit, is in se ipso experietur, quod non modo regulas logicas, quas in opere nostro exposuimus, nunc penitus intelligat, & nihil in iis supersit obscu-

ri-

ri; verum etiam quod iisdem prompte ac sine ulla aberratione satisfacere possit, modo attentionem suam in se desiderari minime patiatur. Dari aliquam artem inveniendi, quæ hactenus absque regulis exercetur, Mathematici exemplo suo abunde confirmant, qui nostro præsertim ævo novis indies inventis Mathesin augent. Nemo diffitebitur, qui vel ad ea animum advertit, quæ speciminis loco in Arithmetica (*) tradidimus, ab exemplis abstrahi posse regulas. Quoniam igitur summa intellectus perfectio est eum facere facultátum nostrarum usum, qui ad veritatem latentem investigandam requiritur; id quoque egimus in Commentatione nostra ut ostenderemus, quomodo versandum sit in Mathesi, ut usum istum consequamur. Hactenus ars inveniendi regulis comprehensa non est, quæ enim sub hoc titulo prostant, augustum istud nomen non merentur. Demus autem mox affore tempus, quo Ars inveniendi omnibus suis numeris absoluta exactisque regulis comprehensa in publicum prostet; minime tamen hinc sequitur, ea, quæ in Commentatione nostra in usum huius artis acquirendæ præcipiuntur, nullius fore utilita-



(*) §. 125.

tis: valent enim de hac arte eadem quo modo de Logica annotavimus. Quid quod etiam consilium nostrum de studio Matheseos in usum artis inveniendi acquirendæ instituendo ei prodesse possit, qui eam regulis comprehendere voluerit? Ultimo demum loco sequuntur Indices, de quibus ut multa dicam opus non est. Unicum tantummodo moneri consultum duxi. Initio constitueram indices omnes rerum & verborum in Elementis nostris contentorum in unum compingere. Enimvero cum consultissimum videretur in iis citari paragraphos, literis autem alphabeti singulæ partes non commode distingui possent; potius visum est singulos singulorum Tomorum Indices sigillatim conficere. Quoniam enim in separato Tomo leguntur, absque ulla opera, quæ in uno non inveniuntur, in alio quæruntur. Ac ita tandem Elementa nostra Matheseos universæ ad umbilicum perduximus, nil magis in votis habentes, quam ut iisdem in addiscenda Mathesi utentes eum consequantur usum, quem Commentatio nostra promittit. Dabam Marburgi Cattorum d. 17. Septembr. A.O.R. 1740.

# DE PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHEMATICIS BREVIS COMMENTATIO.

# PRÆFATIO.

Non nobis propoſitum eſt condere Hiſtoriam Matheſeos univerſæ, ut ortus ejus pateat atque progreſſus ad noſtra usque tempora. Opus enim hoc arduum eſt ac difficile, quod infinitam propemodum requirit lectionem & Bibliothecam libris omnibus tam antiquis, quam recentioribus inſtructiſſimam. Noſtrum jam non eſt in hunc campum deſcendere. Quod ordinaria negotia nobis relinquunt otium, in Philoſophia reformanda totum conſumendum, etiamſi alia non obſtarent, de quibus in præſenti dicere nil attinet. Neque etiam nobis animus eſt recenſendi Autores omnes, qui vel de Matheſi integra, vel de una aut altera ejus parte, vel etiam de

particularibus quibusdam argumentis commentati ſunt: Sufficit recenſuiſſe ſcripta præcipua, quorum lectione in ſtudio Matheſeos feliciter progredi licet. Etſi enim hodie reperiantur plurimi, qui in hiſtoria literaria induſtriam ſuam exercent: nullibi tamen magis quam in Mathematicorum ſcriptis recenſendis eandem deficere animadvertes, cum plerumque Mathematum rudes ſint, qui ad hoc ſtudiorum genus animum appellunt. Utile tamen eſt, immo neceſſarium noſſe libros, a quorum lectione recedas doctior, ne in legendis iis, qui ad ſcopum minime faciunt, tempus fallas & magno conatu parum aut nihil diſcas. Me igitur non inutilem operam præſtitiſſe confido iis, qui ad Matheſin addiſcendam ſeſe convertunt. Patebit hoc ex ſequente commentatione de ſtudio mathematico, in qua indicaturus ſum, quinam pro diverſo diſcentium ſcopo legendi ſint autores. Ceterum non dubito, hanc recenſionem Autorum etiam prodeſſe poſſe iis, qui ad Hiſtoriam Matheſeos condendam ſeſe accingent obſervaturi eas leges, quas præſcripſimus in opere noſtro Logico. Vix tamen eandem ab uno homine expectes. Rationes perſpicies ex iis, quæ de Hiſtoria ſcientiarum in Logica tradidimus. Optandum foret, ne pars eruditionis longe utiliſſima diutius negligeretur, & bene de humano genere merebitur, qui vel unius Matheſeos partis hiſtoriam exaſciatam dederit, exemplo ſuo excitaturus alios ad ſocias operas conferendas.

De

# DE PRÆCIPUIS SCRIPTIS MATHEMATICIS BREVIS COMMENTATIO.

## CAPUT I.

## DE CURSIBUS, OPERIBUS ATQUE LEXICIS MATHEMATICIS.

§. I.

PRimus Cursum Mathematicum Latino & Gallico idiomate edidit *Petrus Herigonius* Parisiis 1644. in 8. ( 10. Alph. 2. plag. ). Constat Tomis sex. Primo continentur 1. Elementa *Euclidis* XV, 2. Data *Euclidis*, 3. *Apollonii Pergæi* de determinata sectione Geometria a *Willebrordo Snellio* restituta, 5. ejusdem *Apollonii* inclinationum Geometria a *Marino Ghetaldo* restituta, 6. ejusdem *Apollonii* Tactionum Geometria a *Francisco Vieta* restituta, 7. Doctrina Sectionum angulorum. Tomus secundus complectitur 1. Arithmeticam practicam, & 2. Algebram tum vulgarem, tum speciosam una cum ratione componendi ac demonstrandi per regressum sive repetitionem vestigiorum Analyseos. Tomus tertius exhibet 1. constructionem Canonum sinuum atque Tangentium & Logarithmorum, 2. ipsos hos Canones, 3. Trigonometriam planam, 4. Geometriam practicam, 5. Architecturam militarem, 6. Tractatum de militia Græcorum. Romanorum & hodierna, 7. Mechanicam. Tomus quartus continet 1. doctrinam de sphæra mundi, 2. Geographiam tam veterem, quam novam, 3. Histiodromiam seu Artem navigandi. In Tomo quinto extant, 1. Optica *Euclidis* aucta & novis demonstrationibus illustrata, 2. Catoptrica *Euclidis*, 3. Dioptrica, 4. Perspectiva, 5. *Theodosii* Sphæricorum libri tres, quibus additur quartus de triangulis sphæricis & trigonometria sphærica, 6. Theoricæ planetarum, 7. Gnomonica, 8. Musica *Euclidis*,

*clidis.* Denique Tomus ſextus ſupplementis deſtinatur 1. in Algebram, 2. in Perſpectivam, 3. in Theoriam Planetarum: quibus additur introductio in Chronologiam. Apparet adeo, præter inventa recentiora, quæ Autor ſuo tempore tradere nondum potuit, deſiderari adhuc 1. theoremata Archimedea, 2. Doctrinam Conicorum, 3. Staticam, 5. Hydraulicam, 6. Architecturam civilem, 7. Pyrotechniam. Quæ vero de ſingulis diſciplinis monenda ſunt, ea inferius ſuo loco annotabimus. Nunc in genere obſervamus, Autorem ubique accurata uti demonſtrandi methodo eaque nova per notas reales & univerſales, ita ut demonſtrationes ipſius ab eo, qui notarum vim animo comprehendit, citra uſum cujuscunque idiomatis intelligi poſſint. Sed cum ſigna ſint Autori peculiaria & diverſa ab iis, quibus hodie in caſibus ſimilibus utimur; nonnihil difficultatis faceſſunt ſub initium lectionis, aliis præſertim ſignis jam adſueto. Ubi tamen ſigna familiaria evaſerint, multum facilitatis habet hæc demonſtrandi methodus: quia integra demonſtratio uno obtutu haud difficulter comprehenditur & una ſingulæ ejus partes diſtincte exhibentur. Cæterum *Herigonius* theoriam magis, quam praxin cordi habet, & ab ejus tempore pleræque diſciplinæ mathematicæ multum mutationis ſubierunt, ad altius faſtigium evectæ, ita ut noſtro ævo non ſatisfaciat iis, qui ad Matheſin univerſam addiſcendam animum appellunt.

§. 2. A. 1662. *Caſparus Sſchottus*, e Societate Jeſu, Curſum Mathematicum edidit Herbipoli in fol. recuſum Francofurti ad Mœnum An. 1674. & denuo Bambergæ A. 1677. in fol. (7. Alph. 19. plag. una cum 2. Alph. 4. plag. figurarum æri inciſarum). Conſtat opus libris 28. quorum primus iſagogen continet ad Matheſin, in qua problemata facillima Geometriæ practicæ explicantur: ſecundus Arithmeticam, tertius libros VI. priores Elementorum *Euclidis*, quartus & quintus Trigonometriam, ſextus Geometriam practicam ſecundum pantometron *Kircheri*, ſeptimus elementa Aſtronomiæ, octavus theoricas planetarum, nonus problemata Aſtronomiæ practi-

practicæ, decimus Astrologiam judiciariam, undecimus Chronographiam, duodecimus Geographiam, decimus tertius Hydrographiam, decimus quartus Horographiam, decimus quintus Mechanicam, decimus sextus Staticam, decimus septimus Hydrostaticam, decimus octavus Hydrotechniam, decimus nonus Opticam, vigesimus Catoptricam; vigesimus primus Dioptricam, vigesimus secundus & tertius Architecturam militarem, vigesimus quintus Musicam, vigesimus sextus Algebram, vigesimus septimus Logarithmorum doctrinam, vigesimus octavus Synopsin Matheseos tradit. Desiderantur adeo Pyrotechnia, Architectura civilis & Ars navigandi; pleræque disciplinæ nimis breviter pertractantur nec demonstrativa methodus ubique adhibetur: desunt etiam recentiora inventa, nec sublimiora attingit Autor, ipsius præsertim ævo parum trita. Non ergo satisfacit nostro tempore iis, qui ad solidam Mathematum notitiam adspirant.

§. 3. An. 1681. Londini in 4. idiomate Anglico prodiit *Jonæ Moore* Novum systema Mathematicum (*A new Systeme of the Mathematicks*). Constat Tomis duobus, quorum primo continentur 1. Arithmetica tum decadica, tum decimalis, tum speciosa, 2. sex libri priores Elementorum *Euclidis* una cum undecimo & duodecimo atque Geometria practica, 3. Trigonometria plana & Sphærica, 4. Cosmographia, 5. Ars navigandi, 6. doctrina Sphærica secundum hypothesin terræ motæ: in altero autem extant tabulæ astronomicæ, sinuum versorum & logarithmorum, atque Geographia seu descriptio præcipuarum Regionum. Eorum potissimum conatibus inservit hoc opus, qui Artem navigandi solidioribus fundamentis superstructam addiscere gestiunt. Commendatur quoque doctrina Sphærica talia continens, quæ alibi frustra quæsiveris.

§. 4. *Claudius Franciscus Milliet Dechales*, Camberiensis, Societate Jesu, A. 1674. edere cœpit Cursum seu Mundum mathematicum tribus Tomis: sed cum novam editionem multo auctiorem meditatus ante diem obiisset, *Amatus Varcinus* ex eadem Societate A. 1690. editionem

nem ex MSC. Autoris auctam & emendatam dedit Lugduni Gallorum in fol. (32. Alph). Editio posthuma in 4. Tomos digesta, quorum primo continentur 1. Tractatus de progressu Matheseos & de illustribus Mathematicis, 2. *Euclidis* Elementa XIV. 3. *Theodosii* Sphærica, 4. Tractatus de sectionibus Conicis, 5. Arithmetica practica, 6. Trigonometria, 7. Algebra, 8. Hypothesium Cartesianarum refutatio: secundo 1. Geometria practica, 2. Mechanica, 3. Statica, 4. Geographia, 5. Tractatus de Magnete, 6. Architectura civilis, 7. Ars tignaria, 8. Tractatus de lapidum sectione: tertio 1 Architectura militaris, 2. Hydrostatica. 3. Tractatus de fontibus & fluviis, 4. Hydraulica, 5. Ars navigandi, 6. Optica, 7. Perspectiva, 8. Catoptrica, 9. Dioptrica: quarto denique 1. Musica, 2. Pyrotechnia, 3. Astrolabium, 4. Gnomonica, 5. Astronomia, 6. Astrologia, 7. Tractatus de Meteoris, 8. Calendarium. Autor in Mathesi pura antiqua & vulgaria bene explicat; recentiora vero inventa & sublimiora non attingit. De disciplinis ad Mathesin mixtam spectantibus dicemus suo loco, id unice nunc annotasse contenti sumus, quod ad discursus physicos sæpius digrediatur. In demonstrando rigori veterum perspicuitatem jungit. Cursuum Mathematicorum, qui hactenus lucem publicam adspexerunt, absolutissimus est.

§. 5. A. 1690. *Wilhelmus Leyborn*, Anglus, patrio idiomate publicavit Cursum Mathematicum sub titulo: *Mathematical Sciences in Nine Books*, Londini in fol. (11. Alph. Tab. æn. 43). Liber primus explicat Arithmeticam, vulgarem pariter ac decimalem cum logarithmica; secundus Geometriam elementarem (cui appendicis instar subjungitur brevis ad Algebram speciosam introductio); tertius doctrinam de primo mobili; quartus Cosmographiam, Geographiam & Chronologicam doctrinam de epochis; quintus Trigonometriam planam & sphæricam; sextus usum instrumentorum geometricorum in Geodæsia, planimetria & Architectura tam civili, quam militari; septimus Artem navigandi; octavus Gnomonicam; nonus librum

rum secundum Institutionum Astronomicarum *Nicolai Mercatoris* de theoria planetarum. Plurimas disciplinas Mathematicas in hoc cursu desiderari statim apparebit, si quidem eam cum cursu præcedente conferre libuerit.

§. 6. *Abrahamus de Graaf*, Batavus, idiomate patrio Amstelodami A. 1694. in 4. (1. Alph. 21. plag. Tab. æn. 94.) sub titulo *de geheele Mathesis of Wiskonst* publici juris fecit Cursum Mathematicum, in quo reperiuntur 1. tractatus brevis de Proportione, 2. Arithmetica practica, 3. Geometria elementaris, 4. Trigonometria plana & sphærica, 5. Astronomia, 6 Ars agrimensoria cum stereometria doliorum, 7. Ars navigandi, 8. Architectura militaris, 9. Gnomonica, 10. Perspectiva, 11. Dioptrica cum Catoptrica, 12. Mechanica, 13. Algebra. In plerisque nimis brevis, Algebra excepta.

§. 7. A. 1697. *Ozanam*, Gallus, vir variis scriptis Mathematicis suo loco commendandis celebris, in publicum emisit Cursum Mathematicum quatuor Tomis comprehensum sub tit. *Cours de Mathematique* Parisiis in 8vo, recusum Amstelodami (quamvis Parisiorum nomen præ se ferat) A. 1699. (4. Alph. 14. plag. Tabb. æn. 155.) Tomus primus complectitur Elementa *Euclidis* sex priora una cum undecimo & duodecimo atque Arithmetica litterali; secundus Trigonometriam planam & Sphæricam cum Tabulis Sinuum, Tangentium atque Logarithmorum; tertius Geometriam practicam; quartus Mechanicam atque Perspectivam; quintus Geographiam & Gnomonicam. Desunt adeo disciplinæ quam plurimæ. Cæterum in demonstrando rigorem veterum pulchre observat Cl. Autor.

§. 8. Jac. *Taylor* in Thesaurario Mathematicæ, quod An. 1707. W. *Alingham* Londini in 8. recudi fecit (1. Alph. 12. plag. Tabb. æn. 18. sermone Anglico sub Titulo *Treasury of the Mathematicks* explicantur præcipua problemata Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Trigonometriæ utriusque, Astronomiæ Sphæricæ, Geographiæ, Navigationis, Geodesiæ, Stereometriæ, Gnomonicæ, Architecturæ mili-

militaris & Pyrothechniæ, suppositis terminorum definitionibus & demonstrationibus sepositis. Adduntur Tabulæ Logarithmorum & Tabulæ Sinuum atque Tangentium.

§. 9. Cum sub finem A. 1706. munus docendi publice Mathesin in Academia Halensi in me translatum esset; statim animadverti, me eidem ex voto satisfacere non posse, quamdiu desit liber, multiplici studiosorum ad celeberrimam hanc Musarum sedem undiquaque confluentium scopo conveniens. Prælectiones mathematicæ in Academiis Germaniæ tum instituebantur in Mathesin Compendiariam *Joannis Christophori Sturmii*, Philosophiæ Naturalis & Matheseos in Academia Altorfina Professoris, paucis Tabulis comprehensam. Sed cum in iis nonnisi prima Matheseos rudimenta continerentur, ac inprimis desideraretur methodus, qua intellectus juvenum ad reliqua studia rectius absolvenda formatur; meo, quem in docenda & discenda Mathesi mihi præfixeram, scopo eædem parum conveniebant. Equidem idem A. 1699. duobus Tomis Norimbergæ in 8. ediderat *Mathesin Juvenilem*, quorum prior Arithmeticam practicam, Geometriam practicam cum palmariis Geometriæ elementaris theorematis, Trigometriam planam, Architecturam militarem atque civilem, & Staticam seu Artem mechanicam; posterior Opticam, Catoptricam & Dioptricam, Astronomiam, Chronologiam, & Gnomonicam continet: in ea tamen nonnisi uberiori discursu illustrantur, quæ in Tabulis concisius proponuntur. Utitur Autor methodo erotematica, nec demonstrationibus locum concedit, ut ipse in præfatione moneat, non quærendam in hoc libro esse Mathesin suis numeris absolutam ac demonstrationibus exactissimis ubique firmatam, sed facilem, planam ac demonstrationibus discentium captui accommodatis illustratam verius, quam corroboratam. (Tom. I. 2. Alph. 12. plag. Tabb. æn. 52. Tom. II. 2. Alph. 9 plag. Tabb. æn. 57.)

§. 10. Filius ejus *Leonhardus Christophorus Sturmius*, Francofurti ad Oderam Matheseos Professor, Compendium Matheseos conscripsit in usum Prælectio-

num suarum idiomate patrio, methodo erotematica ad imitationem Matheseos juvenilis parentis sui, in quinque partes divisam, quarum prima Mathesin universalem, Arithmeticam, Geometriam elementarem, Phoronomiam, Algebram; secunda Arithmeticam practicam, Geometriam practicam, Architecturam militarem & civilem, Pyrotechniam, Mechanicam; tertia Astronomiam, Geographiam & Chronologiam; quarta Gnomonicam, Opticam, Perspectivam & Acusticam, quinta Tabulas quasdam mathematicas continet. Prodiit secunda vice Francofurti ad Oderam 1710. in 8. sub Titulo: **Kurtzer Begriff der gesammten** Mathesis. Autor totum se dederat studio Architecturæ civilis ac militaris & Geometriæ practicæ, ut adeo in theoria elementari cespitet. In ceteris vestigia parentis in Mathesi juvenili legit, quantum ipsi dabatur.

§. 11. Ut igitur ad verum Matheseos studium juventutem academicam manuducerem, Universæ Matheseos Elementa idiomate patrio conscripsi, & quatuor Tomis Halæ 1710. in 8. sub Titulo: **Anfangs-Gründe der Mathematischen Wissenschaften**, evulgavi (5. Alph. 10. plag. Tabb. æn. 111.) Tomus primus continet Commentationem de Methodo mathematica, Arithmeticam, Geometriam, Trigonometriam & Architecturam civilem; secundus Pyrotechniam, Architecturam militarem, Mechanicam, Hydrostaticam, Aërometriam & Hydraulicam; tertius Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perspectivam, Trigonometriam Sphæricam, Astronomiam, Chronologiam, Geographiam & Gnomonicam: quartus denique Algebram communem, Analysin infinitesimalem Illustris *Leibnitii* & appendicem de præcipuis scriptis mathematicis. Theoretica parcius exposui, ut tempori ac loco servirem, quantum ad praxes, quas uberius tradidi, demonstrandas sufficere deprehendi, reliquis in parte quarta per Analysin erutis. Ubivis tamen methodi rationem habui, ut verioris Logicæ praxis animis discentium insinuaretur & ad solidam doctrinam capiendam discentes apti efficerentur. Non

inutilem fuiſſe huncce laborem, tum propria experientia me quotidie adhuc edocet, tum alii publice confeſſi ſunt. Videantur Acta Eruditorum A. 1711. pag. 279. A. 1713. p. 222. 428. & A. 1714. p. 250. Quinta vice recuſa ſunt hæc Elementa An. 1738. in 8. (6. Alph. Tabb. æn. 121.) Prodeunt nunc Amſtelodami in linguam Batavorum translata & Lauſannæ in Latinum verſa eduntur.

§. 12. Quoniam hæc Elementa nonnullis prolixiora videbantur, quam ut tyronibus promiſcue proponerentur, & inprimis Algebra in parte quarta prolixius explicata eorum captui non convenire, nec ad omnium palatum eſſe judicaretur; deſiderio aliorum ſatisfacturus eadem in Compendium redegi & A. 1713. Halæ in 8. edidi (2. Alph. Tabb. æn. 45). Continetur in hoc compendio Commentatio de Methodo mathematica, Arithmetica, Geometria, Trigonometria plana, Mechanica, Hydroſtatica, Aërometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Perſpectiva, Aſtronomia, Geographia, Chronologia, Pyrotechnia, Architectura militaris & civilis, Algebra ſpecioſa ad exempla arithmetica applicata. Editio ſexta prodiit Halæ A. 1737.

§. 13. Quid me impulerit, ut Elementa Matheſeos Latina a Germanicis diverſa ederem, in præfatione Tomi primi expoſui. An finem mihi propoſitum fuerim conſecutus, aliorum eſto judicium. Editio altera, quæ ab Anno 1730. prodiit & cui nunc Tomo quinto colophonem imponimus, recuſa eſt Genevæ in 4. ab anno 1732. forma majore. Enimvero editionem nitidiſſimam & ab omnibus mendis expurgatam Veronæ parat *Joſephus Sererius*, Medicinæ ac Philoſophiæ Doctor, in omni Matheſi ac Philoſophia verſatiſſimus. Ad commodiorem uſum figuræ ipſi textui inſeruntur. Eandem operam iisdem impendit, quam orbi erudito in recudendis operibus noſtris philoſophicis Latinis abunde comprobavit. Ut Gallorum commodis inſerviat *Joannes Theobaldus Bion*, Elementa hæc noſtra quoad ſubſtantiam in linguam Gallicam transfundit ſatis ingenue ac feliciter, quemadmodum ex ſpeci-

ſpeciminibus ad me transmiſſis intellexi.

§. 14. Ab eo tempore, ex quo Elementa Matheſeos tam patrio, quam Latino ſermone conſcripta edidi, plura in Germania paſſim prodiere Compendia Matheſeos, Noſtris ſatis nota & in bibliopoliis noſtris ubivis obvia. Sed de ſingulis dicere nimis foret prolixum & a præſenti inſtituto alienum.

§. 15. *Conradus Daſipodius*, Mathematum Profeſſor Argentoratenſis, Argentorati an. 1573. edidit Dictionarium Mathematicum Græce atque Latine conſcriptum in 8. (plag. 12.) Continentur in eo definitiones ac diviſiones Arithmeticæ, Logiſticæ, Geometriæ, Geodeſiæ, Aſtronomiæ & Harmonicæ. Non ordinem alphabeti ſequitur Autor, ſed diſciplinarum. In iis etiam diſciplinis, quas attingit, opera ejus eſt admodum imperfecta.

§. 16. *Hieronymi Vitalis*, Capuani, Clerici Regularis Theatini, Lexicon Mathematicum Pariſiis 1668. in 8. prodiit (1. Alph. 18. plag.) In eo tamen nonniſi voces Geometriæ elementaris, Aſtronomiæ & Aſtrologiæ explicantur. Idem A. 1690. Romæ in 4. recuſum & ex omnibus fere diſciplinis Mathematicis inſigniter auctum, multis inutilibus paſſim reſciſſis. (6. Alph. 3. plag.)

§. 17. *Ozanam* ſupra laudatus Lexicon Mathematicum ſecundum ordinem diſciplinarum diſpoſuit, editum Pariſiis An. 1691. in 4. (4. Alph.) Explicat Cl. Autor terminos Arithmeticæ, Algebræ, Geometriæ ſpeculativæ & practicæ, Coſmographiæ, Aſtronomiæ, Navigationis, Geographiæ tum aſtronomicæ, tum naturalis, tum hiſtoricæ, Opticæ, Perſpectivæ, Gnomonicæ, Catoptricæ, Dioptricæ, Artis pictoriæ, Mechanicæ, Staticæ, Hydroſtaticæ, Architecturæ civilis & militaris, atque Muſicæ.

§. 18. *J. Harris* in Lexico Technico magno, cujus Tomus primus Londini 1704. alter ibidem 1710. in fol. prodiit, præter alios terminos Artium & Scientiarum non modo Methematicos terminos, verum etiam res ipſas explicat. Titulus operis eſt: *An univerſal engliſh Dictionary of Arts and Sciences*,

*explaining not only the Terms of Arts, but them selves.*

§. 19. *E. Chambres* Londini A. 1728. duobus Voluminibus in fol. forma majore edidit Lexicon Universale artium & scientiarum sub Titulo: *Cyclopædia, or an Universal Dictionary of Arts and sciences* ordine alphabetico conscriptum (Alph. 22. plag. 8. Tabb. æn. 28.) In eo etiam explicantur, quæ ad Mathesin spectant, ita ut Lexici Mathematici nomen simul tueatur. Mathematica pleraque ex Elementis hisce nostris petuntur, quæ etiam passim citat.

§. 20. A. 1716. lucem publicam adspexit Lipsiæ in 8. forma majore Lexicon Mathematicum, (2. Alph. 5. plag. cum multis figuris textui insertis), quod nonnullorum precibus fatigatus idiomate vernaculo secundum ordinem alphabeticum ita digessi, ut non modo singulos terminos in disciplinis Mathematicis passim obvios explicuerim, verum etiam Autores citaverim, qui vel primi res iisdem notatas invenerunt, vel optima ratione exposuerunt, ac præterea præcipua dogmata recensuerim, singulorumque usum indicaverim, ut scilicet usui sit illis, qui vel historicam Matheseos cognitionem affectant, vel in lectione Autorum ob voces non intellectas hærent, vel denique ducem in cognoscendo aliquo argumento desiderant. In Italicum idioma idem transtulit *Josephus Serenius* supra laudatus (§. 13.)

§. 21. Cum bibliopola novam hujus Lexici editionem dare vellet, a me desideravit, ut idem ad mentem ipsius reformarem aut alteri hunc laborem committerem, sed paterer, ut nomen meum eidem præfigeretur. Quoniam non possideo calamum venalem, insulso petito deferre nec volui, nec potui. Bibliopola itaque, cum Lexicon istud diu desideraretur, tandem aliud edidit A. 1734. (2. Alph. Tabb. æn. 26), de quo judicium meum lubens suspendo. Sed quia vulgo pro meo Lexico venditur ac emitur; monendus est Lector, me istud pro meo non agnoscere, nec mea facere, quæ in eodem immutata. Præfationem quoque, quæ eidem præfigitur, diversam esse ab ea, quæ a me profecta fuerat, ipsa collatio utriusque prodit. Ne tamen abusui nominis mei locus daretur; Autor

Autor ejus nomen ſuum præfigere debuiſſet.

§. 22. In gratiam eorum, qui caſtra ſequuntur, Lexicon militare, pyrotechnicum & navale conſcripſit *Joannes Ludolphus* **Fäſch**/ quod Dresdæ A. 1735. in 8. forma majore (2. Alph. 8. plag. Tabb. æn. 21.) prodiit ſub Titulo: **Kriegs**= *Ingenieur-Artillerie-* **und See**= *Lexicon.* Explicantur in iis termini, qui in Architectura & re militari, Pyrotechnia & Architectura navali ac navigatione occurrunt, figurisque æri inciſis, ubi opus eſt, illuſtrantur.

§. 23. *Simon Stevinus* varia opera Mathematica conſcripſit, quæ ſub titulo: Les Oeuvres Mathematiques de *Simon Stevin* de Bruges Lugduni Batavorum in fol. publicavit A. 1634. *Albertus Girardus* (1. Alph. 19. plag.) Continentur in iisdem 1. Arithmetica tam rationalium, quam irrationalium cum regulis Algebræ; 2. Sex libri *Diophanti Alexandrini*, quorum quatuor priores opera *Stevini*, duo poſteriores a *Girardo* traducti, 3. Uſurarum computus, Logiſtica decimalis & incommenſurabilium doctrina, ubi ſimul Elementum *Euclidis* decimum illuſtratur; 4. Trigonometria plana & ſphærica, 5. Geographia, 6. Aſtronomia, 7. Geometria practica, 8. Statica, 9 Optica, 10. Caſtrametatio, 11. Ratio muniendi per cataractas, 12, Architectura militaris. Autor & in theoria, & in praxi cum laude verſatus.

§. 24. *Chriſtophori Clavii*, Bambergenſis, e Societate Jeſu, Opera Mathematica in quinque Tomos diſtributa, & ab Autore ipſo correcta plurimisque locis aucta prodiere Moguntiæ An. 1612. in fol. (40. Alph. 9. plag.) Tomus primus complectitur XVI. Elementa *Euclidis* & Libros tres Sphæricorum *Theodoſii* cum Commentariis *Clavii* in utrumque Autorem, Sinuum Tangentium & Secantium rationem & Canones; Tractationem triangulorum, tum rectilineorum, tum Sphæricorum: Tomus ſecundus Geometriam practicam, Arithmeticam & Algebram, una cum refutatione Cyclometriæ *Joſephi Scaligeri*: Tomus tertius *Joannis de Sacro Boſco* libellum de Sphæra cum prolixo Commentario *Clavii* in eundem atque libros tres de

Aſtro-

Aſtrolabio: Tomus quartus Gnomonicam, Fabricam & uſum inſtrumenti ad horologiorum deſcriptionem peropportuni; Horologiorum novam deſcriptionem, Compendium breviſſimum deſcribendorum horologiorum horizontalium ac declinantium, cum notis in idem: Tomus denique quintus Romani Calendarii a *Gregorio* XIII. P. M. reſtituti explicationem, Novi Calendarii Romani Apologiam adverſus Michaëlem Mæſtlinum & Appendicem ad Novi Calendarii Romani Apologiam, in qua *Joſephus Scaliger*, *Georgius Germanus* & *Franciſcus Vieta*, qui Calendarium aliter inſtaurandum eſſe contenderunt, ſeorſim ſinguli confutantur. *Clauius* inſtar veterum, *Euclidis, Archimedis* & *Apollonii*, demonſtrator rigidus.

§. 25. *Franciſci Vietæ*, Galli, Opera Mathematica in unum volumen congeſta Lugduni Batavorum in fol. A. 1646. edidit *Franciſcus a Schooten*, Leydenſis, in Academia patria Mathematum Profeſſor (6. Alph.) Continentur in iisdem 1. Iſagoge in Artem analyticam, 2. ad Logiſticen Speciosam Notæ priores, 3. Zeteticorum libri quinque, 4. de æquationum recognitione & emendatione Tractatus duo, 5. de numeroſa poteſtatum ad exegeſin reſolutione, 6. Effectionum Geometricarum Canonica recenſio, 7. Supplementum Geometriæ, 8. Pſeudo-Meſolabum & alia quædam adjuncta capitula, 9. Theoremata ad ſectiones angulares, 10. Reſponſum ad problema, quod omnibus Mathematicis totius orbis conſtruendum propoſuit *Adrianus Romanus*, 11. Apollonius Gallus, 12. Variorum de rebus Mathematicis Reſponſorum Liber VIII. 13. Munimen adverſus nova Cyclometrica, 14. Ratio Calendarii vere Gregoriani, 15. Calendarium Gregorianum perpetuum, 16. Adverſus Chriſtophorum Clavium Expoſtulatio.

§. 26. *Philippi Lansbergii* Opera omnia prodiere, Middelburgi in Selandia A. 1663. in fol. (10. Alph.) Continentur in iisdem 1. Triangulorum Geometriæ libri quatuor, 2. Cyclometriæ novæ libri duo, 3. Uranometriæ libri tres, 4. in quadrantem tum Aſtronomicum, tum Geometricum, nec non in

Aſtro-

Astrolabium Introductio, 5. Horologiographia plana, 6. Commentationes in motum Terræ diurnum & annuum, & in verum adspectabilis cœli typum, 7. Tabulæ motuum cœlestium perpetuæ, cum novis motuum cœlestium Theoricis & Astronomicarum Observationum thesauro, 8. Chronologiæ Sacræ libri tres, in quibus annorum mundi series ab orbe condito ad eversa per Romanos Hierosolyma nova methodo ostenditur.

§. 27. In Opusculis Mathematicis *Guilielmi Oughtred*, quondam Collegii Regalis in Cantabrigiensi Academia Socii, Oxonii 1677. in 8. editis, habentur 1. Institutiones Mechanicæ, 2. De variis corporum generibus gravitate & magnitudine comparatis Tractatus ex Marini Ghetaldi Archimede promoto excerptus, 3. Tractatus alius de Avtomatis 4. quæstionum *Diophanti Alexandrini* Libri tres 5. de triangulis planis rectangulis, 6. de divisione superficierum Tractatus, 7. Musicæ Elementa, 8. Architectura militaris, 9. Tractatus de sectionibus angularibus (15. plag.)

§. 28. *Andreæ Tacquet*, Antverpiensis, e Societate Jesu, Opera Mathematica Antverpiæ A. 1669. in fol. publicavit *Simon Laurentius Veteranus* ex Comitibus *Montis Calvi*, e Societate Jesu (9. Alph. 15. plag. Tab. æn. 88.) Extant in iisdem 1. Astronomiæ libri octo cum Appendice, 2. Geometriæ practicæ libri tres, 3. Opticæ libri tres, 4. Catoptricæ libri tres, 5. Architecturæ militaris liber unus, 6. Cylindricorum & Annularium libri quinque, 7. Dissertatio Physico-Mathematica de Circulorum volutionibus.

§. 29. A. 1692. prodiit Parisiis in 12. Synopsis Tractatuum Mathematicorum, qui necessarii esse possunt Nobilibus terra marive operam militiæ daturis, auctore P. *Hosto*, e Societate Jesu, Mathematum Professore Tulonensi. Titulus operis: *Recueil des Traités de Mathematique, qui peuvent être necessaires à un Gentilhomme, pour servir par mer, ou par terre.* (Plag. 26. Tab. æn. 67.) Constat hæc synopsis tribus Tomis, quorum primus Elementa *Euclidis*, Arithmeticam & Trigonometriam; secundus Geometriam practicam, Sphæricam,

Mechanicam, Artem muniendi & Pyrotechniam; tertius denique Artem navigandi complectitur.

§. 30. A. 1693. munificentia *Ludovici* Magni, Galliarum Regis, Parisiis in fol. reg. lucem adspexerunt Veterum Mathematicorum Opera, Græce & Latine pleraque tum primum edita. (4. Alph. Fig. æn. 174.) Continentur in istorum numero *Athenæus* de machinis; *Apollodori* Poliorcetica; *Philonis* liber quartus de telorum constructione, & quintus de rationibus tolerandæ instituendæque obsidionis; *Biton* de constructione machinarum bellicarum & catapultarum; *Heronis* Belopoeeca, spiritalia & Avtomata *Julii Africani* Cesti; Anonymi liber de toleranda obsidione. Adduntur *Bernardini Baldi* scholia in *Heronis* Belopoeecam & nonnulla alia.

§. 31. Ex eadem typographia Regia A. 1693. in fol. prodiere Varia Opera Mathematica & Physica, Autoribus Academicis Regiis scientiarum. Titulus operis: *Divers ouvrages de Mathematique & de Physique par Messieurs de l' Academie Royale des sciences* (*Plag*. 108.) Reperies in hoc Volumnie 1. *Freniclii* Tractatum de Exclusionibus, 2. ejusdem compendium Combinationum, 3. ejusdem Tractatus de quadratis magicis; 4. *Robervalli* observationes super compositionem motuum, quam ad tangentes curvarum ducendas applicat; 5. Delineatio libri Mechanici de motu composito; 6 de recognitione æquationum liber; 7. Tractatus de indivisibilibus; 8. Liber de Trochoide; 9. epistola ad *Mersennum* de *Torricellii* quibusdam propositionibus; 10. *Torricellii* litteræ ad *Robervallium* missæ occasione præcedentis epistolæ; 11. *Robervallii* epistola, qua sua sibi inventa contra *Torricellium* aliosque Italos vindicat; 12. *Hugenii* opusculum de causa gravitatis; 13. Æquilibrii in libra demonstratio; 14. Potentiarum fila funesque trahentium vires; 15. Nova vis movens ope pulveris pyrii & aëris; 16. Constructio ingeniosa loci ad hyperbolam per asymptotos; 17. Regula *Fermatii* de maximis & minimis demonstrata & ad mirabilem brevitatem perducta; 18. Problema Opticum sive 39.

Prop.

Prop. lib. 5. *Alhazeni*, aut 22. lib. 6. *Vitellionis* constructum. 19. *Picardi* praxis magnorum sciatericorum per calculum absolvenda; 20. Schediasma de mensuris; 21. Mensuræ ab originalibus desumptæ; 22. de mensura liquidorum & aridorum; 23. de proportione aquarum effluentium; 24. experimenta circa aquas effluentes, 25. Fragmenta dioptrica de vitrorum potissimum focis determinandis; 26. DN. *Auzout* Tractatus de micrometro; 27. *Mariotti* Regulæ de aquæ jactibus. 28. *Ræmeri* Regulæ de crassitie & viribus tuborum in aquæductibus secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros; 29. ejusdem experimenta circa altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium.

§. 32. *Francisci Maurolyci*, Abbatis Messanensis, opuscula Mathematica, Venetiis 1575. in 4. edita (1. Alph. 18½ plag.) complectuntur 1. de sphæra librum unum, in quo termini in hac doctrina obvii explicantur: 2. Computum ecclesiasticum: 3. Tractatum instrumentorum Astronomicorum, nempe de Quadrato Geometrico, Quadrante, Astrolabio, Armillis, Sphæra Solida: 4. De lineis horariis Tractatum Gnomonicum: 5. Propositiones libri decimi tertii Elementorum *Euclidis*: 6. Musicæ traditiones, continentes epitomen Musicæ *Boëtianæ* & paucas de Musica regulas: 7. de lineis horariis libros tres, Gnomonicæ uberiora fundamenta exponentes: 8. Arithmeticorum libros duos.

§. 33. Opuscula Mathematica *Thomæ Cevæ*, e Societate Jesu, Mediolani 1699. in 8. typis descripta (plag. 4.), constant ex nonnullis demonstrationibus de ratione æquilibrii, de sectione Geometrico-harmonica & arithmetica; de sectione anguli rectilinei in quotvis partes tum organice, tum per quasdam lineas curvas, Cycloides scilicet anomalas; de parabola consideranda instar ellipsis maximæ atque instar hyperbolæ habentis transversam diametrum infinitam; de lineis phantasticis & flexilineis. Adduntur quædam excerpta ex *Vincentii Viviani* Exercitatione mathematica, cui titulus *Formatione di tutti cieli*, & ex idea universali Matheseos Cl. *Ozanami*.

§. 34. *Johannis Wallisii*, SS. Theol. Doct. & Geometriæ Professoris Saviliani in Academia Oxoniensi celeberrimi, Opera Mathematica tribus voluminibus prostant. Volumen primum editum Oxonii A. 1665. in fol. (11. Alph. 17. plag.) continet 1. Orationem inauguralem A. 1649. d. ultimo Octobris habitam, cum publicam Professionem auspicaretur: 2. Mathesin universalem seu Arithmeticum opus integrum, tam philologice, quam mathematice traditum: 3. Tractatum elenchticum adversus Marci Meibomii de Proportionibus Dialogum: 4. Tractatum de Sectionibus Conicis nova methodo expositis: 5. Arithmeticam infinitorum: 6. Tractatus duos de Cycloide & Cissoide ac corporibus inde genitis, & de curvarum tum linearum εὐθυνύσει, tum superficierum πλατυσμῷ: 7. observationem eclipsis solaris A. 1654. d. 2. Aug. Oxonii visæ: 8. Mechanicam, sive de motu Tractatum Geometricum. Volumen secundum, quod ibidem An. 1693. in fol. prodiit. (10. Alph. 17. plag.) complectitur, 1. Tractatum Historicum & practicum de Algebra, 2. de combinationibus, alternationibus & partibus aliquotis, 3. de Sectionibus angularibus, 4. de angulo contactus & semicirculi, 5. defensionem ejusdem Tractatus, 6. disceptationem Geometricam de postulato quinto & quinta definitione lib. 6. *Euclidis*, 7. Cono-Cuneum, seu Corpus partim Conum, partim Cuneum repræsentans Geometrice consideratum, 8. de gravitate & gravitatione disquisitionem Geometricam, 9. de æstu maris hypothesin novam, 10. Commercium epistolicum de quæstionibus quibusdam Mathematicis, 11. *Joh. Caswelli* Trigonometriam planam & Sphæricam. In tertium denique volumen, quod 1699. in fol. lucem adspexit (14. Alph.), congesta sunt 1. *Claudii Ptolemæi*, *Porphyrii* & *Manuelis Briennii* Harmonica; 2. *Archimedis* Arenarius & dimensio circuli cum *Eutocii* Ascalonitæ in hanc Commentario; 3. *Aristarchi Samii* liber de magnitudinibus & distantiis Solis & Lunæ; 4. Fragmentum libri secundi Collectionis Mathematicæ *Pappi Alexandrini* desideratum; 5. Collectio epistolarum quarundam *Collinii*, *Leib-*

*Leibnitii*, *Newtoni*, *Walliisi*, *Flamsteadii* rem mathematicam ſpectantium; 6. opera quædam miſcellanea, nimirum Tractatus de loquela, Grammatica linguæ Anglicanæ, Inſtitutio Logica ad communes uſus accommodata, Mens ſobria ſerio commendata, in concione latine habita, Epiſtolæ ad Titum expoſitio aliaque nonnulla Theologica, quæ hujus non ſunt loci.

§. 35. *Chriſtianus Hugenius*, Mathematicus ſummus, multa præclara conſcripſit opera, de quibus ſuo loco dicemus. Poſt obitum ejus junctim prodierunt quatuor voluminibus in 4. ſub Titulo Operum variorum, & reliquorum. Opera varia lucem adſpexerunt Lugduni Batavorum A. 1724. duobus voluminibus; reliqua Amſtelodami A. 1728. duobus itidem voluminibus. Volumen primum variorum continet 1. Horologium, 2. Horologium Oſcillatorium, ſive de motu pendulorum ad horologia aptato Demonſtrationes Geometricas, 3. brevem Inſtitutionem de uſu horologiorum ad inveniendas longitudines, 4. de Hugeniana centri oſcillationis determinatione Controverſiam, 5. Machinas quasdam & varia circa Mechanicam. (Alph. 1. plag. 17. Tabb. æn. 33.); ſecudum vero 1. Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipſis & Circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus ſubjuncta eſt Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri *Gregorii a S. Vincentio* editæ A. 1647. 2. Epiſtolam ad Cl. V. *Franciſcum Xaverium Ainſcom* S. J. qua diluuntur ea, quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ *Gregorii a S. Vincentio* impugnata fuit, 3. De Circuli magnitudine Inventa & problematum quorundam illuſtrium conſtructiones, 4. de Circuli & Hyperbolæ Quadratura Controverſiam, 5. Geometrica varia 6. de Saturni Luna Obſervationem novam, 7. Syſtema Saturnium, 8. *Euſtachii de Divinis Septempedani* brevem annotationem in ſyſtema Saturnium *Chriſtiani Hugenii*, 8. brevem aſſertionem ſyſtematis Saturnii ſui, 9. de Saturni Annulo obſervationes, 10. Coſmotheoron, ſive de Terris cœleſtibus earumque ornatu conjecturas, 11. Ratiocinia in Ludo aleæ, 12. Novum Cyclum harmonicum, 13. Varia de Op-

tica, 14. Experimenta physica (Alph. 2. plag. 14. Tabb. æn. 23.) In Reliquorum volumine primo extant 1. Tractatus de Lumine & Dissertatio de causa gravitatis, 2. Geometrica demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam, *Guidonis Grandi*, 3. ejusdem *Grandi* epistola Geometrica ad V. C. *Thomam Cevam* e Societate Jesu (Alph. 1. plag. 18. Tabb. æn. 15.) In altero autem comprehenduntur opera posthuma, nimirum 1. Dioptrica, 2. Commentarii de poliendis vitris, 3. Dissertatio de Coronis & Parheliis, 4. Tractatus de motu corporum ex percussione 5. Tractatus de vi centrifuga, 6. Descriptio Automati Planetarii. (Alph. 2. plag. 6. Tab. æn. 43.) De præclaris hisce operibus specialia monebimus suo loco.

§. 36. Inprimis hic commemoranda sunt Acta Societatum Scientiarum, quæ nostro ævo ad promovendam Mathesin præsertim atque Physicam fuere institutæ. Pertinent huc Acta Philosophica Societatis Regiæ Anglicanæ, quæ a Secretariis eduntur sub Titulo: *Philosophical Transactions Giving some account of the præsent undertakings, studies and labours of the ingenious in many considerable parts of the World* & quorum usque ad annum 1734. prostant volumina 38. De his singulis dicere ab instituto nostro alienum est. Sufficit itaque monuisse, quod in iis, contineantur plurima ad mathesin spectantia lectu dignissima iis, quibus curæ cordique est Scientiam Mathematicam ultra limites præsentes promovere. Anno 1705. *Johannes Lowthorp* Volumina 21, quæ usque ad Annum 1700. prodierunt, in epitomen redegit & in iis contenta per capita generalia disposuit. Lucem adspexit hoc opus sub Titulo: *The Philosophical Transactions and Collections to the end of the year* 1700. *abridg'd and dispos'd under general heads* tribus voluminibus Londini in 4. Volumine primo continentur Mathematica ad Geometriam, Arithmeticam, Algebram, Logarithmotechniam, Trigonometriam, Artem libellandi, Opticam, Astronomiam, Mechanicam, Acusticam, Hydrostatricam, Hydraulicam, Artem navigandi, Architecturam civilem & navalem, Perspectivam, Sculpturam,

Artem

Artem pictoriam & Musicam spectantia. Constat. Alph. 4. plag. 4. Tabb. æn. 7. Specialius ad singulas Matheseos partes pertinentia recensentur in Actis Eruditorum, supplementorum Tom. IV. sect. 7. p. 290. & seqq. Epitomen hanc Actorum Philosophicorum ab A. 1700. usque ad A. 1720. continuavit *Benjaminus Motte* & ab A. 1720. usque ad A. 1732. *Reidius* & *Johannes Gray*. Continuationis primæ Volumen I. quod Londini 1721. in 4. prodiit (Alph. 3. plag. 18 Tabb. æn. 18.) Mathematica, Anatomica, Medica; secundæ vero Voluminis I. pars prima, quæ Londini 1733. in 4. lucem adspexit, (Alph. 2. plag. 7. Tab. æn. 12.) Mathematica sola continet. Illa specialius recensentur in Actis Eruditorum A. 1723. p. 89. & seqq. hæc vero in Novis Actis Eruditorum An. 1735. p. 125. Cum lingua Anglica sit minus trita & libri in Anglia impressi in aliis terris difficulter haberi possint; optandum foret, ut in Linguam Latinam, aut minimum Gallicam verterentur. Equidem cum prima volumina in linguam Latinam translata superiori seculo Lipsiæ ederentur, nullos fere invenerunt emtores, ut versio continuata non fuerit: non tamen dubitandum est, fore ut nostro ævo, ubi Mathesis & Physica plures numerat cultores, majore applausu excipiantur.

§. 37. Ab Anno 1699. quo Academia Regia scientiarum Parisiis florens, instaurato singulorum annorum Historiam Gallico idiomate conscripsit ejusdem Secretarius *Fontenellius*, quibus accedunt Commentarii Mathematici & Physici. Titulus cujuslibet Voluminis est: *Histoire de l'Academie Royale des sciences avec les Memoires de Mathematique & de Physique.* Imprimitur Parisiis in 4. forma majore & recuditur in Batavia charactere minore, ut leviori pretio comparari possint hæc opera. In singulis voluminibus continentur, quæ ad Physicam generalem, ad Anatomiam, Chimiam, Botanicam, Geometriam, Astronomiam, Geographiam, Chronologiam & Mechanicam spectant, siquidem ad singulas hasce classes referendum schediasmata a Membris fuerint exhibita, & sub finem Historiæ subjiciuntur Elogia Membrorum, quæ isto anno, cujus

cujus historia exhibetur, diem supremum obierunt. Opus præclarum & omnibus Matheseos ac Physicæ cultoribus nunquam satis commendandum continuatur in hodiernum usque diem. Prolixum nimis foret de tot voluminibus sigillatim dicere & in iis contenta recensere. Adeat Diaria Eruditorum, in quibus eadem recensentur, qui hoc desiderat. Enimvero ne deessent ea, quæ ante instaurationem acta fuere, recentius edere libuit Collectionem Commentariorum Academiæ Regiæ scientiarum ab An. 1666. quo fundata fuit, usque ad An. 1699. eadem forma, qua nunc pro singulis annis Historia cum suis commentariis edi solet, Tomis undecim. Tomo primo continetur Historia a prima origine An. 1666. usque ad An. 1686. secundo Historia ab An. 1686. usque ad A. 1699. tertio Commentarii in usum Historiæ naturalis Animalium autore *Perraltio*; Quarto Dissertatio de principiis mixtorum naturalium *du Clos*, observationes ejusdem de aquis mineralibus plurium Provinciarum Galliæ, Commentarii *Dodarti* in usum Historiæ plantarum, ejusdem descriptiones novarum quarundam plantarum, *de Beze* e S. J. Descriptiones quarundam arborum & plantarum exoticarum; quinto diversa opera *Freniclii de Bessy*, scilicet Methodus inveniendi solutionem problematum per Exclusiones, Compendium Combinationum, Tractatus de Triangulis rectangulis in Numeris, Tractatus de Quadratis magicis, Tabula generalis Quadratorum magicorum & *Blondelli* Resolutio quatuor problematum principum Architecturæ; Sexto diversa opera *Robervallii*, scilicet observationes de compositione motuum, & de modo inveniendi tangentes curvarum, Idea libri Mechanicæ de motibus compositis, Tractatus de recognitione æquationum, de geometrica planarum & cubicarum æquationum resolutione, de Indivisibilibus, de Trachoide ejusque spatio, epistola *Ægidii Personeri* de *Roberval* ad Cl. P. *Mersennum*, epistola *Evangelistæ Torricellii* ad *Robervallium*, & Epistola *Robervallii* ad *Torricellium*; præterea diversa opera *Picardi*, nimirum Praxis horologiorum solarium majorum per cal-

calculum, dissertatio de Mensuris, una cum *Auzouti* comparatione mensurarum, de mensura liquidorum & aridorum, Experimenta circa aquas effluentes, fragmenta dioptrica, Tractatus de libellatione, *Roemeri* de crassitie & viribus tuborum in aquæductibus, secundum diversas fontium altitudines diversasque tuborum diametros & ejusdem Experimenta circa altitudines & amplitudines projectionis corporum gravium, instituta cum argento vivo; septimo Tractatus & observationes astronomicæ atq; physicæ factæ in pluribus itineribus a Membris Academiæ & pluribus, quibus commercium literarium cum Academia fuit: octavo diversa opera *Cassini*, scilicet de Origine & progressu Astronomiæ & de ejus usu in Geographia & Navigatione, Elementa Astronomiæ rectificata ex observationibus *Richerii* factis in Insula Cayennæ; Luminis cœlestis, quod in Zodiaco apparet, detectio; Regulæ Astronomiæ Indorum computandi motus Solis & Lunæ, Reflexiones de Chronologia Sinarum, de Insula *Taprobane*, Hypotheses & Tabulæ Satellitum Jovis ex observationibus recentioribus reformatæ; Tabularum Satellitum Jovis usus præcipui; nono diversa opera *de la Hire*, scilicet Tractatus de Mechanica, Tractatus de Epicycloidibus & earum usu in Mechanica, Explicatio præcipuorum effectuum glaciei & frigoris, Dissertatio de differentia sonorum chordæ & Tubæ Marinæ, Tractatus de differentibus accidentibus visus, Tractatus de Praxi Picturæ; decimo commentarii Mathematici & Physici Academiæ scientiarum Annorum 1692. 1693. &c. & Commentarii Mathematici & Physici Membrorum Academiæ scientiarum ex diversis Diariis Eruditorum extracti; Undecimo denique Analysis generalis seu Methodi novæ resolvendi problemata omnis generis & omnis gradus in infinitum, autore *de Lagny*. Volumen septimum in duas partes dividitur, quarum utraque justum volumen constituit & multa continet, quæ sigillatim recensere nimis prolixum foret.

§. 38. Anno 1710. Berolini in 4. prodierunt Miscellanea

Berolinensia ad incrementum scientiarum ex scriptis Societati Regiæ exhibitis edita (Alph. 2. plag. 6. Tabb. æn. 31.) Dividitur in tres partes, quarum prima literaria, secunda physica & medica, tertia Mathematica & Mechanica continet. Tertia mole sua longe superat duas priores. Hæc Misaellanea deinceps continuata fuere ac in posterum continuabuntur. Continuatio prima lucem adspexit Berolini An. 1723. in 4. (Alph. 1. plag. 2. Tabb. æn. 8.), secunda ibidem A. 1727. in 4. (Alph. 1. plag. 21. Tabb. æn. 10.), tertia sub Titulo Tomi quarti ibidem A. 1734. in 4. (Alph. 2. plag. Tabb. æn. 11.)

§. 39. Academia Scientiarum Petropolitana quinque ab Anno 1728. usque ad A. 1738. Petropoli edidit Volumnia in 4. charta augusta sub Titulo: *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ* pro annis 1726. 1727. 1728. 1729. 1730. & 1631. Sunt vero horum Commentariorum tres classes, nimirum Mathematica, Physica & Historica. Quæ in classe mathematica continentur, hujus sunt loci & Mathesin inprimis subliminorem multum promovent, quemadmodum suo loco clarius edisseremus. Cum enim hoc opus continuandum sit in posterum, ut de singulis in classe mathematica cujusvis voluminis contenta sigillatim dicamus præsentis instituti ratio non fert.

§. 40. Denique hic quoque commemorandi sunt *de Bononiensi scientiarum & Artium Instituto atque Academia Commentarii*, qui Bononiæ A. 1731. in 4. charta itidem augusta lucem publicam adspexerunt (Alph. 3. plag. 13. Tab æn. 9.). Præfationis loco præmittitur Historia Bononiensis scientiarum Instituti: in Commentariis vero præter ea, quæ ad Historiam naturæ spectant, atque Chymica, anatomica, medica, physica, continentur etiam mechanica, analytica, geographica, astronomica & meteorologica. Subjunguntur iisdem opuscula varia quorundam Academicorum, inter quæ ad Mathesin spectant *Dominici Guilielmini* epistola hydrostatica, *Eustachii Manfredii* de meridianæ lineæ, quæ in D. *Petronii* exstat, dimensione

&

& de novissimis circa fixarum siderum errores observationibus, *Gabrielis Manfredii* de formulis quibusdam integrandis, *Jacobi Riccati* virium elasticarum leges, *Joannis Rizetti* de corporum collisionibus & inde orta motuum communicatione, & *Francisci Mariæ Zanotti* de motu composito & de reflexionibus globi in plano rectangulo.

§. 41. Ad præsentem scriptorum classem etiam referimus *Casparis Schotti*, supra laudati, Organon Mathematicum & Magiam Universalem Naturæ & Artis. Organon Mathematicum editum est Herbipoli A. 1688. in 4. (5. Alph. Fig. æn. 1. Alph. 7. plag.). Ope tabularum quarundam Mathematicarum problemata Arithmetica, Geometrica, Architecturæ militaris, Chronologiæ, Gnomonicæ, Astronomiæ, Astrologiæ judiciariæ, Steganographiæ & Musicæ facilia redduntur tyronibus. Magia in quatuor partes divisa Bambergæ 1677. in 4. lucem adspexit (14. Alph. Tab. æn. 89.) In Tomo primo continentur Optica, Catoptrica & dioptrica; in secundo Acustica & Musica; in tertio Mechanica, Statica, Hydrostatica, Hydrotechnica, Aërotechnica, nec non Arithmetica, Geometrica: in quarto deniq; Cryptographica, Pyrotechnica, Magnetica, Sympathica, Medica, divinatoria, Physiognomica & Chiromantica.

§. 42. In eundem censum veniunt *Danielis Schwenteri* Mathematum & Linguarum orientalium in Academia Altorffina Professor, Deliciæ Physico-Mathematicæ, Norimbergæ 1636. in 4. primum editæ (3. Alph. 4. plag.) & postea a *Philippo Harsdorffero* duobus Tomis auctæ (10. Alph. 8. plag.) Continentur in iisdem ludicra varia, nonnulla etiam utilia, ex Arithmetica, Geometria, Stereometria, Musica, Optica, Catoptrica, Astronomia, Astrologia, Gnomonica & Thaumatopoëtica, Statica, Mechanica, Pyrobolia, Pneumatica, Hydraulica, Arte scriptoria, Architectura & Chymia.

§. 43. Majorem selectum in simili scripto fecit *Ozanam*, quod sub titulo *Recreations de Mathematique & de Physique* Parisiis 1696. in 8. reg. edidit (3. Alph. 7. pl. Tabb. æn. 44.) Recusæ sunt hæ Recreationes mul-

to auctiores quatuor Tomis ibidem A. 1725. in 8. forma majore, (Alph. 5. plag. 6. Tabb. æn. 132). Tomus primus continet problemata Arithmeticæ, Geometricæ & Opticæ; secundus problemata Gnomonicæ, Cosmographiæ, Mechanicæ; tertius problemata Pyrotechniæ & Physicæ, & Tractatum de Horologiis elementaribus *Dominici Martinelli* ex Italico in Gallicum idioma translatum. In quarto denique Tomo agitur de Phosphoris naturalibus & artificialibus & lampadibus perpetuis, atque præstigiatorum artificia una cum aliis ludicris explicantur.

## CAPUT II.

## DE ARITHMETICA.

§. 1.

ARithmetica veterum ab Arithmetica hodierna prorsus erat diversa. Veteres enim in eadem nonnisi varias numerorum divisiones considerabant. Videre hoc est ex duobus Arithmetices libris, quos tertio Urbis conditæ seculo consignavit *Nicomachus*, editis Parisiis 1538. Eum sequitur presso pede sexto a Christo nato seculo *Anitius Manlius Severinus Boëthius* in Arithmetica sua.

§. 2. Compendium Arithmeticæ veterum composuit nono post Christum natum seculo *Psellus*, *a Guilielmo Xylandro* ex Græco idiomate in Latinum translatum, annotationibus auctum & Basileæ 1556. in 8. in lucem publicam emissum. Recentius simile Compendium conscripsit *Jodocus Willichius*, sub titulo: *Arithmeticæ libri tres* editum Argentorati 1540. in 8. (plag. 8.) Usum habet in Idea exemplari definitionum animis tyronum ingeneranda, ut præcepta Logicæ facilius comprehendant & ad divisionem rerum in sua genera & species intimius per-

perſpiciendam: de quo ſuo loco plura.

§. 3. Prolixius hoc Arithmeticæ genus illuſtrarunt duodecimo poſt Chriſtum natum ſeculo *Jordanus* in duodecim de Arithmetica libris & *Jacobus Faber Stapulenſis* in Commentario in eosdem A. 1480. edito.

§. 4. Arithmeticam theoreticam, quæ numerorum proprietates expendit, illuſtravit *Euclides* Elementorum libro VII. VIII. & IX. Sed de his elementis dicemus plura in ſequente capite.

§. 5. Exactam theoriam ad demonſtrandas operationes communes Arithmeticæ practicæ cum in numeris integris, tum fractis ſive vulgaribus, ſive ſexagenariis dedit *Barlaamus Monachus* in Logiſtica, quam Latine reddidit & ſcholiis illuſtratam Pariſiis An. 1600. in 4. edidit *Joannes Chamberus*, Collegii Etonenſis apud Anglos ſocius. (1. Alph. 3. plag.) Sed captum tyronum tranſcendit, quibus nimia accuratio inutilis, immo ridicula videtur.

§. 6. *Frater Lucas de Burgo S. Sepulchri*, Ordinis Minorum, Sacræ Theologiæ Magiſter, idiomate Italico An. 1523. edidit opus in fol. (6. Alph. 10. plag.) de Arithmetica & Geometria. Maxima operis pars Arithmeticæ impenditur & in ea non modo diviſiones numerorum ex *Nicomacho* & proprietates ex *Euclide* traduntur; verum etiam Algorithmus cum in integris, tum in fractis, una cum extractionibus radicum, regulis proportionum & progreſſionum, nec non regula falſi & Algebræ explicatur.

§. 7. *Michaël Stifelius*, Paſtor Eccleſiæ Holtzdorffianæ, An. 1544. in 4. edidit Arithmeticam integram (1. Alph. 13. plag.), in qua multa tradit de numerorum cum rationalium, tum irrationalium, immo etiam Coſſicorum praxi, quæ alibi fruſtra quæſiveris, ſed ſine demonſtrationibus.

§. 8. Arithmeticæ practicæ opus abſolutum anno 1556. dedit *Nicolaus Tartaglia*, Venetus, in duas partes diviſum, quarum prima arithmeticam practicam ad uſum vitæ humanæ applicatam, altera vero Algebræ fundamenta explicat.

§. 9. *Franciſcus Maurolycus* in ſuis Arithmeticæ libris ſupra

laudatis (§. 32. C. 1.) doctrinam de numeris figuratis promovit & algorithmum cum extractionibus radicum atque aliis Arithmeticæ practicæ regulis rigorose demonstravit: Sed ejus demonstrationes non sunt ad cujusvis captum accommodatæ.

§. 10. *Georgius Henischius* in Arithmetica perfecta & demonstrata (Augustæ Vindelicorum 1609. in 4. 2. Alph. 6. plag.) omnem praxin de numero vulgari, Cossico & astronomico demonstrat, & id singulare habet, quod demonstrationes in syllogismos resolverit.

§. 11. *Andreas Tacquet* in Theoria & praxi Arithmetices sæpius recusa (e. gr. Amstelodami 1704. in 8. plag. 34. Tabb. 8.) elementa *Euclidis* Arithmethica facilius demonstrat & praxes arithmeticas suis quoque demonstrationibus munit. Unde non immerito commendatur hoc opus.

§. 12. Demonstrationes in Arithmetica practica etiam affert *Dechales* (§. 4. c. 1.) Sed negligunt *Clavius*, *Herigonius*, *Vincentius Leotaudus* e Societ. Jesu, qui Institutionum arithmeticarum libros quatuor composuit, *Schottus* & plerique alii (§. 5. *& seqq. cap. cit.*). *Wallisius* calculum litteralem cum numerorum algorithmo conjunxit, & illius ope regulas fractorum, proportionum & extractionum radicum demonstravit: ex quo compendium dedit *Eduardus Wells* sub titulo Elementorum Arithmeticæ, 1698. in 8. tyronibus Calculi utriusque commendandum.

§. 13. In Elementis Arithmeticæ non modo praxin, verum etiam theoriam demonstravi, præsertim theoriam de ratione Quantitatum. Ast in Elementis Germanicis dedi demonstrationes, ad captum tyronum magis compositas. Sunt vero eædem vere analyticæ, ex ipsa notione numeri deductæ: ex qua integram Arithmeticam practicam methodo analytica deduxi, ut ad meditandum formarentur ingenia studio Arithmeticæ.

§ 14. Omittimus Autores alios, qui solam praxin tradiderunt, quamvis ad usum communem commendari mereantur *Gemma Frisius* in Methodo facili Arithmeticæ practicæ (Vitebergæ 1544. in 8. plag. 11.), ex quo me puerum integram arith-

arithmeticam practicam, ipsam etiam extractionem radicum proprio Marte didicisse memini, & *Adrianus Metius* in Arithmetica duobus libris comprehensa (Hafniæ 1640. in 4.). Recentius regulam generalem Arithmeticæ resolvendi omnia problemata, quæ ratione nituntur, dedit *K. F. de Rees*, quæ ex idiomate Batavo in Germaniceam translata publici juris facta Goettingæ An. 1739. in 8. (plag. 12.). Usui est illis, qui nulla theoria animum imbutum possident.

§. 15. *Samuel Morlandus* Londini An. 1673. in 12. (plag. 6½) idiomate Anglico emisit descriptionem duorum instrumentorum, quorum ope additio, subtractio & multiplicatio motu quorundam orbium absolvitur. Utrumque An. 1666. *Carolo* II. Regi exhibuit. Sed multo ingeniosiorem machinam Arithmeticam in juventute sua dudum invenit illustris *Leibnitius*, de qua in Miscellaneis Berolinensibus pag. 394. nonnulla leguntur. Aliam utut minus perfectam, ingeniosam tamen dedit Cl. *Joannes Polenus* in Miscellaneis Venetiis Anno 1709. in 4. (plag. 8. Tabb. 9.)

§. 16. Logisticam decimalem prolixe ac perspicue peculiari libro exposuit *Johannes Hartmannus Bayerus*, D. Medicinæ, An. 1619. Francof. ad Mœnum vernaculo idiomate in 4. edito (1. Alph. 6. plag.). Arithmeticam Logarithmicam vero optime explicuit in peculiari itidem volumine, de quo in inter scripta Trigonometrica plura dicemus, *Briggius*.

§. 17. De Arithmetica autem decimali inprimis commendari meretur libellus, quem sub Titulo: *A new and compleat Treatise of the Doctrine of fractions, vulgar and Decimal* Londini A. 1714. in 8. edidit *Samuel Cunn*, ubi omnia explicantur & exemplis illustrantur, quæ de usu fractionum decimalium tenenda sunt. Non inutilem operam sumeret, qui eundem in linguam Latinam, vel etiam Germanicam transferret. Nos theoriam harum fractionum, quantum ad praxin sufficit, exposuimus & demonstravimus Cap. 9. Elementorum Arithmeticæ. Hodie enim usus earum prorsus egregius est, ubi ex æquationibus alge-

algebraicis radices per approximationem eruendæ & ſeries infinitæ ad communem uſum aptandæ.

§. 18. Virgulas ſuas, quibus magnorum numerorum multiplicationem ac diviſionem facilitavit, *Joannes Neperus*, Baro *Merchiſtonius*, *Scotus*, in Rhabdologia (Edinburgi 1617. in 12. plag. 6.) deſcripſit. *Johannes* vero *Georgius Herwart* ab *Hohenburg*, V. J. Doct. ex Aſſeſſore ſummi tribunalis imperatorii & Cancellario ſupremo Bavariæ Ducis ejusdem conſiliarius intimus, Præſes provinciæ Schvabæ & inclytorum utriusque Bavariæ Statuum Cancellarius, Monachii A. 1610. in fol. reg. evulgavit Tabulas Arithmeticas προσθαφαιρέσεως univerſales, quarum ſubſidio numerus quilibet ex multiplicatione producendus per ſolam additionem & quotiens quilibet e diviſione eliciendus per ſolam ſubtractionem etiam ab eo, qui Arithmetices non admodum ſit gnarus, exacte & celeriter invenitur. (11. Alph. 9. plag.). *Neperum* imitatus *Samuel Reyherus*, Mathem. *Prof.* Kilonienſis, Bacillos ſexagenales Kilonii 1688. in 4. publicavit, quorum ope Logiſtica ſexagenaria facile exercetur: *de qua egimus c.* 10. *Arithmeticæ.*

## CAPUT III.

### De

# GEOMETRIA.

§. 1.

Geometria eſt vel theoretica, vel practica: theoretica vel elementaris, vel ſublimior.

§. 2. Geometriam elementarem conſcripſit *Euclides*, cujus Elementa a variis in lucem edita fuere. Textum Græcum cum verſione Latina A. 1703. Oxoniæ in fol. (7. Alph. 17. plag.) ſub titulo Ευκλείδης τὰ σωζόμενα, h. e. *Euclidis*, quæ ſuperſunt, omnia, edidit *David* *Gre-*

*Gregorius*, Aſtronomiæ Profeſſor Savilianus. Anno 1530. in priora ſex Elementa Commentarium edidit *Orontius Finæus*, in quo mentem *Euclidis* tantummodo explicat, qualem etiam A. 1557. dedit *Jacobus Peletarius*. In elementa omnia 15. commentati ſunt circa idem tempus *Nicolaus Tartaglea*, aliqua etiam de ſuo addens, & A. 1578. *Franciſcus Fluſſates Candalla*, nobilis Gallus, qui ad elementa decimum ſextum, ſeptimum & octavum de ſolidorum corporum comparatione & inſcriptionibus variis adjecit. Elementa *Euclidis* pariter ac *Fluſſatis* cum commentario prolixo edidit *Clavius*. Sæpius recuſa prodiere inter alia Franc. ad Mœn. 1654. in 8. duobus Tomis (Tom. I. 2. Alph. 4. plag. & Tom. II. 1. Alph. 20. plag.) atque etiam inter Opera ejus extant (§. 24. c. 1.) Bene quoque *Euclidem* integrum explicarunt *Dechales* (§. 4. c. 1.), *Herigonius* (§. 1. *cap. cit*), & inprimis concinna brevitate *Iſaacus Barrowius*, Matheſeos olim in Academia Cantabrigienſi Profeſſor. Sed quoniam integer *Euclides* tyronibus parum utilis; ideo complures ſex tantum priora Elementa ediderunt, & ad ſummum undecimum & duodecimum adjecerunt. Prolixum nimis foret ſingulas recenſere editiones: ſufficit eas nominaſſe, quæ præ aliis commendari merentur. In hunc ergo cenſum referimus Elementa *Euclidis* Gallica, quæ *Dechales* ſigillatim edidit, & Elementa Geometriæ planæ & ſolidæ *Andreæ Tacquet*. Præſtantiſſima illorum editio eſt Pariſina An. 1709. in 12. reg. (12. plag. Tab. æn. 16.); horum vero Cantabrigenſis An. 1703. in 8. (plag. 16. Tab. 7.), quorum illam debemus *Ozanamo*, hanc vero *Guilielmo Whiſtono*, tunc temporis Mathematum Profeſſori Cantabrigienſi. Continetur autem in Elemento VII. VIII. & IX. theoria numerorum ſeu Arithmetica elementaris: unde *Andreas Tacquet* tria hæc Elementa Arithmeticæ ſuæ inſeruit (§. 11. c. 2.). Opus hoc illuſtre inter ea eminet, quæ ex Antiquitate ad nos pervenerunt, ita ut provindentiæ divinæ tribuendum ſit, quod injuria temporum non interciderit.

§. 3. *Joannes Scheubelius*, in Academia Tubingensi *Euclidis* Professor, existimans præter institutum *Euclidis* in designandis demonstrationum momentis literarum figuras usurpari, atque hac ratione & docentibus laborem ac molestiam augeri, & discentium intelligentiam impediri, An. 1550. novo consilio elementa sex priora ita demonstravit, ut literis remotis sua unumquodque propria appellatione designarit. Prodiit opus Basileæ in fol. præmissa brevi Algebræ descriptione. (3. Alph. 5. plag.)

§. 4. Alio consilio An. 1565. *Christianus Herlinus* & *Conradus Dasypodius* demonstrationes *Euclideas* in syllogismos resolverunt: qui labor hunc usum habere potest, ut appareat, quomodo ex plurium Syllogismorum concatenatione tandem demonstratio completa enascatur. Idem opus utrique debetur ex parte. Prodiit Argentinæ An. 1506. in fol. (Alph. 2. plag. 4. cum figuris ligno incisis.). Titulus est: *Analyses Geometricæ sex librorum* Euclidis, *primi & quinti a* Christiano Herlino, *reliquæ una cum Commentariis* & *scholiis perbrevibus in eosdem sex libros Geometricos a* Conrado Dasypodio.

§. 5. Ordo *Euclidis* displicuit *Petro Ramo*, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ in Scholis Mathematicis lib. 6. & seqq. contra *Euclidem* passim disputat. Prodiere hæ Scholæ Francofurti ad Mœnum opera *Lazari Schoneri* An. 1599 in 4. (2. Alph. 17. plag.) continentes 1. exhortationem ad artes mathematicas, 2. disputationes de præcipuis quibusdam capitibus Arithmeticæ, & 3. discursus de quindecim libris *Euclidis*. Confer etiam lib. 3. p. 94. & *seqq*. *Ramus* itaque alia Geometriæ elementa conscripsit libris 27. comprehensa secundum ordinem Scholæ, a *Schonero* An. 1599. in 4. Francofurti una cum libris 2. Arithmeticæ edita & *Euclideis* prælata. Titulus libri est: Petri Rami *Arithmeticæ Libri duo*, *Geometriæ septem & viginti*, a Lazaro Schonero *recogniti & aucti* (2. Alph. 9. plag. cum figuris textui insertis.). Arithmetica magis practica, quam theoretica est, etsi theoria de ratione & proportione exemplis illustretur & ad praxin trans-

transferatur. Deficiunt tamen demonſtrationes accuratæ, quales dedit *Euclides*. Adjecit *Schonerus* de numeris figuratis librum unum & *Rami* Algebræ libros duos a ſe emendatos, atque de Logiſtica ſexagenaria librum proprium. In Geometria agitur primum de magnitudine in genere, deinde de lineis, poſtea de ſuperficiebus, tandem de Solidis. Enimvero qui primus Geometriam ad ordinem Scholæ reformare auſus eſt, ſtatim exemplo ſuo docuit (quod ſupra §. 57. *Meth. Math.* annotatum eſt) accuratam demonſtrandi methodum cum ordine Scholæ ſubſiſtere non poſſe. Etſi enim *Schonerus* teſtetur, ſe in docenda Arithmetica & Geometria P. *Rami* per multos annos verſatum, & quantum ex iis proficere liceat tyronibus experientia multiplici edoctum fuiſſe; hoc tamen non obſtat, quo minus *Euclidem* ipſum *Ramo* præferamus. Neque enim *Schonerus* methodi ac rigoris in demonſtrando; ſed tantummodo doctrinæ rationem habet, quam ex *Ramo* facilius hauriri ac memoriæ imprimi poſſe facile conceditur. Nobis vero jam ſermo eſt de methodo, quæ cum rigore demonſtrandi conſiſtit, ut plenaria adſit convictio eaque immota, quocunque tandem acumine demonſtrationem perluſtres. Hanc deſiderari in *Ramo*, nec cum eo ordine, quo doctrinas congeſſit, conſiſtere poſſe contendimus.

§. 6. Idem apparet etiam ex cœterorum ſcriptis, qui poſt *Ramum* idem conſilii ceperunt. Pertinent huc 1. Elementa Geometriæ *Ignatii Gaſtonis Pardies* e Societate Jeſu, quartum Hagæ Comitum An. 1680. in 12. (plag. 8.) recuſa & a ſumme Reverendo Abbate *Schmidio*, Helmſtadienſium Theologo celeberrimo, cum adhuc Jenæ Matheſin & Philoſophiam profiteretur, ex Gallico ſermone in Latinum translata. Extant in Opuſculis ejus mathematicis, quæ ſub titulo: *Oeuvres de Mathematique* Hagæ Comitum An. 1691. in 12. prodiere, in quibus præter hæc elementa libris 9. comprehenſa continetur Diſcurſus de motu locali, Statica & Deſcriptio duarum machinarum deſcribendis herologiis Solaribus convenientium. 2. No-

va Elementa Geometriæ *Arnaldi*, ſuppreſſo nomine, Anno 1667. Pariſiis primum edita, dein An. 1685. ibidem & An. 1690. Hagæ Comitum in 8. recuſa (plag. 21) idiomate Gallico. 3. Elementa Geometriæ Gallica R. P. *Bernhardi Lamy* An. 1685 Pariſiis in 12. primum edita & An. 1710. ibidem multo auctiora recuſa, ita ut nunc ſingulæ *Euclidis* propoſitiones, exceptis elementis ſeptimo, octavo & nono de numeris agentibus, in iisdem contineantur una cum introductione ad ſectiones Conicas (plag. 21.) 4. Elementa Geometriæ Sereniſſimi Burgundiæ Ducis Gallice conſcripta (Trevoltii 1705. in 4. reg. 1. Alph. 7. plag.) concinna brevitate maxime neceſſaria methodo *Arnaldiana* evolventia. Omittimus alia, quæ minoris ſunt momenti & ex hiſce compilata.

§. 7. Integrum quoque *Euclidem* alio ordine digeſſit & novis paſſim demonſtrationibus munivit Cl. *Petrus Polynier*, Medicus Pariſienſis, in Elementis Geometriæ, quæ una cum Elementis Arithmeticæ ſub titulo: *Elemens des Mathematiques* Pariſiis 1704. in 12. reg. (1. Alph. 4. plag.) edidit. Contra quæ ex *Euclide* cognitu minus neceſſaria ſunt, omiſit, & neceſſaria alio ordine digeſſit, aliterque ſubinde demonſtravit Cl. *Angelus de Marchettis* in Piſana Univerſitate Mathematum Profeſſor in *Euclide*, quem vocat, *Reformato* (Liburni 1709. in 4. 1. Alph. 10. plag.).

§. 8. Præter nos alii etiam Mathematici agnoverant, reformatores Elementorum *Euclidis* non fuiſſe in auſu ſuo ſatis felices; ſed *Euclidis* elementis palmam adhuc merito tribuendam eſſe. Memini hanc fuiſſe *Leibnitio* ſententiam, cum me inviſeret, dum Elementis Geometriæ concinnandis operam darem ipſique referrem, me multiplici modo tentaſſe, ut eo ordine Elementa Geometriæ digererem, quo uſus eſt *Bernhardus Lamy*, ſed nunquam hoc fieri potuiſſe, niſi quædam aſſumerem absq; demonſtratione, quæ eſſent demonſtranda, vel in demonſtrando ac definiendo admitterem confuſe tantummodo percepta. In Anglia *Joannes Keil*, ut Matheſeos Studioſos ad Elementa *Euclidis* reduceret, eo fine Oxonii A. 1715. in 8. (Alph. 1. plag.

plag. 6. cum figuris textui insertis), imprimi curavit Elementa sex priora *Euclidis* una cum decimo & undecimo ex versione *Frederici Commandini*. In præfatione, quam iisdem præmisit, graviter invehitur in eos, qui *Euclidem* carpunt, & ab ejus lectione juvenes abducunt. Addidit Elementa Trigonometriæ planæ & Sphæricæ atque Tractatum de natura & Arithmetica Logarithmorum.

§. 9. Præter ordinem, quem *Euclides* in Elementis suis tenet, multi ex antiquis pariter ac recentioribus Geometræ tres sibi visi sunt deprehendisse nævos in ejusdem Elementis, quorum primus respicit definitionem parallelarum & sub ea axioma, quod apud *Clavium* est decimum tertium libri primi, secundus definitionem sextam libri quinti, quæ est æque proportionalium & tertius definitionem quintam libri sexti de compositione rationum. Ab his nævis eum vindicare aggressus est *Hieronymus Saccherius*, Societatis Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos Professor, in Opusculo, quod sub titulo: *Euclides ab omni nævo vindicatus sive Conatus Geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ principia*, Mediolani 1733. in 4.(plag. 20. Tab.æn. 6)

§. 10. Nos equidem in Elementis hisce Matheseos non exhibuimus Elementa *Euclidis* ipsa; nihil tamen in iis occurrit, quod non reperiatur vel in Aritmetica, vel in Geometria, vel in Algebra, quemadmodum inferius fidem oculatam dabimus. Nihil vero nobis magis curæ cordique fuit, quam ut rigori demonstrandi consuleremus & demonstrationes ita componeremus, ut essent consummatæ eo sensu, quem in Logica Latina (§. 799. 854. 855.) explicamus, ad usum tamen tyronum compositæ. Et plurimorum annorum experientia abunde docuit fructum, quem inde percipere licet.

§. 11. Quæ in *Euclide* de circuli, sphæræ, & cylindri dimensione defuere; ea supplevit *Archimedes* in duobus de sphæra & cylindro libris, & de circuli dimensione libello unico: ex quibus selecta theoremata ad faciliorem tyronum intelligentiam proposuit *Tacquetus* sub finem Geometriæ supra laudatæ

 (§. 2.)

(§. 2.). Idem *Archimedes* libros alios de Spiralibus, de Conoidibus & Sphæroidibus & de Quadratura Parabolæ scripsit. Opera ejus una cum Conicis *Apollonii* & Sphæricis *Theodosii* edidit facilioribus cum demonstrationibus *Isaacus Barrowius* Londini 1675. in 4to (Opera *Archimedis* constant 24. plag. Tabb. æn. 13. *Apollonii* 14. plag. Tab. 12. & *Theodosii* plag. 6. Tab. 3.). Præter vero Geometrica in operibus *Archimedis* una continentur libri de æquiponderantibus & insidentibus humido: Arenarium tamen ejus omisit *Barrowius*, qui in alia editione una comparet, quæ Panormi A. 1685. in fol. prodiit, & cujus singularia fata in Actis Eruditorum An. 1687. p. 543. & 544. recensentur. Germanicam operum *Archimedis* versionem (libris de insidentibus humido exceptis) dedit *Joh. Christoph. Sturmius* (Norimbergæ 1670. in fol. 6. Alph. 2. plag.).

§. 12. Archimedea promovere studuit *Johannes Keplerus* in Nova Stereometria doliorum vinariorum, inprimis Austriaci (Lincii 1615. in fol. plag. 28), quæ una continet supplementum ad Archimedem de Stereometria figurarum Conoidibus & Sphæroidibus proxime succedentium. Ex Latino in Germanicum versam eandem anno sequenti edidit, sed passim mutatam, alicubi etiam practicis nonnullis auctam. Ejus exemplo excitatus *Bonaventura Cavalerius*, ordinis S. Hieronymi, olim Mathematum Professor Bononiensis (quemadmodum ipse in præfatione fatetur) adhuc ulterius progressus plurium, quam *Archimedes* & *Keplerus* solidorum per revolutionem sectionum conicarum circa axem aut rectas alias dedit nova methodo indivisibilium, quam vocat, a *Keplero* part. 1. theor. 2. Stereom. indicata, in *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Bononiæ 1653. in 4. 3. Alph. 1. plag.). Similiter *Archimedea* illustravit atque promovit *Evangelista Torricellius*, magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, in *Operibus Geometricis de Solidis sphæralibus, de motu, de dimensione parabolæ, de solido hyperbolico cum appendicibus, de cycloide & cochlea* (Florentiæ An. 1644. in 4. 2. Alph.).

§. 13. Præter ea, quæ *Archimedes* ad ſublimiorem Geometriam ſpectantia tradidit, Veteres inprimis ad eandem ſectionum conicarum doctrinam referebant, de quibus opus abſolutum 8. libris comprehenſum compoſuit *Apollonius Pergæus*, quorum quatuor priores ſæpius editi. Inter optimas editiones refertur, quam cum Commentariis prolixis An. 1655. in fol. (5. Alph. 19. plag. Tabb. æn. 30.) Antverpiæ in lucem emiſit *Claudius Richardus*, e Societate Jeſu, quales etiam in *Euclidis* Elementa 15. A. 1645. in fol. dederat integro volumine comprehenſos. Quintum, ſextum & ſeptimum, qui pro amiſſis habebantur, ex Arabico MSC. *Abalphati Aſphahanenſis* opera *Abrahami Ecchellenſis Maronitæ*, Linguarum Orientalium Profeſſoris Romani, in vertendis uſus Florentiæ 1641. in fol. (4. Alph. 21. plag.), cum libro Aſſumtorum *Archimedis* in lucem protraxit *Joh. Alphonſus Borellus*, in Academia Piſana Matheſeos Profeſſor. Antequam vero iidem prodirent, *Vincentius Viviani*, Magni Hetruriæ Ducis Mathematicus, ex deſcriptione *Pappi* librum quintum feliciter reſtituit, & ſub titulo Divinationis Geometricæ in quintum Conicorum *Apollonii Pergæi* adhuc deſideratum Florentiæ 1659. in lucem emiſit: quo ſucceſſu felici permotus ex intervallo An. 1701. addidit de locis ſecundam divinationem Geometricam in quinque libros injuria temporum amiſſos *Ariſtæi* ſenioris Geometræ (Florentiæ in fol. 3. Alph. 15. plag.). Scripta *Viviani* uſui eſſe poſſunt illis, qui methodo demonſtrandi veterum in Geometria ſublimiori delectantur. Præſtantiſſimam operum Apollonii editionem dedit Celeberrimus *Hallejus* Oxoniæ A. 1710. in fol. (5. Alph. 16. plag.). Acceſſere eidem *Sereni* libri duo de Sectione Cylindri & Coni, qui primi Græce editi & *Apollonii* liber octavus ab *Hallejo* reſtitutus.

§. 14. Inter recentiores doctrinam Conicam illuſtrarunt varii. Commendari meretur opus de Sectionibus Conicis *Claudii Mydorgii* An. 1632. Pariſiis in fol. publicatum, in quo & proprietates earundem demonſtrantur, & deſcriptiones variæ docentur. Huic præferen-

rendus *Gregorius a S. Vincentio*, e Societate Jesu, qui in Opere Geometrico Quadraturæ circuli & Sectionum Coni 10. libris comprehenso ad inventa recentiora viam stravit, ita ut *Leibnitius* in Actis Eruditorum An. 1691. p. 438. fateatur, sibi in interiori Geometria hospiti, cum opus hoc *Gregorii* a S. *Vincentio* una cum *Hugenii* libro de Horologio oscillatorio & *Dettonvillæi* (hoc est, *Pascalii*) epistolis legeret, subito affulsisse lucem & sibi & aliis inexpectatam. Prodiit opus insigne Antverpiæ 1647. in fol. (14. Alph.) & præter conica in eodem contienentur variæ linearum inter se proportiones, triangulorum novæ proprietates, rectangulorum proportiones, progressionum Geometricarum, etiam in infinitum progredientium, miræ proprietates, multa de circulo alibi minus obvia, doctrina de ductu plani in planum, de proportionalitatibus Geometricis theoria nova, ungularum item, conoidum & sphæroidum doctrina. Absolutum quoque Sectionum conicarum opus debemus industriæ *Philippi de la Hire* (Paris. An. 1685. in fol. 2. Alph. 18. plag.), in quo præter *Apolloniana* plurima alia methodo veterum demonstrantur: ex quo in gratiam tyronum compendium fecit *Jacobus Milnes* impressum Oxonii An. 1702. in 8. (12 plag. & 19. Tab. Fig.) & recusum emendatius atque auctius ibidem 1712. in 8. (15. plag. Tabb. 19.) sub titulo: *Elementa Sectionum Conicarum nova methodo demonstrata.*

§. 15. Ipse etiam celeberrimus *de la Hire* in eorundem gratiam Elementa Sectionum Conicarum Parisiis A. 1679. in 12. in lucem emisit una cum constructione locorum geometricorum & æquationum, de qua in capite subsequente. Titulus opusculi: *Nouveaux Elemens des sections coniques*, *les lieux Geometriques*, *la construction des Equations.* (plag. 21.). Similis iisdem est Tractatus *Ozanami* Gallicus de lineis primi generis, locis geometricis & constructione æquationum (Parisiis 1687. in 4. 1. Alph. 15. plag. Tab. æn. 35). Nominandus hic quoque est Tractatus de Sectionibus cylindri & Coni in solido & plano consideratis, cum demonstrationibus simplicibus ac novis,

vis, quem ſermone Gallico Pariſiis An. 1704. in 8. edidit *Poivre* ( 5. plag. & 8. Tabb. æn. ). De aliis Conicorum ſcriptoribus dicemus capite ſequente.

§. 16. Commemoranda tamen de iisdem adhuc nonnulla ſunt, quæ hic apprime locum merentur. Nimirum *Guido Grandus*, cum intelligeret, deſiderari libellum Conicorum ad captum tyronum, cujus defectu doctrina Conica in Scholis vulgo negligitur; eundem ſupplevit & methodo veterum conſcripſit libellum mole parvum, ſed rerum ubertate gravem, in quo præcipua de ſectionibus Conicis theoremata demonſtrat. Prodiit Florentiæ An. 1722. in 12. ( plag. 6½. Tabb. æn. 7. ), ſub titulo: *Compendio delle ſezioni Coniche d' Apollonio.* Quoniam hoc compendium commendari meretur Matheſeos Studioſis, *Chriſtianus Auguſtus Hauſen*, Matheſeos Profeſſor Lipſienſis, verſionem hujus opuſculi Latinam in gratiam auditorum adornaſſe dicitur in Actis Eruditorum ſupplement. Tom. VIII. ſect. X. hinc inde tamen quædam imutaſſe. Equidem *Vincentius Santini*, Florentinus, ſimile Compendium dare conatus eſt Lucæ 1722. in 8. ( plag. 6. Fig. 28. ) ſub titulo: *Delle ſezzioni Coniche dedotte nuovamente in Piano dal cherchio*, in quo nova ratione ſectiones conicas in plano a circulo deducit; ſed demonſtrationes ejus laborare circulo vitioſo jam annotarunt Collectores Actorum Eruditorum *loc. cit.* p. 432 *Nicolaus de Martino*, Regius Mathematum Profeſſor Neapoli, duobus Tomis Elementa Sectionum conicarum edidit Neapoli A. 1734. in 8. charta auguſta ( Tom. I. plag. 21½. Tabb. æn. 8. Tom. II. plag. 22. Tabb. æn. 8. ). Conſcripſerat hæc elementa ad uſum *Fauſtinæ Pignatelli*, Principis Culubranenſis & Tolvenſis Ducatus heredis; poſtea in gratiam ſtudioſæ juventutis publici juris fecit. Omiſſis propoſitionum, ſcholiorum & corollariorum titulis, continuo textu ad morem vulgarem extra Matheſin receptum cuncta demonſtrat. Præter Sectionum conicarum proprietates earum uſum in conſtruendis problematis ſolidis docet, præmiſſis iis, quæ cum in genere de conſtructionibus geometricis, tum problema-

blematorum planorum sciri debent.

§. 17. Præter Conica apud veteres in Geometria sublimiori celebre fuit Problema Deliacum de duplicando cubo, seu, quod eodem recidit (§. 626. *Anal. fin.*), de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas: quem in finem excogitatæ sunt variæ lineæ curvæ a *Pappo Alexandrino* in collectionibus Mathematicis conservatæ. Earum duo libri priores hactenus desiderantur. Sex posteriores Bononiæ 1660. in fol. editi (Alph. 5. plag. 9. cum figuris textui insertis, continent, inter alia solutiones varias problematis Deliaci, trisectionem anguli, isoperimetrorum doctrinam, sphærica nonnulla & quædam ad Mechanicam spectantia. Varia etiam scripta Geometarum veterum in præfatione ad librum sextimum recenset *Pappus*.

§. 18. Inter præcipua inventa Geometrica superioris seculi refertur methodus centrobaryca *Pauli Guldini*, e Societate Jesu, de qua diximus in Mechanica & Statica (§. 164). Prodiit ejus liber primus de centro gravitatis una cum Tabulis numerorum quadratorum & cubicorum decies millium, Viennæ Austriæ 1635. in fol. (4. Alph. 21. plag.). Accessere libri secundus, tertius & quartus A. 1640. (4. Alph. 14. plag.). Libro primo adjuncta est dissertatio de motu terræ ex mutatione centri gravitatis ipsius proveniente.

§. 19. Curvarum doctrinam universalius pertractavit & multis novis inventis auxit *Isaacus Barrowius* supra laudatus in egregio opere Lectionum Geometricarum Londini 1674. in 4. (plag. 21. Tabb. 13.). Elementa curvarum in usum tyronum hactenus desiderantur, qualia tamen prostare consultum foret.

§. 20 Alia scripta particularia ad Geometriam theoreticam spectantia nimis longum foret hic recensere. Quædam tamen recensere lubet. Pertinet huc *Christiani Hugenii* liber de circuli magnitudine, Hagæ comitum An. 1644. in 4. (plag. 5. cum figuris textui insertis) & ejusdem Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis & circuli ex dato portionum gravitatis centro Lugduni Bata-

vorum 1651. in 4. (plag. 6½ cum figuris textui insertis.). Uterque Tractatus legitur Operum variorum Tomo secundo (§. 35. c. 1.).

§. 21. Affinia his sunt *Ludolphi a Ceulen*, Hildesheimensis, de Circulo & Adscriptis liber, ex vernacula in Latinam translatus & annotationibus illustratus a *Willebrordo Snellio* (Lugd. Bat. 1619. in 4. plag. 8.) & ejusdem Fundamenta Arithmetica & Geometrica cum eorundem usu in variis problematis Geometricis partim solo linearum ductu, partim per numeros irrationales & tabulas sinuum & Algebram solutis, a *Snellio* itidem Latine versa Lugd. Bat. 1615. in 4. (1. Alph. 16. plag.)

§. 22. *Laurentius Lorenzinius*, Discipulus *Vincentii Viviani*, edidit Florentiæ An. 1721. in 4. (plag. 20. Tabb. æn. 14.) Exercitationem Geometricam, in qua agitur de dimensione omnium conicarum sectionum, curvæ parabolicæ curvæque superficiei Conoidis parabolici. Solvit more veterum per demonstrationes problemata, quæ hodie per Algebram solvi solent. Unde ejus lectio commendanda iis, qui methodum veterum sibi familiarem reddere gestiunt. Cum viginti annos in vinculis duro fato detineretur, ab omni commercio cum hominibus literatis remotus, nullius libri usu concesso, methodum istam excoluit & duodecim libros de sectionibus conicis & cylindricis eorumque solidis conscripsit, ultra *Apllonii & Viviani* inventa progressus. Ex carcere igitur tandem dimissus, ubi cognovisset, quæ nunc agerentur a Geometris, sublimiora quoque meditari cœpit, sed consueta sibi utens methodo. Sex itaque composuit Exercitationes, quarum prima est, quæ hic commemoratur, ceteræ enim, quantum constat, lucem publicam non adspexerunt.

§. 23. *Comes de Pagan*, cujus non minus in Astronomia, quam Architectura militari celebre est nomen, decem edidit libros Theorematum Geometricorum sub titulo: Les dix livres des Theoremes Geometriques du Comte de Pagan, Parisiis 1654. in 8. (1. Alph. 5. plag.), in quibus de lineis 4. proportionalibus, de sectionibus coni-

cis, de theoria planetarum elliptica, de munitionibus regularibus & de navigatione agit. Prostant etiam *Ismaelis Bullialdi* de Lineis spiralibus demonstrationes novæ (Parif. 1657. in 4. plag. 18.) & ejusdem Exercitationes Geometricæ circa demonstrationes per inscriptas & circumscriptas figuras, circa conicarum sectionum quasdam propositiones, & de porismatibus (Parif. 1657. in 4. plag. 6.).

§. 24. *Stephanus de Angelis*, *Nobilis*, Venetus, Ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, methodum *Cavalerii* excoluit, ejus usum insignem demonstraturus, cum non deessent, qui eandem impugnarent & contemnerent. Edidit Venetiis An. 1658. in 4. (Alph. 1. plag. 14, cum figuris textui insertis) Problemata Geometrica Sexaginta circa Conos, sphæras, superficies conicas sphæricasque præcipue versantia; ibidem An. 1656. in 4. Libros quatuor de infinitis parabolis infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum partiumq; earundem genitis, una cum nonnullis ad prædictarum magnitudinnm aliarumque centra gravitatis attinentibus (Alph. 2. plag. 7.). Addidit An. 1663. librum quintum (plag. 14.). Ibidem An. 1659. in 4. in lucem publicam emisit Miscellaneum hyperbolicum & parabolicum, in quo præcipue agitur de centris gravitatis hyperbolæ partium ejusdem atque nonnullorum solidorum, de quibus nunquam Geometria locuta est. Parabola noviter quadratur dupliciter, ducuntur infinitarum parabolarum tangentes, assignantur maxima inscriptibilia, minimaque circumscriptibilia infinitis parabolis, conoidibus ac semifusis parabolicis, aliaq; geometrica nova exponuntur scitu digna (Alph. 1. plag. 11.). A. 1660. ibidem prodiit ejus opusculum Geometricum de infinitorum spiralium spatiorum mensura (plag. 16.) & tandem Anno 1661. publici juris facti Tractatus de infinitarum cochlearum mensuris ac centris gravitatis (plag. 16.), & Tractat. duo de superficie Ungulæ & de Quartis Liliorum parabolicorum & cycloidalium (Alph. 1. plag. 19). Atque adeo patet, quod suo tempore Geometriam sublimiorem multum promoverit, aliisque viam ad ulteriora monstraverit.

§. 25.

§. 25. *Franciscus a Schooten*, Leydensis, in Academia Lugduno-Batava Matheseos Professor, Exercitationum mathematicarum libros quinque Lugduni Batavorum in 4. An. 1657. (Alph. 3.) edidit, in quibus habentur varia tum ad Geometriam elementarem, tum sublimiorem spectantia una cum tractatu de sectionum conicarum in plano descriptione, qui sigillatim prodiit (Lugd. Batav. 1646. in 4. plag. 17). Nimirum libro primo continetur propositionum arithmeticarum & geometricarum centuria, secundo constructio problematum simplicium geometricorum, tertio *Apollonii Pergæi* loca plana restituta, quarto organica conicarum sectionum in plano descriptio & quinto sectiones miscellaneæ triginta. Colophonis loco adjicitur *Hugenii* Tractatus de Ratiociniis in ludo aleæ, qui inter opera varia Vol. 2. legitur (§. 35. c. 1.).

§. 26. *Jacobi de Billy*, e Societate Jesu, tractatus de proportione harmonica, An. 1658. editus, in quo varia problemata ejus ope solvuntur. *Antonii Laloveræ*, e Societate Jesu, Geometria veterum promota, seu libri septem de Cycloide Tolosæ 1660. prodiere, quibus multa continentur ad Geometriam sublimiorem spectantia. Extat etiam *Ferdinandi Ernesti Comitis ab Herberstein* Diatome Circulorum seu specimen Geometricum, quo Lunularum, Curvilineorum aliorumque spatiorum propositiones demonstrat (Pragæ 1710. in 8. 1. Alph. Tab. 1.): *Vincentii Viviani* Exercitatio mathematica de formatione & mensura fornicum (Florentiæ 1692. in 4. plag. 6): *Joh. Baptistæ Palmæ* in Geometriam Exercitationes (Neapoli 1689. in 4. plag. 16.) 100. propositiones, quæ ad Geometriam elementarem pertinent, cotinentes.

§. 27. *Angelus de Marchettis*, in Pisana Universitate scientiarum mechanicarum Professor, Pistoriæ An. 1695. in 4. (plag. 14.) sermone patrio edidit Tractatum de natura rationis & proportionis nova, facili & secura methodo explicata. Titulus libelli est: *La Natura della proporzione & della proporzionalita.* In eo aliam viam ingressus est, quam *Euclides*, aliam quoque, quam alii recentiores ab

*Euclide* recedentes calcarunt. Cum intellexiſſet, eundem probari *Stephano de Angelis*, *Dominico Gulielmino*, *Franciſco Spoleti*, *collectoribus Actorum Eruditorum* in Actis An. 1696. p. 244. 245. in Latinam linguam ipſum tranſtulit: Qua data occaſione cetera quoque *Euclidis* Elementa tam plana quam ſolida in breviorem & meliorem formam redigere voluit. Unde enatum eſt opus Elementorum planorum & ſolidorum Geometriæ, quod ſub titulo: *Euclides Reformatus* prodiit & quod ſupra laudavimus (§. 7.).

§. 28. Ad libros analyticos veterum, quorum memoriam conſervavit *Pappus* in præfatione ad librum ſeptimum Collectionum mathematicarum referendi ſunt *Apollonii Pergæi* de ſectione rationis libri duo ex arabico latine verſi, & de ſectione ſpatii libri duo reſtituti ab *Edmundo Halley* ac editi Oxonii 1706. in 8. (1. Alph. 3. plag.).

§. 29. Ad Geometriam quoque ſpectat Sphæricorum doctrina, quæ circulorum in ſuperficie Sphæræ deſcriptorum & ſeſe mutuo interſecantium proprietates explicat. Eam olim tribus libris comprehendit *Theodoſius*, quos Tomo primo Curſus Mathematici exhibet *Dechales*, ut ſupra monuimus (§. 4). Eosdem nova methodo illuſtravit & ſuccincte demonſtravit *Iſaacus Barrowius* atque Londini 1675. in 4. (plag. 6. Tab. æn. 3.) edidit, ſubjunctos operibus *Archimedis* & *Apollonii*. Aliqua hujus doctrinæ etiam attingit *Pappus* libro ſeptimo collectionum mathematicarum, ubi addit, quæ in *Theodoſio* deſiderantur ſcitu neceſſaria.

§. 30. Geometriam practicam omnium abſolutiſſimam, ſed ſine demonſtrationibus dedit *Malletus*, quatuor Tomis idiomate gallico conſcriptis comprehenſam (Pariſ. 1702. in 8. reg. Tom. I. plag. 23. Tom. II. plag. 26. Tom. III. plag. 24. Tom. IV. plag. 18.). In Geodæſia declaratur uſus ſemicirculi, quadrati Geometrici, circini proportionum, Aſtrolabii, pixidis magneticæ, baculi Jacobi & menſulæ geometricæ. Singula folia Figuris elegantibus, ſed ad rem parum facientibus exornantur.

§. 31. Germanico idiomate Geometriam practicam conſcri-

psit *Daniel Schwenterus*, Professor olim Mathematum Altorfinus, cum notis *Johannis Bœckleri*, Norimbergæ 1667. in 4. (4. Alph. 18. plag.) recusam. Praxis in charta cum demonstrationibus docetur: in campo solus baculorum & mensulæ geometricæ usus ostenditur, sterometria desideratur. Unde instar supplementi esse potest *Johannis Hartmanni Beyeri*, Med. D. Stereometria, quam sub titulo: **Eine neue und schöne Art der vollkommenen Visir-Kunst**/ Franc. ad Mœn. 1603. in 4. (1. Alph. 7. plag.) edidit. Autor inprimis Stereometriam doliorum plenius explicat, quam ab aliis factum. Cum tamen doliorum non plenorum stereometriam non attigisset; A. 1619. addidit Conometriam Mauritianam vernaculo itidem sermone conscriptam. (Franc. in 4. plag. 11.), in qua stereometria doliorum tam plenorum, quam non plenorum traditur. Cæterum idem Autor de virgula pithometrica conficienda ibidem 1620. plagulam unam adjecit.

§. 32. Ante *Schwenterum* in usum agrimensorum *Bernhardus Cantzlerus* edidit tractatum geodæticum sub titulo: **Kurtzer u. leichter Bericht vom Feld-messen**/ quem *Abdias* **Trew** Mathes. Prof. Altorfinus multis annotationibus auxit, ita ut sub titulo: *Summa Geometriæ practicæ* An. 1673. Norimbergæ in 8. (plag. 33. Tab. æn. 55.) edi meruerit.

§. 33. Nomen Autoris commendat scholam agrimensorum, quam *Phil. de la Hire* sub titulo: *l' Ecole des Arpenteurs* Paris. Anno 1689. in 8. edidit. Prodiit tertia vice Parisiis Anno 1728. in 12. reg. (plag. 16.). Explicantur in hoc libello operationes arithmeticæ & trigonometricæ cum principiis Geometriæ, quibus agrimensores habent opus. Deinde exponuntur praxes Geodætarum & subjicitur descriptio artis libellandi. Nec minus laudem merentur *Clavii* (§. 24) *Tacqueti*. (§. 28.), *Ozanami* Geometriæ practicæ (§. 7.) hujusque *Methode facile pour arpenter, ou mesurer toutes sortes de superficies & pour toiser exactement la Maconnerie, les vuidanges des Terres & tous les autres corps, dont on peut avoir besoin dans la practique.* Prodiit denuo *Parisiis* 1725. in 12. reg.

reg. (plag. 12.). Explicantur etiam in hoc libello operationes arithmeticæ & trigonometricæ ac principia Geometriæ agrimensoribus scitu necessaria. Eundem cum *Philippo de la Hire* scopum sibi præfixit *Henricus Wilson* in libro Anglico, quem sub Titulo: *surveying improved* Londini 1726. in 8. reg. (Alph. 1. Tabb. æn. 11.) edidit, in suo genere satis consummatum. Solet vulgo institutionibus architecturæ militaris præmitti Geometria practica.

§. 34. *Adrianus Metius* 1725 in 4. edidit Arithmeticæ libros duos & Geometriæ libros sex. Qui multo auctiores 1650. Lugduni Batavorum in 4. recusi (Alph. 3.). Geometria nonnisi practica est, perinde ac Arithmetica, ut adeo hic recenseri mereatur. Tractatur in hisce libris etiam Trigonometria plana, usus circini & regulæ proportionalis, Architectura militaris, problemata astronomica, & sciaterica horologia, ita ut in hoc opere reperias, quæ titulus non promittere videtur, nec in libris, quæ eundem habent, vulgo quæri solent. Nullas tamen addit demonstrationes. Aliter *Joannes* Düser, Tigurinus, in Geometria Theorica & practica patrio idiomate Tigurini 1627. in 4. publicata theoriam cum praxi conjungit, & hanc ex illa deducit. Multa docet, quæ istiusmodi autores non tangunt: de stereometria tamen nihil habet.

§. 35. *A. Scharpe*, Anglus, idiomate patrio edidit Geometriam promotam 1. per tabulam amplam & accuratam segmentorum circulorum, & 2. per Tractatum concisum de Polyedris Londini An. 1718. in 4. (plag. 17. Tabb. æn. 4.). Tractatus primus sine controversia ad Geometram practicam spectat, cum computandis segmentis circulorum destinetur, qui calculus ad Geometriam practicam pertinet ac multiplicem in variis problematis huc spectantibus habet usum. Tractatus alter ad stereometriam refertur, cumque Autor in eodem constructionem & dimensionem quinque corporum regularium ac præterea duodecim novorum a Geometris hactenus non expensorum polyhedrorum tradat; hic quoque Tracta-

Tractatus Geometriæ practicæ quædam pars est.

§. 36. *Batty Langley* Londini 1726. in fol. (Alph. 1. plag. 11. Tabb. æn. 40.). Geometriam practicam ad Architecturam civilem, & hortensem, Geodæsiam & Stereometriam applicatam edidit sermone patrio. Titulus libri est: *Practicel Geometry applied to the useful Arts of Building, Surveying, Gardening and Mensuration.* Sed hic liber potiore jure inter inter Architectonicos locum meretur, quam inter eos, qui de Geometria conscripti sunt, quemadmodum suo loco monebimus.

§. 37. Pithometriam promovere aggressus est *Joannes Matthias Hasius*, Mathematum Professor in Academia Wittebergensi, in Pithometriæ Theoria & Praxi nova Wittebergæ 1728 in 4. (Plag. 10. Tabb. æn. 2): ubi etiam Algebræ in hoc argumento usum declarat.

§. 38. *Erasmus Reinholdus* in Geodæsia sua, quæ sub titulo: **Gründlicher Bericht vom Feldmessen,** Franc. 1615. in 4. (1. Alph. 17. plag.) recusa, Geometriam quoque subterraneam explicat: de qua opus peculiare conscripsit *Nicolaus* **Voigtel**, decimarum e Mansfeldensibus metallifodinis Receptor, Islebiæ An. 1688. in fol. (plag. 32. Tab. 9) excusum & itidem An. 1713. auctius (2. Alph. 10. plag. Tab. æn. 10.) recusum, unicum sane in hoc genere, donec An. 1710. *Leonhardus Christophorus Sturmius* Francofurti Anno 1710. in 8. Tractatus quatuor idiomate Germanico ederet, inter quos quartus est Geometriæ subterraneæ Compendium, primus vero de descriptione corporum regularium, secundus de Circino proportionum, tertius de Trigonometria plana (plag. 6. Tab. æn.), & An. 1727. *Joannes Fridericus Weidlerus*, Professor Mathematum Wittebergensis, Institutiones Geometriæ subterraneæ latinas daret Wittebergæ in 4. (plag. 10. Tab. 1.)

§. 39. Circinum proportionis a *Justo Byrgio* multo ante inventum descripsit *Levinus Hulsius* Tractatu tertio instrumentorum mechanicorum vernaculo idiomate Francof. ad Mœnum An. 1603. edito (plag. 4.) Postea A. 1607. *Galilæus*, alienum inventum sibi attribuens, de eodem

librum Italicum ſub titulo: *Le Operationi del compaſſo Geometrico & militari* publicavit. Omnium maxie commmendari in hoc genere meretur *Nicolai Goldmanni* de circino proportionis Tractatus (Lugd. Batav. 1679. latine & germanice in fol. (1. Alph. Tabb. 16) editus, ex quo ſua deſcripſit *Michael Scheffelt* in tractatu germanico **Unterricht von dem** *Proportional- Circul* Ulmæ 1697. in 4. (plag. 18. Tab. 12.). Proſtat quoque Tractatus Gallicus Cl. *Ozanami* de uſu circini proportionum (Pariſiis 1688. in 8.). Recentius ejus conſtructionem & uſum in peculiari Tractatu, qui multa ſingularia continet, expoſuit *Samuel Cune.* Eum poſt mortem Autoris *Edmundus Stone* ſub Titulo: *A new Treatiſſe of Conſtruction and uſe of the ſector* Londini A. 1729. in 8. (plag. 15. Tab. æn. 2. & Fig. multis ligno inciſis) publici juris fecit.

§. 40. Ad ſcripta de Geometria practica referendum quoque eſt *Caſparis Schotti* Pantometrum Kircherianum, hoc eſt, inſtrumentum Geometricum novum ab *Athanaſio Kirchero* inventum, decem libris univerſum pæne practicam Geometriam complectentibus explicatum perſpicuisque demonſtrationibus illuſtratum. Prodiit Herbipoli 1660. in 4. (Alph. 2. plag. 11. Tabb. æn. 32.). Liber primus technicus fabricam inſtrumenti, ſecundus euthymetricus linearum rectarum dimenſiones, tertius enbadometricus dimenſionem ſuperficierum, quartus ſtereometricus dimenſiones ſolidorum, ſextus cœlometricus dimenſiones concavorum, ſeptimus geodæticus diviſiones ſuperficierum, octavus metamorphoticus planorum corporumque transformationem, nonus hydragogicus libellationem aquarum totamque libellationis naturam, decimus tandem varius problematum variorum ſolutionem docet, quæ ope circini proportionum alias ſolvi ſolent.

# CAPUT IV.
## DE
# SCRIPTIS ANALYTICIS.

§. 1.

SCripta veterum analytica recenset *Pappus* in præfatione ad librum septimum collectionis mathematicæ. Sunt nempe Datorum *Euclidis* liber unus (§. 1. c. 1.) *Apollonii* de Sectione Rationis libri duo ab *Hallejo* editi, & de Sectione spatii libri duo ab eodem restituti (§. 28. c. 3.), *Apollonii* de Tactionibus libri duo, de Inclinationibus duo, de locis planis duo, Conicorum octo, *Euclidis* Porismatum tres, & de locis ad superficiem duo, *Aristæi* de locis solidis quinque, *Eratosthenis* de mediis proportionalibus duo: quorum aliqui extant (§. 13. Cap. 3.), aliqui desiderantur, sed a recentioribus Geometris restituti, (§. 1. cap. 1. & §. 13. Cap. 3.). Sed Analysis veterum ab analysi recentiorum longe fuit diversa.

§. 2. Ad analysin recentiorum potissimum spectat Algebra, de qua olim exempla tredecim libris comprehensa dedit *Diophantus*. Hodie nonnisi 6. prostant, a *Xylandro* latine versi, & An. 1575. in fol. primum editi, postea cum Commentariis *Casparis Bacheti*, An. 1621. recusi. Illustrat autem *Diophantus* artem solvendi problemata arithmetica indeterminata. Gallica eorum versio extat inter Opera *Stevini* (§. 23. c. 1.).

§. 3. Antequam *Diophantus* in publicum prostaret, *Lucas Paciolus* seu (ut vulgo vocatur) *Lucas de Burgo S. sepulchri* in summa Arithmeticæ & Geometriæ supra laudata (§. 6. cap. 2.) lib. 8. Algebram explicat, prout eam acceperat ab Arabibus. Nimirum ultra æquationes simplices & quadraticas non progreditur. Nec longius progressi sunt *Christophorus Rudolphus* Jaroviensis Silesius, qui primus de Algebra seu Cossa, prout tunc dicebatur, in lingua germanica scripsit & cujus librum ad-

ditis regularum demonstrationibus & exemplis pluribus recudi fecit *Michael Stifelius* Regiomonti An. 1553. in 4. (Alph. 5. plag. 11.). Titulus libri: Die Coss Christoffs Rudolffs, mit schönen Exempeln der Coss durch Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt, *Stifelius*, qui hoc Magistro profecit, in Arithmetica integra (§. 7. cap. 2.), *Henischius* in Arithmetica perfecta (§. 10. cap. cit.) aliique. Non ineleganter *Rudolphus* eumque secutus *Stifelius* æquationes algebraicas ex progressionibus geometricis derivant. Sed *Scipio Ferreus* addidit regulas resolvendi æquationes cubicas, a *Cardano* in Arte Magna, quam vulgo Cossam seu Regulam Algebræ vocant, An. 1545. primum publicatas; Cl. *Ludovicus Ferrariensis* ostendit methodum reducendi æquationes biquadraticas, quam An. 1579. Algebræ suæ inseruit *Raphaël Bombelli*. Ulteriores progressus Algebra stricte sic dicta nondum vidit.

§. 4. Circa annum Christi 1590. *Franciscus Vieta* Gallus arithmeticam litteralem invenit, & ad Algebram applicavit, quam & methodo ingeniosa extrahendi radices ex æquationibus quibuscunque per approximationem locupletavit. (§. 25. cap. 1.). Ejus inventa explicat iisdemque utitur *Guilielmus Oughtred*, Anglus, in Clave Mathematica, An. 1631. primum, sed An. 1693. Oxonii quinta vice edita (plag. 12). Regulas ad exempla applicat & usum Arithmeticæ litteralis in Geometria elementari ostendit, quem in inveniendis theorematis & resolvendis problematis habet. Extractionem quoque radicum per approximationem ex æquationibus exemplo *Vietæ* docet.

§. 5. *Thomas Harriot*, itidem Anglus, qui Londini An. 1621. obiit, in Artis Analyticæ Praxi ad æquationes algebraicas nova, expedita & generali methodo resolvendas, a *Walthero Warnero* An. 1631. in fol. Londini (2. Alph. 2. plag.) edita Arithmeticam *Vietæam* ad commodiorem formam reduxit, eam nempe, qua nunc utimur, & æquationum indolem ac reductionem plenius explicavit.

§. 6. A. 1637. *Cartesius* Geometriam, quam vocat, idiomate galli-

gallico publicavit, quam postea Latine vertit & prolixis Commentariis auxit *Francis. a Schooten.* Utor ego editione Amstelodamensi An. 1659. in 4. (5. Alph. 8. plag.). Continentur in eadem præter *Cartesii* Geometriam (plag. 12.) *Florimundi de Beaune* Notæ breves & *Francisci a Schooten* Commentarii in eandem; *Joh. Huddenii* epistola de reductione æquationum, ejusdem epistola de maximis & minimis. *Erasmi Bartholini* Principia Matheseos universalis seu introductio ad Geometriæ methodum *Cartesii*; *Florimundi de Beaune* tractatus posthumi de natura & constitutione atque de limitibus æquationum; *Joh. de Witt* libri duo de Elementis Curvarum, & *Franc. a Schooten* tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico. *Cartesius* Arithmeticam litteralem & regulas Algebræ descripsit ex *Harrioto*, & quemadmodum *Oughtredus* in Clave, atque *Marinus Ghetaldus* in Libris 5. de Resolutione & Compositione mathematica (Romæ 1630. in fol. 2. Alph. 15. plag.) arithmeticam *Vietæam* ad Geometriam elementarem applicarunt & constructiones æquationum simplicium ac quadraticarum dederunt, ita ipse *Harrioteam* ad Geometriam sublimiorem trarsferens curvarum naturam per æquationes algebraicas explicare cœpit & constructionem Cubicarum atque biquadraticarum æquationum, immo etiam supriorum, docuit. Opus hoc inprimis utile ad Algebram speciosam addiscendam.

§. 7. *Cartesius* non tyronibus, sed Geometris peritis scripsit, nimis concisa brevitate, ut adeo Commentario maxime opus sit. Quamvis vero de ejus Geometria egregie meritus sit *Franciscus a Schooten*, quemadmodum ex iis intelligitur, quæ modo diximus (§. 6.); nondum tamen ea dedit, quæ in Commentario consummato quæruntur, sed ipse potius Commentatore haud raro opus habet. Dedit tandem istiusmodi Commentarium, qualis desiderari poterat *Claudius Rabuel*, e Societate Jesu, qui post fata ejus Lugduni Gallorum sub titulo: *Commentaires sur la Geometrie de Mr. Descartes* An. 1730. in 4. reg.

 pro-

prodiit (Alph. 3. plag. 6. Tabb. æn. 23. Textum *Cartesii*, quem presso pede sequitur, ita explanat, atque ita regulis, exemplis, & problematis illustrat, ut nihil occurrat, quod ex Commentario non plene intelligatur. Commentarius hic in linguam latinam transferri & in nova editione Geometriæ *Cartesii* commentatoribus regulis adjungi mereretur: sit ita quod solus sufficiat menti tanti Geometræ penitus intelligendæ.

§. 8. Regulam *Cartesii* construendi æquationes cubicas & biquadraticas uberius exposuit *Thomas Baker* in Clave geometrica catholica (Londini 1684. in 4. (1. Alph. 10. plag. 10. Tab. æn.): ast verum harum Constructionum fundamentum, quod a *Menechmo* didicit *Cartesius*, minime assecutus. Hoc monstravit *Renatus Slusius* Tomo secundo Mesolabi An. 1668. in 4. (plag. 24.) Leodii excusi cum variis Miscellaneis, in quibus algebra ad quadraturas Curvarum, ad quæstiones de maximis & minimis, ad methodum inveniendi punctum flexus contrarii, ad methodum centrobarycam *Guldini* &c. applicatur. Cartesiana inventa etiam promoverunt quemadmodum *Slusius* in Miscellaneis, *Fermatius* in Operibus mathematicis (Tolosæ 1679. in fol.), *Robervallius* (§. 31. 37. c. 1.). & *Barrowius* (§. 19. cap. 3.).

§. 9. *Johannes Kersey*, An. 1671. Londini in fol. edidit Elementa Algebræ Idiomate anglico (Alph. 10. plag. 10.). In iis explicatur arithmetica litteralis & æquationum natura, præceptaque exemplis plurimis illustrantur: Totus *Diophantus* enucleatur, & resolutione & compositione mathematica ex *Gethaldo* multa exhibentur. Idem fere institutum apud Gallos fuit *Joh. Prestet*, cujus nova Matheseos elementa Tomo integro secundo auctiora Parisiis 1694. in 4. (6. Alph. 3. plag.) gallice prodierunt. In iis omnia dogmata arithmetica una cum problematibus *Diophanti* atque *Vietæ* per analysin recentiorem resolvuntur.

§. 10. Similiter *Ozanam* in Elementis gallicis Algebræ (Amstelodami An. 1703. in 8. reg. 1. Alph. 21. plag.) præter calculum littteralem & æquationum dorctinam, artem quoque Dio-

Diophanteam resolvendi problemata numerica egregie illustrat, in qua inprimis excellit hic Autor. Quanti autem fieri debeat analysis *Diophantea*, vulgo a *Cartesianis* neglecta, docuit illustris *Leibnitius* in Actis Eruditorum. A. 1702. p. 219. Etsi autem Algebra *Ozanami* legi mereatur ab iis, qui in Analysi *Diophantea* sese exercere voluerint; tyronibus tamen Algebræ ejus lectio commendanda non est, propterea quod nimis diffusa regularum explicatione nulla regularum applicatione, ad exempla facta, nimis diu detinet lectorem in parte prima, facitque studii hujus in ipso limine desertores, ut taceam ipsum inventorum recentiorum minime gnarum multa brevius tradere potuisse, ita ut & facilius intelligerentur, & sine tædio. Peccat etiam prolixa præceptorum explicatione *Prestetus*: Unde Compendium *ejus* dedit *Bernhardus Lamy*, quod sub titulo: Elemens de Mathematique, *Paris.* A 1704. in 12. reg. (1. Alph. 7. plag.) auctius recusum tyronibus ob perspicuitatem commendari meretur. Artificia tamen analyseos *Diophanteæ* non attingit.

§. 11. Hi tamen autores applicationem Algebræ ad Geometriam insuper habent: quem defectum supplent *Ozanam* in Tractatu Gallico de locis Geometricis (plag. 8. Tab. 12.) & altero de constructione æquationum (plag. 12. Tab. 9.) Tractatui de lineis primi generis (§. 15. cap. 3.) subjuncto; *de la Hire* in gemino Tractatu ejusdem nominis & argumenti (§. *cit.* c. 3.) & inprimis *Guisnée* in Applicatione Algebræ ad Geometriam gallice Parisiis A. 1704. in 4. (1. Alph. 19. plag. Tab. æn. 6.) edita & ad captum tyronum composita exemplisque selectis instructa, atque Illustris Marchio *de l' Hospital* in egregio Tractatu Analytico de sectionibus Conicis & eorum usu Paris. 1707. in 4. reg. 2. Alph. 12½. plag. Tab. 32. Gall.) Applicatio Algebræ ad Geometriam sublimiorem ex *Hospitaliano* opere omnium optime addiscere licet iis, qui jam in Geometria & Algebra cum fructu versati & acumine pollent. Ceteris magis satisfaciet *Guisnée*, quo lecto faciliores facient in illo progressus.

§. 12. Algebræ quoque præcepta, ſed ſine exemplis, perſpicue explicat *Gerard Kinckhuyſen* in Algebra ſermone batavo Harlemi An. 1661. in 4. edita, (plag. 14.) & idem in Fundamento Geometriæ (*Grondt der Meetkonſt.*) Harlemi An. 1684. in 4. plag. 12.) Sectionum conicarum palmarias proprietates per analyſin eruit; in Geometria vero (Harlemi An. 1663. in 4. plag. 22.) conſtructiones Geometricas problematum per Algebram ſolutorum elegantes affert. Singula quoque *Abrahamus de Graaf.* in Algebra ſua (§. 7. c. 1.) cum laude exequitur. Unde Dn. de *Tſhirnhauſen* ad ſtudium Algebræ plurimum commendavit hoſce autores. Celeberrimus *Newtonus* in Arithmetica univerſali, quam *Guil. Whiſton* Cantabrigiæ Anno 1707. in 8. (1. Alph.) edidit, exempla habet ſingularia & regulas varias a ſe inventas. Recuſa ſunt hæc elementa Londini An. 1722. in 8. (plag. 22.). In nova editione ordo problematum paulisper immutatus, *Whiſtoni* præfatio & methodus *Hallejana* extrahendi radices ex æquationibus per approximationem omiſſæ. Prodiere etiam in Batavia, ut nunc facilius haberi poſſint. Utilem tyronibus operam ſumeret, qui eadem Commentario illuſtraret. Multa enim occurrunt difficilia, quorum rationes non facile aſſequi licet etiam exercitatioribus. Deſunt etiam conſtructiones geometricæ problematum, quorum tantummodo dantur ſolutiones per calculum. Monuit jam *Graveſandius* iſtiusmodi Commentario eſſe opus & ejus aliquod ſpecimen de inventione diviſorum dedit in Elementis Matheſeos univerſalis Lugduni Batavorum An. 1727. in 8. editis (plag. 16. Tabb. æn. 4), quæ Algebræ principia continent.

§ 13. *Joſephus Raphſon* in Analyſi æquationum univerſali, quæ (ſi titulo credimus) ſecunda vice Londini An. 1702. in 4. prodiit una cum Conamine metaphyſico de Spatio reali ſeu ente infinito (plag. 20.) extractationes radicum ex æquationibus per approximationem facilitavit: *Rollius* in Tractatu gallico de Algebra (Pariſ. 1690. in 4. plag. 12.) ſubſidia non contemnenda ad radicum extractionem ſuppeditat, ſed more ſuo termi-

terminis insvetis utitur, & haud raro nodum in scirpo quærit. Tractatum quoque Gallicum de Algebra conscripsit *de Crouzas*, quem Parisiis Anno 1726. in 8. reg. sub titulo: *Traité de l' Algebre* edidit (1. Alph. 8. plag.). In eo nonnisi Arithmeticam literalem & regulam Algebram propriissime sic dictam explicat, quemadmodum faciunt *Prestetus* & *Ozanamus*, nimium prolixus in vulgaribus, ita ut longo tempore multa patientia addiscenda sint, quorum usum prospicere non licet. Desunt artificia recentiora, quibus calculus præsertim surdorum & extractio radicum mirifice fuit promota. Nec ars exercetur problematis contra illud *Senecæ*: Iter longum per præcepta, breve per exempla.

§. 14. Exemplo *Pascalii* in Triangulo Arithmetico Parisiis An. 1654. Gallice edito, *Hugenii* in Tractatu de Ludo aleæ, qui sub finem Exercitationum Geometricarum *Schootenii* (§. 25.) & Operum variorum Vol. 2. (§. 35.) legitur, aliorumque *Remundus de Monmort* in Tentamine Gallico Analyseos de ludis eventus fortuiti Parisiis An. 1708. in 4. reg. (1. Alph. 14. plag.) excuso & ibidem 1714. auctius (2. Alph. 11. plag.) recuso ad Sortem in ludis diversis determinandam analysin applicavit: qui combinationum doctrinam egregie illustrat & insignia artificia analytica edocet. In altera editione leguntur literæ *Joannis* & *Nicolai Bernoulliorum* de hoc argumento ad Autorem datæ. Idem præstitit *Jacobus Bernoulli* in opere posthumo Artis Conjectandi (Basil. 1713. in 4. Alph. 1. plag. 20. Tab. 1.) Accessit huic operi Tractatus de seriebus infinitis, mox commendandus. Inprimis autem hoc in argumento commendari meretur *Abrahami de Moivre* opus pereruditum & multa nova continens, quod sub titulo: *The doctrine of chances, or a Method of calculating probability of Events in play* Londini 17. in 4. reg. (Alph. 1.).

§. 15. *Ægidius Franciscus de Gottignes*, e Societate Jesu, in Logistica universali (Neap. An. 1687. in fol. 5. Alph. 14. plag. Tab. 5.) principia Algebræ labefactare aggressus est; sed nodum in scirpo quærit & per ambages eo tendit, quo recta pertingere datur. Condonondum hoc videbatur ea ætate, qua

qua Algebræ ſpecioſæ infantia erat: ſed ſi noſtra reperiantur, qui in dubitationem adducere volunt, quæ dudum ſtabilita ipſoque diuturno uſu probata fuerunt, vix ferendum. Noſtrum igitur non eſſe exiſtimamus de iis ſcriptis loqui, quæ hic recenſeri poterant.

§. 16. *Hugo de Omerique* in Analyſi Geometrica (Gadibus Anno 1968. in 4.) methodo communi algebraica, quæ per æquationes procedit, aliud ſubſtituit per rationes argumentandi genus: quod tamen non adeo late patet, quam illa. Applicat illud ad problemata, per Algebram ab aliis jam ſoluta & parum difficultatis habentia. Non tamen uſu ſuo caret, cum ad demonſtrationes ſyntheticas manu ducat. Monet *Pemberton* in præfatione ad Conſpectum Philoſophiæ Newtonianæ, *Newtonum* laudaſſe in hoc autore, quod Analyſin veterum reſtituere conatus fuerit.

§. 17. Methodum *Cavallerii* ad calculum aptare ſtuduit *Johannes Wallisius* in Arithmetica infinitorum An. 1655. primum edita (§. 34. c. 1.) in qua per ſummationes ſerierum infinitarum quadraturas curvarum & cubationes ſolidorum determinare agreſſus eſt: Sed cum inductione uteretur, quæ minus demonſtrativa videri poterat, *Ism. Bullialdus* per maximas ambages more veterum Geometrarum hoc arithmeticæ genus demonſtravit in Opere novo Arithmeticam infinitorum libris 6. comprehenſo. (Pariſ. An. 1682. in fol. 4. Alph. 16. plag.). Hodie tamen paucis lineis plura præſtare licet, quam quæ integro opere *Bullialdi* comprehenduntur.

§. 18. Veram viam ingreſſus non eſt *Wallisius*, felicius id præſtitit Illuſtris *Leibnitius* invento calculo differentiali & integrali, quem primum in Actis Eruditorum An. 1684. p. 467. publicavit, cum dudum ante 1677. eundem in litteris cum celeberrimo *Newtono* communicaſſet, qui in egregias methodos circa idem tempus inciderat: quemadmodum apparet ex litteris *Leibnitii* atque *Newtoni*, quæ leguntur apud *Wallisium* Operum Tomo tertio, fol. 634. 648. Cum enim *Newtonus* in literis d. 24. Octobr. 1676. ſcriberet: *inverſa de Tangentibus problemata ſunt in poteſtate atque illis difſici-*

*ficiliora: ad quæ solvenda usus sum duplici methodo, una concinniori, altera generaliori. Utramque visum est in præsentia litteris transpositis consignare*: Saccdiofh &c. Literæ in ordinem suum dispositæ hunc habent sensum: *Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumtione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis ad inveniendos terminos assumtæ Seriei*: mox *Leibnitius* ipsum Calculum suum differentialem in literis d. 21. Jun. 1677. apertis verbis perscripsit. Ingenue hoc ipsum fatetur *Newtonus* in prima & secunda editione Principiorum Philosophiæ naturalis Mathematicorum *schol. Lemmat. 2. lib. 2. p.* 253. 254. In ultima vero ingenuam confessionem, quæ viros summos maxime decet, omisit. Ratio patebit inferius. *Leibnitius* calculum suum publici juris fecit in Actis Eruditorum An. 1684. p. 467. & *Newtonus* methodum suam in prima editione Principiorum modo laudatorum, quæ An. 1687. prodiit. Postea *Jacobi* ac inprimis *Joannis Bernoulli* opera calculus *Leibnitii* ad majorem perfectionem perductus.

§. 19. Calculi differentialis leges exposuit & problematibus exquisitis illustravit illustris Marchio *de l' Hospital* Præceptore usus *Joanne Bernoulli* in egregio Opere Gallico Analyseos infinite parvorum (Paris. 1696. in 4. reg. 1. Alph. 2. plag. Tab. 11.), omnibus Geometriæ sublimioris Studiosis maximopere commendando. Subinde tamen Commentatore opus habet, ut a tyronibus Geometriæ sublimioris intelligatur. Equidem *de Crouzas* Commentarium edidit, qui idiomate gallico Parisiis An. 1721. in 4. (2. Alph. $1\frac{1}{2}$. plag. 4. Tab.); sed plerumque nonnisi calculos, quos Autor contraxit, extendit, in difficilioribus vero lectorem destituit. Unde magis satisfaciet *Varignonius* in suis dilucidationibus, quæ sub titulo: *Eclaircissements sur l' Analyse des infiniments petits* post fata ipsius Parisiis An. 1725. in 4. (plag. 16. Tabb. 6.) prodierunt. Opus egregium *Hospitalis* anglice vertit

tit & altera parte de calculo integrali auxit *E. Stone* ac ſub titulo: *A Method of fluxions both direct and inverſe* Londini 1730. in 8. reg. ( 1. Alph. 6. plag. Tabb. 15. ) edidit.

§. 20. Equidem *Hoſpitalius* addere conſtituerat partem alteram de calculo integrali; ſed cum *Leibnitius* ſcientiam infiniti dare ſibi propoſuiſſet, a propoſito ſuo deſtitit. Enimvero præter ſpecimina in Actis Eruditorum An. 1702. & An. 1703. nihil ejus publice comparuit. Interea calculi integralis faciliores regulas dare & exemplis illuſtrare conſultum exiſtmabat *Carré*, cujus ſcriptum gallicum: *Methode pour la meſure des ſurfaces, la dimenſion des ſolides, leurs centres de peſanteur, de percuſſion & d' oſcillation par l' application du calcul integral* prodiit Pariſ. An. 1700. in 4. reg. (plag. 15. Tabb. 4.). Sed longius progreſſus *Gabriel Manfredius* in Opere eximio de conſtructione æquationum differentialium primi gradus ( Bononiæ A. 1707. in 4. 1. Alph. 2. plag. Tabb. 7.) & vir ſummus *Newtonus* in Tractatu de quadraturis Curvarum, qui Opticæ ſubjungitur, præclara dedit. Plura quoque in parte altera dedit *Stone* de hoc calculo, quam quæ in Methodo DN. *Carré* leguntur.

§. 21. Poſtquam *Nicolaus Mercator*, Holſatus, in Logarithmotechnia (Lond. 1668. in 4. cum *Michaëlis Angeli Riccii* Exercitatione Geometrica edita) prop. 17. p. 31. ſeqq. quadraturam hyperbolæ per ſeriem infinitam dediſſet; ſerierum doctrinam per extractionem radicum inſigniter promovit & ad curvarum quadraturas & rectificationes applicavit vir ſummus *Iſaacus Newtonus:* cujus Analyſin per quantitatum ſeries, fluxiones ac differentias cum enumeratione linearum tertii ordinis, varios tractatus analyticos a viro celeberrimo diu ante compoſitos continentem, Londini 1711. in 4. ( plag. 16. Tabb. 2 ) edidit *Guil. Jones*. Quemadmodum vero hoc opus ad ſerierum doctrinam perdiſcendam multum commendari meretur; ita recondita de hoc argumento ſuperaddi debent ex celeberrimi *Bernoullii* diſſertationibus de ſeriebus infinitis ( §. 14.).

§. 22. Serierum doctrinam ex inventis *Mercatoris*, *Newtoni*, *Leib-*

*Leibnitii* atque *Johannis Bernoulli* exhibuit quoque *Georgius Cheynæus* in Methodo Fluxionum inversa (Londini 1703. in 4. reg. plag. 6.). Multo vero ante methodum serierum *Mercatoris* & *Newtoni* multis exemplis illustravit *David Gregorius* in Exercitatione geometrica de dimensione figuram Edinburgi An. 1684. in 4. edita (plag. 7. Tabb. 1.). Horum exempla complura computata sunt a patruo ipsius *Jacobo Gregorio*, quemadmodum ipse fatetur p. 2. 3. & 4. De Geometria enim sublimiore optime meritus *Jacobus Gregorius*, quemadmodum ex ejus Libro de vera Circuli & Hyperlolæ Quadratura cum Geometriæ parte universali, quantitatum curvarum transmutationi inserviente colligitur. Prodiit Patavii 1668. in 4. Tractatus de Quadratura constat plag. 8. Appendix de Geometriæ parte universali plag. 19. Ceterum hinc perspicere licet, quid ab eo expectandum fuisset, nisi fata propositum ejus intervertissent.

§. 23. *Joan. Craige*, Scotus, 1685. Londini in 4. (plag. 6. Tab. I.) edidit Tractatum de Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi & A. 1693. addidit Tractatum de figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis Geometricis, Londini in 4. (plag. 11. Tab. I.) excusum. Utitur equidem calculo differentiali *Leibnitii*, cum in Anglia calculus fluxionum adhuc ignoraretur, nec editis A. 1687. Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis *Newtoni* ullus Geometra de eodem cogitaret; per ambages tamen adhuc incedit, quod calculus integralis seu summatorius nondum ipsi esset perspectus. In quadrandis igitur curvis utitur Theorematis *Barrowianis*, quibus opus non habemus, si calculi differentialis vis fuerit perspecta, cujus pars quædam est summatorius seu integralis, qui dicitur. Inde est, quod etiam *Gregorius* alia via incedat, etsi seriebus infinitis utatur. De Locis Geometricis formulas generales tradit *Craigius*, quas *Hospitalius* in opere analytico de sectionibus conicis (§ 10.) uberius explicavit & illustravit, & nos in Elementis Algebræ dilucidatas ad facillimam intelligentiam

tiam reduximus, via ad ulteriora planissima strata. Enimvero ubi calculus integralis, quem Angli methodum fluxionum inversam vocant, in Anglia quoque invaluisset; idem *Craigius* Londini An. 1718. in 4. (plag. $12\frac{1}{2}$.) Libros duos de Calculo fluentium & totidem de Optica analytica edidit, quorum istis doctrinam de Quadraturis Curvarum promovet.

§. 24. Quæ apud *Hospitalium* in Analysi infinite parvorum, *Carresium*, sive *Quadratum*, *Cheynæum*, *Gregorium & Craigium* in Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi & in Tractatu de Quadraturis figurarum Curvilinearum occurrunt; ea in unum volumen congessit & perspicue explicavit, varia etiam problemata, quorum solutiones in Actis Eruditorum Lipsiensibus extant, inprimis quæ in iisdem *Leibnitius* de motuum cœlestium causis physicis dedit, illustravit *Carolus Hayes* in opere anglico, quod sub titulo *Traitise of Fluxions or introduction to mathematical and mechanical Philosophy* Londini 1704. in fol. (3. Alph. 3. plag.) prodiit.

§. 25. Regulas Algebræ Communis atque Analyseos *Leibnitianæ*, hoc est, calculi differentialis & summatorii uno opere complexus est *Carolus Reynau*, quod sub titulo: *Analyse demonstrée* Paris. 1708. in 4. reg. (Alph. 5. plag. 7. Tabb. æn. 5.): sed in exemplis parcior videri poterat, quam ut tyronibus inservire posset, provectioribus tamen commendandus. Neque etiam ea præstitisse videtur, quæ titulus promittit, cum eas demonstrationes in hoc Opere non reperias, quæ forsan in eodem quæsiveris demonstrationis notionem distinctam animo complexus.

§. 26. Calculus fluxionum, qui cum differentiali & summatorio idem est, in Anglia primum comparuit, cum *Isaacus Newtonus* Opticam suam ederet An. 1704. de qua suo loco dicemus. Addidit enim præter Enumerationem Linearum tertii Ordinis seu curvarum secundi generis Tractatum de Quadratura curvarum, in quo hanc doctrinam plurimum promovit, & calculum hunc explicat ea-

 demque

demque utitur. Ex intervallo *Guilielmus Jones* Londini Anno 1711. in 4. plag. 16. Tab. 2. edidit *Newtoni* Analysin per quantitatum series, fluxiones ac differentias cum enumeratione linearum tertii ordinis, ex quo apparet, quid *Newtonus* in Geometria sublimiori per analysin promota præstiterit, & quantum serierum doctrinam promoverit. Cum vero in tractatu de enumeratione linearum tertii ordinis demonstrationes desiderarentur; hunc defectum supplevit *Jacobus Stirling* in Illustratione Tractatus D. *Newtoni* de Enumeratione linearum tertii Ordinis, quæ Oxoniæ A. 1717. in 8. (plag. 9½.) lucem adspexit & multa præclara continet.

§. 27. Haud ita pridem, nimirum An. 1736. *Johannes Colson* Methodum fluxionum & infinitarum serierum *Newtoni* in sermonem anglicum translatam edidit Londini in 4. sub titulo: *The Method of fluxions and infinite series, With its application to the Geometry of curve-lines.* (Alph. 2.). Tractatus hic idem est, quem publico An. 1728. in præfatione ad Conspectum Philosophiæ *Newtonianæ* promiserat *Pemberton.* Egregio Commentario librum hunc illustravit Editor, qui maximam operis partem complet & multa offert, quæ Analyseos cultores alibi frustra quærunt. Ipse *Newtonus* docet, quomodo æquationes in series infinitas resolvantur, quomodo fluentium fluxiones seu quantitatum variabilium differentialia & ex fluxionibus fluentes seu differentialium summæ inveniantur, & per methodum fluxionum maxima & minina, tangentes, quadraturæ & rectificationes curvarum determinentur. Ubi simul ostenditur, quomodo curvæ quadrabiles detegantur, curvæ cum sectionibus conicis comparabiles investigentur, curvæ rectificabiles inveniantur & quæ sunt alia hujus generis.

§. 28. Anno 1730. *Jacobus Stirling* Londini in 4. charta augusta (Alph. 1. plag. 15.) edidit Methodum differentialem sive Tractatum de Summatione & interpolatione serierum infinitarum. In eo potissimum docet, quibus artificiis assequamur valores illarum curvarum, quæ summari nequeunt, ut habeatur

tur

tur ſolutio illorum problematum, quæ ex quadraturis pendent. Non modo inventa aliorum exponit, verum etiam propriis hanc doctrinam plurimum promovit, ut adeo opus inſigne ſublimioris Matheſeos ſtudioſis ſummopere ſit commendandum.

§. 29. Commendanda hic quoque ſunt *Abrahami de Moivre* Miſcellanea analytica de ſeriebus & Quadraturis, quæ eodem anno Londini in 4. reg. (Alph. 1. plag. 9.) prodiere. Acceſſere variæ conſiderationes de Methodis comparationum, combinationum & differentiarum, ſolutiones difficiliorum aliquot problematum ad ſortem ſpectantium, itemque conſtructiones faciles orbium Planetarum, una cum determinatione maximarum & minimarum mutationum, quæ in motibus corporum cœleſtium occurrunt. Multa in hiſce Miſcellaneis occurrunt, quibus non modo ſerierum doctrina, verum etiam menſura ſortis & alia ad Matheſin ſublimiorem ſpectantia capita promoventur.

§. 30. Quæ *Newtonus* in Tractatu de Quadraturis curvarum dederat, alia methodo inveſtigare docuit *Rogerus Coteſius*, Profeſſor Aſtronomiæ & Experimentalis Philoſophiæ apud Cantabrigienſes, in Harmonia Menſurarum ſive Analyſi & Syntheſi per rationum & angulorum menſuras promota, quam cum aliis ejusdem opuſculis Mathematicis ejus ſucceſſor *Robertus Schmith* Cantabrigiæ An. 1722. in 4. (plag. 50. Tab. I.) poſt mortem ejus præmaturam edidit. Potiſſimum ipſi propoſitum eſt dare *Logometriam*, quam vocat, qua ſcilicet per Logarithmos, ſinus atque tangentes inveſtigantur, quæ hactenus ad Quadraturam circuli & hyperbolæ fuerunt reducta, differentialium ſummatione ad menſuras rationum & angulorum reducta. In operibus Miſcellaneis Æſtimatio errorum in mixta Matheſi per variationes partium Trianguli plani & ſphærici, qualia theoremata dedimus in Trigonometria plana, Tractatus de Methodo differentiali *Nevvtoniana*, quem multo ante ab eo conſcriptum dicit Autor, quam a *Joneſio Nevvtoni* de eodem argumento Tractatus in Analyſis ſuperius commendata (§. 2.)

(§. 2. ) ederetur, Canonotechnia sive constructio Tabularum per differentias & Tractatus de Descensu gravium, de motu pendulorum in Cycloide & de Motu projectorum. Quomodo inventa *Cotesiana* ex *Nevvtonianis* deducantur, docet Anonymus in Epistola ad Amicum de *Cotesii* inventis Londini eodem adhuc Anno in 4. edita (plag. 13.).

§. 31. *Leibuitius* calculum differentialem & summatorium primum exercuerat in quantitatibus finitis, veluti in summandis potentiis numerorum, & deinde lecto opere *Hugeniano* de horologio oscillatorio & opere Conico *Gregorii a S. Vincentio* ad quantitates infinite parvas applicavit, atque sic via vere analytica in calculum differentialem & summatorium seu integralem incidit, quali hodie in Geometria sublimiori utimur. In Anglia eundem calculum seu methodum fluxionum stylo Anglicano ad quantitates finitas applicavit *Brook Taylor* in Methodo incrementorum directa & inversa, quæ Londini 1715. in 4. ( plag. 15½. ) prodiit. De obscuritate, qua in scribendo usus Autor, publice conquestus est *Joannes Bernoulli*, ut adeo mirari desinant lectores in sublimioribus nondum satis versati, siquidem hinc inde hæsitent. Continentur tamen in hoc opere lectu digna.

§. 32. Integram Mathesin puram una cum Algebra & calculo differentiali succincte explicavit *Wilhelmus Jones* in Synopsi palmariorum Matheseos, Anglice Anno 1706. Londini in 8. ( plag. 20. ) edita; sed sine interprete a tyronibus vix intelligetur, qui tamen hoc duce commode utuntur in repetendis iis, quæ ex aliis Autoribus didicere. In iis, quæ ad Algebram communem spectant, cum hac Synopsi convenit Tractatus de Algebra itidem Anglice scriptus & Londini 1717. in 8. reg. editus ( plag. 15. ) a *Ronaynio*: recentior enim analysis in eo desideratur, & methodus Tangentium atque de maximis & minimis per methodum exhaustionum illustratur.

§. 33. Equidem *Bernhardus Nieuvventiit* in Considerationibus circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicatæ principia & calculi differentialis u-

ſum in reſolvendis problematibus Geometricis (Amſtel. 1694. in 8. plag. 3.) & in Conſiderationibus ſecundis circa calculi differentialis principia (Amſtel. An. 1696. in 8. plag. 3.) contra calculum differentialem nonnulla dubia movit, & hinc in Analyſi Infinitorum (Amſtelod. A. 1695. in 8. plag. 20. Tab. 21.) methodum aliam ſubſtituit; ſed non modo *Leibnitius* atque *Bernoullius* in Actis Eruditorum A. 1695. p. 310. & ſeqq. it. p. 369. & ſeqq. & An. 1697. p. 125. & ſeqq. verum etiam Cl. *Jacobus Hermannus*, nunc Mathematum Profeſſor Francofurtanus, in Reſponſione ad illas conſiderationes ſecundas Baſileæ A. 1700. in 8. (plag. 4.) iisdem abunde ſatisfecerunt, quamvis memini, quod hic *Leibnitio* non ex aſſe ſatisfecerit, quod quantitates infinite parvas tanquam entia realia conſideret, cum tamen non ſint niſi modus loquendi, qui exhibet ſtylo *Jungiano* toleranter vera, quemadmodum clariſſime docui in Ontologia, in qua realia ab imaginariis ubivis diſcrevi. Analyſi tamen infinitorum *Nieuwentiitiana* in rem ſuam uti norunt intelligentes. *Bernhardus de Fontenelle*, Academiæ Regiæ ſcientiarum, quæ Pariſiis floret, Secretarius, idiomate patrio An. 1727. Pariſiis in 4. reg. (Alph. 3. plag. 3. Tab. I.) edidit Elementa Geometriæ infinitorum (*Elemes de la Geometrie des infinis*), in quo potiſſimum ſibi propoſitum habet, ut calculos hodie receptos ex ipſa notione infiniti deducat. Conſiderat vero, quemadmodum omnibus fere Mathematicis ſolenne eſt, infinite magnum & infinite parvum Mathematicorum per modum entis realis. Satisfacere intendit theoria ſua iis, quibus Analyſis infinitorum moderna ſuſpecta videtur, ut adeo hic loci commemorari debuerit hoc opus.

§. 34. In Actis Philoſophicis Anglicanis pro menſibus Septembri & Octobri Anno 1708. editis ſcripſerat *Johannes Keill*, inventorem Arithmeticæ fluxionum ſine omni dubio primum eſſe *Nevvtonum*, eandem tamen poſtea mutatis nomine & notationis modo editam eſſe a *Leibnitio* in Actis Eruditorum. *Leibnitius*, cui hæc Acta miſerat Cl. *Sloane*, tum Societatis Regalis

Secretarius, in literis d. 4. Martii An. 1711. datis de injuria sibi illata conquestus desiderabat, ut *Keillius* publice testaretur, non fuisse sibi animum *Leibnitio* imputandi, quasi alienum inventum sibi attribuerit. Enimvero *Keillius* in epistola ad eundem *Sloanium* data, quæ primum scripserat defendit & ostendere conatur, quomodo ex *Nevvtonianis* sua deduxerit. Cum candorem suum jam apertius, quam ante oppugnari existimaret *Leibnitius*, sibique parum convenire arbitraretur, ut provectiori ætate post tot documenta vitæ eum apologia defenderet; in literis ad *Sloanium* d. 29. Decembris An. 1711. datis æquitati Societatis committebat, annon coërcendæ sint vanæ & injustæ vociferationes, quas ipsi *Nevvtono* improbari putabat confisus eundem sententiæ suæ libenter daturum indicia. Jussit Societas monumenta antiquiora consuli & sociis aliquot in mandatis dedit, ut in eam rem inquirerent & quæ in scriptis antiquis invenirent ad eam una cum sententia sua referrent. Hi pronunciarunt, *Nevvtonum* esse primum inventorem, nec *Keillium* inventum eidem vindicantem injuriam fecisse *Leibnitio*. Jussu adeo Societatis Regiæ in lucem editum est Londini 1712. in 4. (plag. 15½.) Commercium epistolicum D. *Johannis Collins* & aliorum de Analysi promota & per Europam inter Mathematicos distributum. Continentur in eo excerpta ex literis, quorum autographa conservat illustris Societas Regalis, una cum epistolis *Nevvtoni* atque *Leibnitii*, quæ jam apud *Wallisium* Tomo tertio Operum leguntur, Tractatus de Analysi per æquationes numero terminorum infinitas a *Jonesio* editus (§. 26.), epistolæ *Leibnitii* ad *Hans Sloane* & *Keillii* responsiones ad easdem, de quibus modo diximus & Relatio ac sententia Commissariorum, quam modo retulimus.

§. 35. *Leibnitius* tunc temporis Viennæ in Austria degebat, nec Commercium epistolicum ibidem videre ipsi contingebat. Cum igitur ex ipso per litteras quærerem, num idem in Actis Eruditorum recenseri & quædam ad ipsum reponi consultum judicaret; consultius ipsi videbatur, ut charta quadam volante suppresso loci ac

ac Autoris nomine publico significaretur, ipsum esse Viennæ nec Commercium epistolicum vidisse, atque ex litteris *Joannis Bernoulli* excerptum publicaretur, quo rationes continebantur, cur inventum calculi differentialis ipsi dubium reddi minime possit. Inde ansam arripiebat *Keillius* cum in Transactionibus Anglicanis, tum in Diario literario, quod Hagæ Comitum prodibat, paulo durius de *Leibnitio* atque *Bernoullio* scribendi. Quamobrem cum *Leibnitio* limites modestiæ transgredi videretur, a se impetrare non potuit, ut ipse responderet. Scripsit tamen sententiam suam ad amicos, ad quas ejus literas *Nevvtonus* quoque respondit, tumque apparuit, quæ *a Keillio* dicta fuerant, consentiente & approbante *Nevvtono* prolata fuisse. Epistolas hasce *Leibnitii* atque *Nevvtoni* idiomate Anglico cum excerptis nonnullis aliis Historiæ fluxionum suæ latine conscriptæ adjecit *Josephus Raphson*, in qua originem & progressum hujus methodi brevissimo compendio exhibere intendit. Prodiit Londini 1715. in 4. (plag. 16.). Quid sibi proposuerit Autor, ipse in præfatione monet, scilicet inventiones præcipuas in hoc genere primis suis autoribus speciatim asserere & vindicare, & inprimis D. *Nevvtono* inventori longe & tempore primo, & præstantia inventionum præcellentissimo, & aditum pate facere tyronibus ad hæcce facilius & explicatius, adeoque ut cuivis introductionis loco ad *Nevvtoniana, Cheynæana* aliorumque inventa & congesta in hoc genere inserviret. Si quis historiam Analyseos infinitesimalis conscribere vellet, ut origo & progressus pateret ac unicuique, quod suum est, tribueretur; illi multo majore studio ac solertia inquirendum esset in ea, quæ a tempore *Cavallerii* usque ad præsens a Geometris fuere edita, & accurate determinandum, quantum unusquisque ex inventis alterius sibi notis vel proficere potuerit, vel actu profecerit: ubi certa a probabilibus exacte distinguenda. Sed alibi in Logica de historia scientiarum & artium mentem nostram aperuimus & uberius explicavimus.

§. 36. Controversia hæc de inventore calculi differentialis postea

postea magna animorum contentione agitata, præsertim inter *Keillium* & *Joannem Bernoullium*, de qua inprimis legi possunt Acta Eruditorum Lipsiensia. Nostrum jam non est eam definire, cum discussioni hic non sit locus, sine qua definiri nequit, nec hoc nobis sumimus. Neque opus est ex Actis laudatis huc transcribere, quæ ibidem legi possunt. Nos veneramur merita *Newtoni*, veneramur merita *Leibnitii*, *Bernoullii* aliorumque; æquum existimamus, ut suum cuique tribuatur & gloria, quæ dat vires præclara agendi, excitentur magna ingenia; in aliorum merita extollenda proni sumus: principiis tamen Philosophiæ moralis adversum judicamus de laude altercari, nec ulla nos autoritas movebit, ut altercationibus istiusmodi calculum adjiciamus.

§. 37. Antequam igitur recensioni præsenti Autorum colophonem imponamus, monemus curvarum descriptionem plurimum promovisse *Colinum Mac Laurin*, Matheseos in collegio novo Abredonensi Professorem, & *Gulielmum Braikenridge*, Ecclesiæ Anglicanæ Presbyterum. Edidit ille Londini An. 1720. in 4. (plag. 19. Tabb. 12.) Geometriam organicam, sive Descriptionem Linearum curvarum universalem. Docet in eadem, quomodo lineæ secundi, tertii, quarti tandemque ordinis cujuscunque describantur, & ubi ostendit, quomodo lineæ omnium ordinum altiorum ope linearum ordinis cujuscunque inferioris describantur, simul descriptionem Curvarum organicam *Newtonianam* demonstrat. Plurima hic reperies ad Geometriam sublimiorem spectantia. Alter horum autorum Londini 1733. in 4. in publicam lucem emisit Exercitationem Geometricam de Descriptione Linearum Curvarum (plag. 10.). Tradit primum descriptionem curvarum primi generis, seu linearum secundi ordinis, deinde vero descriptionem Linearum cujuscunque ordinis ope Linearum ordinis inferioris & denique descriptionem sectionum conicarum ope plurium rectarum circa polos moventium. Diversa tamen sunt ejus theoremata ab illis, quæ tradit prior, & plura hisce etiam

majora promittit in una aut altera exercitatione post paucos menses edenda: Nobis tamen huc usque præter eam, quam hic commemoramus, nullam videre licuit. Utiles sunt descriptiones curvarum generales ad Theoriam Curvarum condendam, qualem adhuc desiderari supra (§.19. c. 3.) monuimus. Quid enim tribuendum sit definitionibus geneticis, vel ex Synopsi Geometrica *Honorati Fabry*, e Societate Jesu, intelligitur, quæ Lugduni Gallorum in gratiam tyronum edita An. 1669. in 12. edita (Alph. 1. cum figuris multis in folio excusis), & cui accessere tria opuscula, nimirum de Linea Sinuum & Cycloide, de maximis & minimis centuria & synopsis Trigonometriæ planæ. Absit tamen, ut cum Autoribus Anglis, quorum Tractatus hic commendavimus, æquipares *Bartholomæi Intieri*, Florentini, ad nova arcana Geometrica detegenda aditum, qui Beneventi 1703. in 4. (plag. 13. Tabb. 2.) & *Apollonium* ac *Serenum* Promotum, qui Neapoli 1704. in 4. (plag. 9. Tab. 1.) lucem adspexit, ubi sectionum conicarum graduum superiorum genesin tradit. A tyronibus tamen ea legi non inconsultum est, antequam ad sublimiora Anglorum inventa pedem promoveant.

§. 38. Coeterum multa ad calculum differentialem & integralem spectantia peti debent ex Actis Eruditorum, ex Historia & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, qui quotannis Parisiis prodeunt & Amstelodami recuduntur, ex Transactionibus Anglicanis, & seqq. ex Miscellaneis Berolinensibus & Commentariis Petropolitanis, de quibus singulis supra diximus (§.36. & seqq. c. 1.). Inter Algebraistas inprimis quoque nominari debebant *Johan. Faulhaberus* ex textore Mathematicus insignis, cum quo per aliquod tempus egit *Cartesius*, cum Algebræ vacaret, & *Justus Byrgius Wilhelmi* Hassiæ Landgravii Mechanicus, sed illius scripta perpauca, hujus nulla videre hactenus licuit.

§. 39. Coronidis loco adhuc observamus, in gratiam tyronum idiomate Anglico Institutiones fluxionum edidisse *Humphredum Ditton*, in quibus præcepta calculi explicat & exemplis

plis quibusdam selectis illustrat, cum istiusmodi libellus adhuc desideraretur. Post obitum Autoris novam editionem dedit *Johannes Clarke*, Regi a sacris ordinariis, quæ sub titulo: *An Institution of fluxions* Londini An. 1726. in 8. reg. (plag. 16.) prodiit. In eorundem usum L. *Trevigar* Sectionum conicarum elementa methodo facillima demonstrata edidit Cantabrigiæ Anno 1731. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 1. Tabb. æn. 12.). In compendium misit Tractatum analyticum de sectionibus conicis *Hospitalii*, in quo methodus genetica cum analytica conjungitur, ut in Geometria & Algebra vel mediocriter versatus præcipuas sectionum conicarum proprietates addiscere possit. Addidit nonnulla, quæ in Hospitalio desiderantur, sed ad Principia Philosophiæ naturalis mathematica intelligenda requiruntur. In Italia vero *Franciscus Xaverius Brunetti*, Sacrario Pontificis Maximi *Clementis* XII. Præfectus, sub titulo: *Dell' Arithmetica commune e speciosa Trattato*, seu Tractatus de Arithmetica communi & speciosa, Romæ An. 1731. in 4. (Alph. 1. plag. 11. Tab. 2.) Introductionem edidit ad scripta arithmetica & analytica intelligenda, in quo præter Arithmeticam, Algebram quoque & Analysin infinitesimalem recentiorem perspicue explicat, ut adeo plura in hoc opere reperiantur, quam titulus promittit.

## CAPUT V.

# De TRIGONOMETRIA.

§. 1.

Trigonometria in gratiam Astronomiæ primum inventa: unde *Ptolemæus* sub initium operis sui Astronomici tantum hujus doctrinæ exponit, quantum scopo suo sufficere visum est, & recentiores Astronomi passim institutionibus Astronomicis Trigonometriæ præcepta præmiserunt.

§. 2.

§. 2. Magis hanc ſcientiam excoluit *Johannes de Regio Monte* in Libris quinque de Triangulis omnimodis An. 1464. conſcriptis & Norimbergæ, mortuo Autore, a *Schonero* An. 1533. in fol. (2. Alph. 11. plag.) editis. Idem quoque Canonem Sinuum novum condidit aſſumto radio pro unitate eoque in fractiones decimales diviſo, cum ante idem in 60 ſcrupula divideretur. Immo ipſe primum radium ſumebat 60 & nonniſi in fractiones decimales ſubdividebat: ſed cum animadverteret præſtare in calculo, ſi ſinus totus ſit 1, canonem ſuum reformavit, aut novum potius condidit. Canon Sinuum ad radium 60000 conſtructus ſubjungitur ejusdem Tabulis Directionum Profectionumque, de quibus in Aſtronomia dicemus. Eum in plerisque ſequitur *Clavius* (§. 24. c. 1.).

§. 3. Canonem Sinuum ad radium 1000000000000000 & ad dena quæque ſcrupula ſecunda Quadrantis ſupputavit *Joachimus Rheticus*, quem mortuo Autore una cum Sinibus primi & poſtremi gradus ad eundem radium & ad ſingula ſecunda ſcrupula Quadrantis edidit *Bartholomæus Pitiſcus* Francof. ad Mœnum 1613. in fol. (3. Alph. 21. plag.), qui adjecit principia Sinuum ad radium 100000 00000000000000000 ſupputata & ſinus decimorum, triceſimorum & quinquageſimorum quorumque ſcrupulorum ſecundorum per prima & poſtrema 35 ſcrupula prima ad radium 10000 0000000000000000000. Hujus Canonis uſus inprimis eſt in corrigendis Tabulis Sinuum atque Tangentium vulgaribus.

§. 4. Multum nimirum Trigonometriæ perficiendæ incubuit *Rheticus*, Mathematatum Profeſſor Wittebergenſis, ſed qui relicta Profeſſione ad *Copernicum* profectus & apud eum egit: quemadmodum ex Opere Palatino de Triangulis apparet, quod ab ipſo cœptum conſummavit L. *Valentinus Otho*, Principis Palatini Friderici IV. Electoris Mathematicus Prodiit An. 1616. in fol. (21. Alph. 17. plag.). Continentur in eo 1. *Rhetici* libri tres de fabrica Canonis doctrinæ triangulorum & 2. ejusdem liber quartus de triangulis globi: 3. *Othonis* libri quinque de triangulis globi

bi ſine angulo recto: 4. prolixus Canon triangulorum.

§. 5. *Pitiſcus* vero & ipſe Trigonometriam egregie illuſtravit editis quinque de eadem libris An. 1599. quorum editio tertia auctior prodiit Francof. A. 1612. in 4. (2. Alph. 15. plag.). Libris iſtis ſubjicitur Canon Sinuum, tangentium & ſecantium una cum libris undecim, in quibus trigonometriæ uſus in ſolutione problematum Geodæticorum, altimetricorum, architectonicorum, geographicorum, gnomonicorum & aſtronomicorum oſtenditur, quæ a nobis ſuis in locis per eandem ſoluta.

§. 6. Non minus commendari merentur *Willebrordi Snellii* doctrinæ Triangulorum Canonicæ libri quatuor, quibus Canonis ſinuum, tangentium & ſecantium conſtructio, triangulorum tam planorum, quam ſphæricorum expedita dimenſio breviter ac perſpicue traditur una cum Canone Secantium. Poſt mortem Autoris eos edidit *Martinus Hortenſius*, Delfenſis (Lugd. Bat. 1627. in 8. plag. 29) & tractatus problematum geodæticorum & ſphæricorum adjecit, quibus utrique Trigonometriæ uſus edocetur.

§. 7. A. 1591. *Philippus Lansbergius* edidit Geometriam Triangulorum, quæ Anno 1663. Middelburgi in Seelandia in fol. (plag. 11.) auctius recuſa & primum inter opera ejus locum tenet (§. 26. c. 1.). In eo Trigonometriam tam planam, quam ſphæricam & conſtructionem ſinuum atque tangentium perſpicue explicat, quemadmodum jam fecerat *Georgius Purbachius*, Præceptor *Regiomontani*, Profeſſor Matheſeos in Academia Viennenſi, qui in promovendo Matheſeos ſtudio plurimum operæ collocavit, & de cujus meritis plura dicemus in Aſtronomia.

§. 8. Inſignis ad Trigonometriam acceſſio facta eſt, Logarithmis a *Johanne Nepero*, Barone *Merchiſtonii* Scoto, in eandem introductis. Prodiit mirifici Logarithmorum Canonis deſcriptio ejusque uſus in utraque Trigonometria & omni Logiſtica Mathematica explicatio Edinburgi 1614. in 4. (plag. 21.) & opera filii parente mortuo recuſum eſt opus auctius A. 1619. Acceſſere nempe tractatus aliqui de logarithmorum conſtructione

posthumi. In eodem opere continetur regula generalis facilius solvendi triangulorum sphæricorum rectangulorum casus omnes, cui similem nos quoque dedimus in Elementis nostris. Cæterum logarithmi isti ab iis, quibus nunc utimur, sunt diversi: supposuit enim *Neperus* in prima eorundem constructione logarithmum Sinus totius seu radii 0, ut multiplicationem & divisionem in trigonometria plerumque prorsus evitaret, nec additionem vel subtractionem substituere opus haberet.

§. 9. Canonem *Neperi* ad singula minuta prima quadrantis constructum ad dena secunda extendit *Benjamin Ursinus*, Mathematicus Electoralis Brandenburgicus, & cum Canonis tam naturalis, quam artificialis constructionem, tum trigonometriam utramque & quidem sphæricam juxta *Neperum* explicavit in Trigonometria Coloniæ An. 1625. in 4. edita (constat liber 1. Alph. 12. plag. & Canon 2. Alph. 11. plag.). Multa continet lectu digna, præsertim quoad constructionem Canonis & praxin Trigonometriæ sphæricæ.

§. 10. Postquam *Keplerus* hoc logarithmorum genus a *Justo Byrgio* supra laudato (§. 38. c. 4.) inventum, sed illo reprehendente in Rudolphinis f. 11. in privatos tantum usus reservatum, ad Astronomiam transtulerat; ipsius gener *Jacobus Bartschius* Canonem *Ursini* reduxit, resectis tribus ultimis cyphris, & particulam antilogarithmorum exactiorum ad singula bina secunda, Tabulamque logarithmorum indicis prostaphæreseos supputavit atque Heptacosiadem *Keplerianam* ad singula scrupula secunda dilatavit. Has tabulas sub soceri *Kepleri* auctoritate Sagani edidit A. 1630. sed ob earum usum in calculo *Rudolphino* insignem sub titulo: *Joh. Kepleri & Jacobi Bartschii Tabulæ Manuales Logarithmicæ* A. 1700. Argentorati in 8. (1. Alph. 17. plag.) recudi fecit *Johann Caspar Eisenschmid.* Med. D.

§. 11. Ex consilio *Neperi* logarithmorum formam immutavit *Henricus Briggius*, Professor Geometriæ Oxoniensis, ita ut logarithmus unitatis fieret 0, quemadmodum nos exposuimus in Elementis Arithmeticæ cap. 8. Construxit Canonem Loga-

garithmorum numerorum vulgarium ab 1. usque ad 20000 & a 90000 usque ad 100000, quem in Arithmetica Logarithmica una cum methodo inveniendi logarithmos & usu eorundem exhibuit A. 1624. in fol. Sed mox Goudæ A. 1628. in fol. (9. Alph. 7. plag.) eandem recudi fecit *Adrianus Vlacq*, Goudanus, qui logarithmos Briggianos 4 numeris minuit, lacunam inter 20000 & 90000 explevit, ut 100 logarithmorum chiliades exhibuerit, Canonem triangulorum seu tabulam sinuum & tangentium artificialium ad radium 10000000000 & ad singula scrupula prima quadrantis adjecit, in descriptione vero *Briggiana* quædam hic illic immutavit, quædam omisit, quædam adjunxit. Idem postea A. 1633. Canonem Sinuum atque Tangentium artificialium extendit ad singula dena secunda & sub titulo Trigonometriæ artificialis seu Magni Canonis triangulorum Logarithmici, Goudæ in fol. (5. Alph. 3. plag.), adjectis Chiliadibus viginti Logarithmorum pro numeris naturali serie crescentibus *H. Briggii*, edidit.

§. 12. Inchoaverat idem *Briggius* Canonem Sinuum & tangentium artificialem pro gradibus graduumque centesimis; sed morte præpeditus non absolvit. Quæ adeo deficiebant, supplevit *Henricus Gellibrand* & An. 1633. sub nomine *Trigonometriæ Britannicæ* publicavit. Prodiit Goudæ in fol, (3. Alph. 7. plag.).

§. 13. Sub eodem Trigonometriæ Britannicæ nomine, sed Anglico idiomate opus trigonometricum præclarum edidit *Johannes Newton* Londini 1658. in fol. (5. Alph. 19. plag.), in quo continentur 1. constructio & usus Canonis Sinuum & tangentium naturalis atque artificialis, 2. solutio triangulorum, tam planorum, quam sphæricorum, 3. chiliades centum logarithmorum pro numeris vulgaribus, 4. Canon logarithmorum pro sinibus & tangentibus ad singulos gradus & partes graduum centesimas, 5. Canon logarithmorum pro sinibus & tangentibus ad tres primos Quadrantis gradus & partes graduum millesimas.

§. 14. Fundamentum Logarithmorum breviter quidem, attamen perspicue exposuit *Stifelius*

*lius* in Arithmetica integra (§. 7. c. 1.) lib. 3. f. 249. b & seqq. monens posse hic fere novum librum integrum scribi de mirabilibus numerorum, sed oportere, ut se hic subducat & clausis oculis abeat. Utilitatem fractionum decimalium ad exprimendos numeros prope veros, qui in calculo excludant errorem quantumlibet exiguum, adeoque contemnendum, dudum ante monstravit *Regiomontanus*. Hisce igitur luminibus usi sunt *Byrgius* atque *Neperus* in Logarithmis computandis. Recentiores vero alias invenere methodos, de quibus in Algebra agitur. Illa tamen, qua usi sunt Canonis conditores, ad captum tyronum composita, adeoque a nobis in Arithmetica retenta.

§. 15. An. 1643. Bononiæ in 4. (1. Aplph. 1. plag.) *Bonaventuræ Cavallerii* Trigonometria plana & sphærica, linearis & logarithmica, cum canone duplici Trigonometrico & chiliade numerorum absolutorum ab 1. usque ad 10000 eorumque logarithmis ac differentiis, opus Autore suo dignum, prodiit. Eodem usus est *Geminianus Rondelli*, Mathem. Professor Bononiensis, qui An. 1705. Bononiæ in 4. (2. Alph. 12. plag.) Trigonometriam universalem linearem & logarithmicam, Italico idiomate edidit, cum canone sinuum, tangentium & secantium, atque logarithmorum sinuum & tangentium & decem chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 16. *Sethi Wardi* Idea Trigonometriæ demonstratæ, quæ cum Prælectione de Cometis & Inquisitione in *Bullialdi* Astronomiæ Philolaicæ fundamentum Oxonii A. 1654. in 4. (plag. 3.) prodiit, est admodum concisa & characteribus expressa. Ejusdem vero indolis est Trigonometria *Wilhelmi Oughtredi*, quæ cum canone sinuum, tangentium & secantium Londini 1657. in 4. lucem adspexit (1. Alph. 13. plag.). In eundem quoque censum veniunt *Joannis Wilson* Principia Trigonometriæ succincte demonstrata, quæ Lugduni Batavorum An. 1718. in 8. (plag. 5. Tab. 2.) prodiere.

§. 17. *Richardus Norwood* in Trigonometria, quæ Anglico sermone Lond. 1651. in 4. recusa, (2. Alph. 3. plag.) præter

ter Trigonometriam planam & ſphæricam logarithmorum doctrinam explicat, & omnia trigonometriæ ſphericæ problemata per duo axiomata fundamentalia *Neperi* ſolvit. Adjiciuntur canones ſinuum & tangentium naturalium atque artificialium cum 10. chiliadibus logarithmorum pro numeris vulgaribus.

§. 18. *Wilhelmus Hawney* A. 1725. Londini in 8. reg. (Alph. 1. plag. 8.) Trigonometriam planam & ſphæricam omnem explicatam dedit & ejus uſum in Navigatione, Aſtronomia, Geographia, Architectura militari, Geodæſia & Euthymetria, atque Gnomonica prolixe commonſtravit in libro ſermone Anglico edito ſub titulo: *The Doctrine of plain and ſpherical Trigonometrie.*

§. 19. Compendium Trigonometriæ planæ & ſphæricæ non contemnendum Leodii 1704. in 8. ( 12½. plag.) edidit *Jacobus Gooden*, e Socieatate Jeſu, in quo regulæ accurate demonſtrantur & exemplis utilibus ex Geodæſia, Aſtronomia & Geographia petitis illuſtrantur. Adjiciuntur palmaria ex *Euclide* theoremata cum Canonibus ſinuum, tangentium & logarithmorum contractis.

§. 20. In curſibus Trigonometriam bene explicant *Dechales* atque *Ozanam* (§. 4. 7. c. 1). Præterea in multis aliis libris, qui de Aſtronomia & Navigatione conſcripti ſunt, Trigonometria tam plana, quam ſphærica explicatur. Sed de eo dicemus ſuo loco, quando illorum mentionem facturi ſumus.

§. 21. Tabulæ ſinuum & tangentium itemque Logarithmorum ſeparatim editæ commendantur *Ulacci*, quæ Hagæ Comitum An. 1665. prodierunt, & *Ozanami*, quæ juxta eas correctæ. Quid nos in noſtris præſtiterimus, quæ Halæ 1711. (plag. 20.) prodierunt, & 1728. recuſæ ex præfatione iisdem præfixa intelligi poteſt.

§. 22. Analyſis ſpecioſam Trigonometriæ ſphæricæ, primo mobili, Triangulis rectilineis & Progreſſioni Arithmeticæ & Geometricæ aliisque variis Problematis applicata a R. P. *Jacobo Kreſa*, e Societate Jeſu, quæ Pragæ prodiit 1720. in 4. ( Alph. 2. Tab. 2.), docet uſum Algebræ communis, cujus Iſagoge libro primo præmittitur, in Trigonometria plana & Sphærica.

# CAPUT VI.
## DE
# STATICA ET MECHANICA.

§. 1.

THeoria Staticæ atque Mechanicæ apud veteres fuit valde imperfecta, nec quicquam ea de re extat, nisi quod *Archimedes* in duobus de æquiponderantibus libris de centro gravitatis figurarum planarum & de statices palmario fundamento, *&* *Pappus* lib. 8. Collect. Mathemat. de quinque Potentiis mechanicis vecte, axe in peritrochio, trochlea, cochlea & cuneo demonstrat.

§. 2. Neque ulterius progrediuntur Autores recentiores, qui institutiones Mechanicas ediderunt: immo plerique Archimedea de centro gravitatis, quæ non sunt ad palatum tyronum, nec ad praxin directe tendunt, omittunt. Pertinent huc *Guidi Ubaldi* liber Mechanicorum Pisauri Anno 1577. editus in fol. (2. Alph.) *Simonis Stevini* Statica (§. 23. cap. 1.); *Jac. Rohault* Tractatus de Mechanica, qui inter posthuma habetur Hagæ 1690. in 12. reg. (1. Alph. 22. pl.) edita & non nullis editionibus Physicæ ejus in Latinum versæ subjungitur; *Ignatii Gastonis Pardies* Statica Gallice Hagæ comitum An. 1692. in 12. (10½. plag.) tertia vice recusa & vitiosissime in Latinam linguam translata; *Bernhardi Lamy* Tractatus Gallicus de Mechanica (Parisiis 1687. in 12. plag. 12.), cui accessit plagula una continens Novam methodum demonstrandi præcipua theoremata Elementorum Mechanicorum; *Guil. Oughtred* Institutiones Mechanicæ (§. 27. cap. 1.), *Pauli Casati* Mechanicorum libri octo Lugduni Gallorum An. 1784. in 4. (4. Alph. 7. plag.) & *And.* **Jungenickels** / ex vitriario primum militis gregarii, deinde Suggestuum tormentorum Præfecti Clavis Machinarum, Germanice conscripta & Norimbergæ A. 1661. in 4. (2. Alph. 3. plag.) edita. Hos inter *Stevinus* atque *Casatus* multa ad praxin pro-

profutura afferunt: *Rohaltius* atque *Lamy* ob perſpicuitatem tyronibus commendandi: *Jungenickelius* iis ſatisfacit, qui in Geometria non multum verſati fundamenta mechanica populari modo cognoſcere cupiunt.

§. 3. Theoriam potentiarum mechanicarum, quæ dicuntur ſeu machinarum ſimplicium nemo prolixius demonſtravit, ac ſingula huc ſpectantia uberius expoſuit, quam *Varignonius* in opere poſthumo, quod duobus Tomis Pariſiis An. 1725. in 4. reg. ( Alph. 4. plag. 21. Tabb. 64. ) ſub titulo: *Nouvelle Mecanique & Statique* prodiit, ubi ex motu compoſito demonſtrationes deducit. Ad eorum palatum eſt, qui theoriis profundis delectantur. Ideam hujus operis jam publicaverat A. 1687. Pariſiis in 4. ſub titulo: *Projet d' une nouvelle Mecanique*, in quo nonniſi principia continentur peritis valde probata. Adjiciuntur duo Tractatus, quorum primo examinatur Machina ab afflictu liberata, cujus mentionem facit *Perrault* in Commentario ad *Vitruvium*; ſecundo autem opinio *Borelli* de ponderibus ex chorda ſuſpenſis.

§. 4. Ulterius primus omnium progreſſus *Gallilæus Gallilæi* in diſcurſibus & demonſtrationibus Mathematicis circa duas novas ſcientias, pertinentes ad Mechanicam & motum localem, una cum Dialogis ejus de ſyſtemate mundi Lugdini Bat. 1699. in 4. editis. (Dialogi de motu conſtant 1. Alph. 14. plag ). In iis enim reſiſtentiam ſolidorum conſiderare aggreſſus eſt, quamvis parum feliciter, uſus nimirum principiis parum genuinis, & de motu cum generalia tradidit, tum in ſpecie motum gravium tam libere, quam ſuper plano inclinato deſcendentium vel aſcendentium, atque motum projectorum & pendulorum feliciſſime evolvit.

§. 5. Inventa *Gallilæi* expolivit diſcipulus ejus *Evangeliſta Torricellius* in libris duobus de motu gravium naturaliter deſcendentium & projectorum, qui inter opera ejus Geometrica habentur ( §. 12. cap. 3. ), immutavit *Joh. Baptiſta Balianus* in Tractatu de motu naturali gravium ( Genuæ 1646. in 4. ), ſed parum feliciter, & doctrinam de motu pendulorum ulterius promovit *Chriſtianus Hugenius*

in insigni Tractatu de Horologio oscillatorio Paris. An. 1673. in fol. (2. Alph.), cujus etiam parte tertia de linearum curvarum evolutione & dimensione Geometria sublimior novis inventis illustratur. Illustris *Leibnitius* de resistentia solidorum certiora dedit in Actis Eruditorum A. 1684. p. 319. & eandem doctrinam celeberrimus *Varignonius* more suo maxime universalem reddidit in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum A. 1702. p. 87.

§. 6. *Joh. Alphonsus Borellus* in Tractatu de vi percussionis regulas motuum explicare aggressus est. Prodiit primum Bononiæ A. 1666. in 4. & cum Tractatu altero de motionibus naturalibus a gravitate pendentibus Lugd. Batav. A. 1686. in 4. (3. Alph. 18. plag. 21. Tabb. æn.). Idem in Opere eximio de motu animalium Lugd. Batav. 1685. in 4. (3. Alph. 18. plag. 18. Tabb. æn.) regulas Staticorum ad motus animalium varios explicandos applicavit.

§. 7. Primi regulas motuum veras dedere eodem tempore *Wallisius*, *Hugenius* & *Christophorus Wren*: ille quidem de Corporibus non elasticis, hi vero de corporibus elasticis. Extant regulæ *Wallisianæ* in Transactionibus Anglicanis n. 43. p. 864. *Wrennianæ* n. 43. p. 867. & *Hugenianæ* n. 46. pag. 927. Conf. the Philosophical Transactions abrig'd by *John Lowthorp* Vol. I. cap. 5. p. 545. & seqq.

§. 8. *Hugenius* postea Tractatum peculiarem de motu corporum ex percussione conscripsit, qui inter posthuma opera habetur, & in quo inventa sua clarius explicat: *Wallisius* vero absolutissimum de Mechanica seu motu opus perfecit, Oxonii A. 1669. in 4. primum editum, deinde Tomo primo Operum insertum, in quo non solum inventa veterum & *Gallilæana*, *Wrenniana*, *Hugeniana* atque propria ope analyseos plerumque demonstrantur, verum etiam in prolixa de centro gravitatis pertractatione multa ad Geometriam sublimiorem spectantia una evolvuntur. Utitur Arithmetica hinc inde infinitorum, sed ope calculi differentialis ac integralis talia felicius eruuntur.

§. 9.

§. 9. Quoniam opus præclarum captum tyronum transcendit; operæ pretium fecit Cl. *Joh. Keill*, Astronomiæ Professor in Academia Oxoniensi, quod in introductione ad Veram Physicam, quæ A. 1705. Oxonii in 8. reg. ( 19½. plag. ) auctior recusa, palmaria illius de motu dogmata ad captum tyronum ex elementis demonstraverit, more veterum Geometarum.

§. 10. Cel. *Philippus de la Hire* in Tractatu de Mechanica ( Paris. 1695. in reg. 12. plag. 18. ) non modo ea demonstrat, quæ ad praxin mechanicam usui sunt; verum etiam motuum doctrinam attingit. Unde merito in hoc genere commendatur.

§. 11. Prostant etiam alia de motu corporum ex percussione Scripta particularia. Pertinet huc *Mariotti* Tractatus de percussione corporum ( *du Choc des corps*, ) qui Parisiis 1673. in 12. ( plag. 18. Tab. 2. ) editus Autore suo dignus; & inter opera ejus legitur, quæ Lugduni Batavorum An. 1717. in 4. ( Alph. 4. plag. 2. Tabb. 25. ) prodierunt. In eo ex experimentis pendulorum demonstrationes deducit; P. *Dechales* Tractatus Gallicus de motu (Lugd. Gall. 1682. in 8. ) & P. *Pardies* discursus de motu locali ( Hag. Comit. 1692. in 12. tertia vice Gallice recusus) non magni momenti, nec veritati per omnia consentaneus. Inprimis vero hic nominanda sunt Elementa Gallica Mechanicæ & Physicæ a *Parentio* Paris. 1700. in reg. 12. ( plag. 22. Tabb. 12. ) edita, quamvis non satis perspicua.

§. 12. *Hugenius* primum considerare cœpit in motu curvilineo, præsertim circulari, vim centrifugam, & de ea aliquot theoremata, sed suppressa demonstratione, Tractatui de Horologio oscillatorio ( §. 4. ) subjunxit. Conscripsit deinde Tractatum de vi centrifuga, qui inter posthuma comparet, ubi theoremata ista demonstrantur. Sed antequam is in publicum prodiret, Cl. *Keillius* faciles ac elegantes eorundem theorematum demonstrationes dedit sub finem Introductionis ad veram Physicam modo laudatæ (§. 9.). Easdem regulas per calculum differentialem in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum An. 1700. p. 19. eruit *Hospitalius*

*lius* & nos nostro more in Elementis Mechanicæ demonstravimus.

§. 13. De motu, præsertim curvilineo, inventa prorsus præclara & admiranda dedit Geometra Summus *Isaacus Newtonus* in excellenti Principiorum Mathematicorum Philosophiæ Naturalis Opere (Londini An. 1682. in 4. reg. 2. Alph. 18. plag.) quod hinc inde emendatum & auctum Cantabrigiæ 1713. in 4. reg. (2 Alph. 19. plag.) & mox Amstelodami 1714. eadem forma recusum cum præfatione *Rogeri Cotes*, Astronomiæ & Philosophiæ experimentalis Professoris Plumiani in Academia Cantabrigiensi, qui operam dedit, ut opus præstantissimum nitide inprimeretur. Tandem An. 1726. Londini in 4. reg. (Alph. 2. plag. 3.) prodiit editio tertia aucta & emendata, ceteris omnibus præferenda. Docetur in hoc opere applicatio Geometriæ ad Naturæ explicationem & scientia mechanica mirifice fuit promota.

§. 14. Excitavit illud attentionem Geometrarum primi ordinis, eosque incitavit, ut varia ad majorem universalitatem perducerent & ulterius proveherent: quos inter inprimis nominandus mihi est celeberrimus *Varignonius*, cujus præclara in hoc genere meditata in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum passim leguntur.

§. 15. Cæterum cum ad lectionem operis *Newtoniani* non admittantur, nisi in Theoria mathematica multum diuque versati, cum in ea majorem perspicuitatem desideraverit ipse *Hugenius*; *Guilielmus Whiston*, Matheseos tum Professor in Academia Cantabrigiensi, in Prælectionibus Physico-Mathematicis Philosophiam Newtoni mathematicam explicatius tradidit & facilius, quamvis subinde laxius demonstravit (Cantabrigiæ An. 1710. in 8. 1. Alph.). Forsan huc etiam tendit liber alius ab *Henrico Ditton* Londini A. 1706. sub titulo *the general Laws of nature and motion wit their application to Mechanicks*, *also the doctrine of centripetal forces and velocities of bodies*, *describing any of the Conick Sections* editus, quem nobis non visum nomen Autoris ex aliis speciminibus nobis noti commendat.

§. 15. Inprimis etiam loco introductio-

ductionis in opus *Nevvtonianum* commendanda eſt explicatio quarundam ſectionum ejusdem, quam dedit *Johannes Clarke* & ſub titulo: *A Demonſtration of ſome of the principal ſections, of Sir Iſaac Newtons principles of natural Philoſophy, in Wich his peculiar method of treating that uſeful ſubject is explained and applied to ſome of the chief phænomena of the ſyſtem of the World* Lond. 1730. in 8. reg. (plag. 22. Tabb. 17.) edidit, & omnium maxime *Domickii* Philoſophia mathematica *Nevvtoniana* illuſtrata, quam Latino ſermone conſcriptam Londini An. 1731 in 8. (Alph. 1. plag. 3. Tabb. 16.) publici juris fecit autor. Enimvero cum opus *Nevvtonianum* merito tantopere celebratum a tyronum non modo, ſed etiam provectiorum captu valde removeatur, utiliſſimam operam ſumeret, qui continuo Commentario idem illuſtraret, qualem in Geometriam *Carteſii* edidit *Rabuel* (§. 7. c. 4.). Præſtaret enim, ut principiis Geometriæ, Analyſeos & Mechanicæ inſtructus ſtatim ad lectionem ejus accederet, cum dulcius ex fonte bibantur aquæ, quam demum per ambages non ſine multo temporis diſpendio ad eandem perduceretur, aut prorſus ab eadem avocaretur.

§. 17. Multa egregia de motu & reſiſtentia cum ſolidorum, tum fluidorum a celeberrimis ævi hujus Geometris detecta in Actis Eruditorum & Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, nec non in Transactionibus Anglicanis, paſſim extant: & præclarum de motu ſolidorum & fluidorum opus Geometræ inſignis *Jacobi Hermanni*, Mathematum Profeſſoris primum Patavii, deinde Francofurti ad Oderam, poſthac Petropoli Mathematum, tandem in Academia patria Baſilienſi Philoſophiæ moralis celeberrimi, Amſtel. 1716. in 4. (Alph. 2. plag. 15. Tabb. 12.) ſub *Phoronomiæ* nomine editum plurima inventa nova eaque egregia continet. More veterum doctrinam hanc demonſtrare voluit, quorum tamen methodum non ſatis familiarem expertus, nec intimius perſpectam poſſedit, ut adeo & ſibi, & aliis magis conſuluiſſet, ſiquidem analytica methodo, in qua erat verſatiſſimus, uſus fuiſſet.

§. 18. Ne igitur desideraretur opus Mechanicæ, in quo Motus scientia profundius explicaretur, & lectores ad solvenda proprio Marte problemata præpararentur, *Leonhardus Eulerus*, Academiæ Imperialis scientiarum, quæ Petropoli floret, Membrum & Matheseos sublimioris Professor, Mechanicam sive Motus scientiam analytice expositam conscripsit & duobus Tomis Petropoli in 4. reg. (Tom. I. Alph. 2. plag. 17. Tabb. 14. & Tom. II. Alph. 2. plag. 18. Tabb. 18.) in lucem publicam emisit, plura suo tempore additurus. Reperies in hoc opere multa nova, quæ alibi frustra quæsiveris, & ad ejus lectionem cum fructu absolvendam admittitur, qui in Analysi finitorum & infinitorum satis fuerit exercitatus.

§. 19. Quibus machinarum constructio curæ cordique est, in eorum gratiam Tractatum de Viribus motricibus (*Traité des Forces mouvantes*) Parisiis An. 1722. in 8. reg. (Alph. 1½. Tabb. 8.) edidit *de Camus*. Explicantur enim principia & ad machinas applicantur, quorum in praxi mechanica cognitio præsupponitur.

§. 20. Machinarum descriptiones dederunt *Jacobus de Strada Ferdinandi*, *Maximiliani* & *Rudolphi* II. Imperatorum Antiquarius, An. 1618. a nepote *Octavio de Strada* in publicum emissas, & An. 1629. recusas; *Zeisingius* in Theatro Machinarum Lipsiæ An. 1612. in 4. edito, *Jacobus Besson* in Theatro instrumentorum & machinarum 1582. in lucem emisso in fol. (plag. 32.), cum *Francisci Beroaldi* Figurarum declaratione demonstrativa & *Jolii Paschalis* additionibus; *Augustinus de Ramellis de Masanzana* in opere, quod ex Gallico in sermonem Germanicum translatum Lipsiæ An. 1620. in fol. (7. Alph. 18. plag.) sub titulo: **Schatz-Kammer Mechanischer Künste** prodiit, & *Georgius Andreas* **Böckler**/ in Theatro Machinarum novo (Norimb. 1673. in fol. plag. 11. Tabb. æn. 154.)

§. 21. Quoniam descriptiones machinarum, quas Autores isti tradunt, omnes sunt nimis breves, & inprimis dimensionum rationes non exprimunt,

ita

ita ut adæquata machinarum idea inde hauriri nequeat; Mechanicus ingeniosus atque industrius *Jacobus Leopoldus* novum promisit Theatrum machinarum & instrumentorum in Actis Eruditorum An. 1712. p. 366. cui ut staret, ipsimet eum hortati sumus. Stetit tandem, quantum per fata licuit, & Lipsiæ An. 1724. in publicam lucem protulit *Theatrum machinarum generale*, Schau-Platz des Grundes mechanischer Wissenschafften in fol. (Alph. 2. plag. 20. Tab. 71.), in quo potentias mechanicas & virium motricium ad machinas applicationem declarat. Eodem adhuc anno comparuerunt *Theatrum machinarum hydrotechnicarum*, Schau-Platz der Wasser-Bau-Kunst, in quo ea traduntur, quæ ad Architecturam aquarum faciunt (Alph. 2. plag. 5. Tabb. 51.) & pars prior *Theatri machinarum hydraulicarum*, Schau-Platz der Wasser-Künste, in quo repræsentantur machinæ ad aquas elevandas excogitatæ (Alph. 2. Tabb. 52.). Pars posterior subsecuta anno sequente (Alph. 2. plag. 1. Tabb. 54.). Eodem adhuc anno 1725. comparuit *Theatrum Machinarium*, quod vocat Autor, Schau-Platz der Hebezeuge (Allph. 2. Tab. 96.), in quo reperies machinas ponderibus elevandis aptas hisq; agnatas, & *Theatrum staticum universale*, Schau-Platz der Wage- und Gewicht-Kunst, (Alph. 2. plag. 11. Tab. 57.), quod exhibet varias librarum & staterarum structuras una cum instrumentis hydrostaticis meteoralogicis & ad libellationem necessariis, & quæ ad pondera spectant, explicat. A. 1726. *Theatrum Pontificiale*, quod vocat autor, Schau-Platz der Brücken und des Brücken-Baues (Alph. 1. plag. 21. Tab. 57.), quæ eam Architecturæ partem illustrat, quæ de pontibus struendis agit. Tandem A. 1727. *Theatrum Arithmetico-Geometricum*, Schau-Platz der Rechen- u. Meß-Kunst (2. Alph. 8½. plag. Tabb. 43.) successit, in quo instrumenta arithmetica & geometrica describuntur. Nisi mors Autris finem imposuisset, dare adhuc constituerat Theatra 1. fontium hydraulicorum, 2. molarum, 3. ad mechanicam ignis spectantium, 4. machinarum in metalli fodinis usitarum, 5. machinarum & in-

ſtrumentorum, quæ in Architectura civili & militari uſui ſunt, 6. quæ in re Oeconomica & 7. venatoria uſum habent, 8. machinarum & inſtrumentorum aërometricorum, 9. machinarum & inſtrumentorum opticorum, 10. machinarum & inſtrumentorum in Gnomonica & arte horologiopæa uſitatorum, 11. inſtrumentorum aſtronomicorum, 12. acuſticorum & muſicorum aliorumque agnatorum, 13. anatomicorum & chirurgicorum, & tandem omnium machinarum & inſtrumentorum apud artifices & opifices obviorum.

§. 22. Dolendum inprimis erat, quod molarum uſitarum genera cum Architecturæ parte, quæ iisdem excitandis deſtinatur, non deſcribere potuerat Autor. Hunc igitur defectum ſupplere conatus eſt *Johannes Matthias Beyer*, qui per modum Tomi noni Theatri machinarum *Leupoldi* Anno 1735. Lipſiæ in fol. (Alph. 1. plag. 14. Tab. 43.) edidit, in quo non modo uſitata molarum genera, verum etiam ea, quæ ad extructionem earundem neceſſaria ſcitu, deſcribuntur. Acceſſit Tomus ſecundus, in quo jura molendinorum operoſe congeruntur (Alph. 2. plag. 12.) in uſum Jurisperitorum.

§. 23. Molas Batavorum peculiari libro exhibuit *Petrus Limpergh* ſermone patrio, cujus *Moole-Bœk* Amſtelodami A. 1690. in fol. reg. (plag. 2. Tabb. 32.) prodiit. Accuratiores illarum delineationes ac deſcriptiones dedit *Johannes van Zyl* in Theatro Machinarum univerſali *of groot algemen Moolen-Bœk*, cujus Tomus I. Amſtelodami A. 1734. in fol. reg. prodiit (plag. 6. Tabb. 56.), etenim ſingulæ partes, qualescunque tandem fuerint, quam accuratiſſime ſecundum ſuas dimenſiones repræſentantur, ut integræ ſtructuræ adæquatam ideam inde haurire liceat. Textus in Germanicam linguam translatus fuit, ut operis hujus etiam in Germania eſſet uſus.

§. 24. Accuratas quarundam machinarum recentius inventarum deſcriptiones dedit *Perrault* in opuſculo Gallico, quod ſub titulo *Recueil de pluſieurs Machines de novelle invention* Pariſiis

rifiis An. 1700. in 4. (plag. 7. Tabb. 11.) prodiit, & *Hugenius* cum in Tractatu de horologio ofcillatorio horologium a fe inventum, tum in operibus pofthumis automatum fuum planetarium accurate defcribit.

§. 25. In Gallia machinas ab Academia Scientiarum approbatas, a prima fundatione usque ad noftra tempora una cum illarum defcriptionibus delineatas confenfu Academiæ fub titulo: *Machines & Inventions approuvées par l' Academie Royale des Sciences* Parifiis fex Tomis publici juris fecit *Gallonus*. An. 1735. in 4. reg. (Alph. 6. plag. 20. Tabb. 422.). Non modo machinæ fcenographice repræfentantur, verum etiam ichnographice cum orthographiis & fingularum partium delineationibus adjiciuntur, ubi opus fuerit. Defcriptiones funt fatis accurratæ, ut nihil in iis defiderari poffit. Subinde etiam vires ad agitandam machinam requifitæ ad calculum revocantur, aliaque cognitu neceffaria annotantur. Opus hoc Mechanicæ practicæ cultoribus plurimum commendandum.

§. 26. Structuram horologiorum exponit Anglus Anonymus in Tractatu Anglico, qui auctior Londini An. 1700. in 12. reg. Sub titulo: *The artificial Clockmaker* (7½. plag. Tabb. 2.) prodiit & An. 1707. in Germanicum idioma translatus novæ editioni Gnomonicæ *Welperianæ* fubjungitur: quod argumentum etiam attingit *Oughtredus* in pofthumis pag. 68. & feqq. Idiomate autem Germanico de horologiorum ftructura commentatus eft *Joannes Georgius Leutmannus*, in mechanicis & praxi optica verfatiffimus. Prodiit ejus Tractatus fub titulo: **Vollſtändige Nachricht von den Uhren** Halæ 1718. in 8. (plag. 9. Tab. 7.). Addidit A. 1722. Continuationem, in qua fupplentur, quæ defiderari poterant de horologio examinatorio & repetitorio (plag. 12. Tabb. 22.).

§. 27. Autoribus tamen iftis palmam præripit *Dom. Jacobus Alexander*, Monachus Benedictinus Congregationis S. Mauri, in Tractatu generali de Horologiis, qui fub titulo: *Traité general des Horloges* Parifiis in 8. maj. 1734. prodiit (Alph. 1. pl. 2. Tabb.

Tabb. 25.), quem ob utilitatem suam me suasore in Germanicam linguam transtulit *Christianus Philippus Bergerus*, Medicinæ Doctor, & Lemgovii An. 1738. in 8. (Alph. 1. plag. 5. Tabb. 25) edidit sub titulo: **des P. Dom Jacob Alexanders ausführliche Abhandlung von den Uhren.** Agit etiam de horologiis solaribus majoribus construendis. Ceterum hoc opus omnibus commendandum, qui horologiorum constructionem accurate cognoscere desiderant. Singularia vero de constructione horologiorum tradit in libro Gallico *Henricus Sully*, qui secunda vice auctior recusus Parisiis An. 1737. in 12. (plag. 20. Tab. 5) cum multis accessionibus. Maximopere commendandus iis est, qui perfectionem horologiorum curæ cordique habent, atque adeo in Germanicam linguam verti meretur, ut Tractatui *Alexandri* jungi posset.

§. 28. Silentio denique hic prætereunda non erant *Caspari Schotti*, e Societate Jesu, Technica curiosa, libris 12. comprehensa, quæ Norimbergæ An. 1664. in 4. (Alph. 6. Tabb. 20.) prodierunt. Etenim in iis præter varia experienta aliaque technasmata continentur etiam mechanica, chronometrica & automatica, consequenter plurima ad Mechanicam practicam spectantia. Edidit idem Magiam universalem Naturæ & Artis in tres partes distributam Bambergæ 1677. in 4. (Alph. 14. plag. 2. Tab. 90.): pars enim tertia multa continet, quæ ad Mechanicam & staticam spectant, nimirum quæ sub nominibus Magiæ centrobarycæ, mechanicæ, thaumaturgæ libris tribus prioribus continentur.

§. 29. Idem *Schottus* in Technica curiosa lib. 9. sub titulo mirabilium chronometricorum multa artis horologiopææ utilia tradit, præter alia mechanica. Inprimis etiam de mobili perpetuo varios conatus describit.

CAPUT

# CAPUT VII.

## DE
# HYDROSTATICA, AEROMETRIA ET HYDRAULICA.

§. 1.

HYdroſtaticam primus docuit *Archimedes* in libris de inſidentibus humido, cujus dogmata ad experimenta applicavit *Marinus Ghetaldus* in Archimede promoto: unde ſua excerpſit *Oughtredus* (§. 19. cap. 1.).

§. 2. *Mariottus* in Tractatu Gallico de motu aquarum & aliorum corporum fluidorum, qui primum ſub titulo: *Traité du mouvoment des eaux & des autres corps fluides* prodiit Pariſiis An. 1686. in 12. reg. (plag. 17½.) & in editione Batava operum ipſius legitur, propoſitionum hydroſtaticarum & hydraulicarum magnam partem & rationibus confirmavit, & experimentis comprobavit. Propter inſignem utilitatem D. *Joannes Chriſtophorus* **Meinig** eum in Germanicam linguam tranſtulit & notis quibusd m illuſtratum Lipſiæ 1723. in 8. (Alph. 1. plag. 5½.) edidit.

§. 3. Nec contemnenda habet *Robertus Boyle*, cum in Paradoxis Hydroſtaticis (Genevæ An. 1680. in 4 plag. 15. Tabb. 3.), tum in Medicina Hydroſtatica (Genevæ An. 1693. in 4. plag. 10½.): quod utrumque ſcriptum in uſum præſertim phyſicum legi meretur, intelligendum etiam ab iis, qui Mathematum ſunt imperiti.

§. 4. *Franciſcus Tertius de Lanis*, e Societatis Jeſu, Tomo tertio Magiſterii Naturæ & Artis Parmæ An. 1692. in fol. (6. Alph. 14. plag. Tabb. XIII.) lib. 25. f. 49. & ſeqq. dogmata hydroſtatica uberius expoſuit, quam alibi leguntur. Tomo autem primo & inprimis ſecundo paſſim Machinas Hydraulicas deſcripſit: quemadmodum etiam in primo Mechanicam multum illuſtravit. (Tom. I. Brixiæ

Brixiæ An. 1684. in fol. 6. Alph. Tab. 24. Tom. II. Brixiæ 1686. 6. Alph. 5. plag. Tabb. 20.).

§. 5. *Bernhardus Lamy* parte ſecunda Mechanicæ (§. 2 cap. 6.), quæ inſcribitur *Traité de l' equilibre des liqueurs*, propoſitiones aliquot Hydroſtaticæ ac Hydraulicæ fundamentales explicavit: quod etiam fecere *Robaltius* (§. cit.) & *Wallisius* in Mechanicis (§. 8. c. cit.). Commendanda quoque tyronibus Hydroſtatica P. *Dechales*, quæ in Mundo ipſius Mathematico Tom. III. legitur. (§. 4. c. 1.).

§. 6. Sublimiora dedit Geometra ſummus *Iſaacus Newtonus* in Principiis Philoſophiæ Naturalis Mathematicis Sect. 5. lib. 2. p. 282. & ſeqq.

§. 7. De Aërometria ſcriptum aliud non extat, niſi quod ſub titulo: *Elementa Aërometriæ* Lipſiæ Anno 1709. in 12. (16. plag. Tabb. XII.) edidi in uſum potiſſimum tyronum, ut Matheſin ad experimenta applicare diſcant. Sed ea deinceps hiſce Elementis Matheſeos univerſæ inſerui. Paſſim tamen huc ſpectantia leguntur apud *Guerickium*, Conſulem Magdeburgicum, antliæ pneumaticæ inventorem, in Experimentis novis Magdeburgicis de vacuo ſpatio Amſtelodami An. 1672. in fol. (Alph. 2. plag. 20. Tabb. 18.) editis & qui poſt eum aëris proprietates experimentis comprobarunt.

§. 8. Cæterum hic etiam locum meretur libellus Gallicus, qui ſub titulo: *Traitez des Barometres, Thermometres & Hygrometres* proſtat & barometrorum, thermometrorum atque hygrometrorum conſtructionem ac uſum edocet (Amſtel. 1707. in 12. plag. 7. Tabb. 35.). Inprimis autem hinc inde in Commentariis Academiæ Regiæ ſcientiarum inſeruntur, quibus Aëreometria locuputari ac ad majorem perfectionem adduci poteſt.

§. 9. Ad hydraulicam perficiendam tendit *Johannis Cevæ*, Mediolanenſis, Geometria motus (Bononiæ 1692. in 4. plag. 12. Tabb. 9.), in qua de motu tam ſimplici, quam compoſito traduntur, quæ ad motum aquarum explicandum utilia ſunt.

§. 10. *Joannes Baptiſta Balianus* lib. 3. 4 & 5 de motu naturali gravium, ſolidorum & liquidorum (§. 5. cap. 6.) de motu

tu liquidorum, canalium sectionibus & de foraminibus vasis, ad praxin hydraulicæ utilia profert: quorsum etiam spectant Tractatus aliquot *Picardi*, *Rœmeri & Mariotti* supra recensiti (§. 31. c. 1.).

§. 11. *Dominicus Gulielmini* in Mensura Aquarum fluentium (Bononiæ An. 1690. & 1691. in 4. plag. 19. Tabb. 8.) theorias hydraulicas sublimiores ad praxin revocare studet. Nemo autem in theoria hydraulica sublimiora dedit quam Geometræ celeberrimi *Newtonus* in Opere modo laudato (§. 6.) lib. 2. sect. 7. p. 318. & seqq. atque *Varignonius* in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum An. 1699. & 1703. Multa nova & egregia de hoc argumento dedit Geometra insignis *Hermannus* in Phoronomia (§. 17. c. 6.).

§. 12. Quemadmodum vero *Eulerus* theoriam mechanicam perficere studuit (§. 18. cap. 6.), in quam stricturas Londini edidit *Robinson Nourse* sub titulo: *Remarks on Mr. Eulers Treatise of motion*, nobis nondum visas; ita *Daniel Bornoulli*, Medicinæ Professor Basileensis, antea Matheseos sublimioris in Academia scientiarum imperiali Petropolitana, nunc Professor honorarius, similem operam impendit theoriæ hydrostaticæ & hydraulicæ, quam sub titulo: Hydrodynamicæ: sive de viribus & motibus fluidorum Commentarii Argentorati An. 1738. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 16. Tabb. 12.) publici juris fecit, cum hoc opus jam octo annis ante congessisset, dum Petropoli ageret.

§. 13. Ceterum ad hydraulicam quoque facit *Sexti Julii Frontini* de Aquæ ductibus urbis Romæ Commentarius, quem uberrimis notis explicatum Patavii Anno 1722. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 21. Tabb. 15.) in lucem emisit *Joannes Polenus*, Professor Patavinus, cui etiam debentur de Motu aquæ mixto libri duo, quibus multa nova pertinentia ad æstuaria, ad portus atque ad flumina continentur, Patavii A. 1697. in 4. reg. (plag. 18. Tab. 3.) & liber de Castellis, per quæ derivantur fluviorum aquæ, habentibus latera convergentia, qui etiam continet nova experimenta ad aquas fluentes & ad percussionis vires pertinentia & Patavii An. 1738. in 4. (plag. 9.

Tabb. I. ) prodiit. Idem etiam An. 1723. edidit epiſtolam ad *Joannem Jacobum Marinonium*, Mathematicum Cæſareum, in qua præter defectum Solis anno iſto Patavii obſervatum, agitur de aliquibus experimentis pertinentibus ad aquas fluentes & cui ſubjicitur *Joannis Buteonis* libellus de fluentis aquæ menſura cum annotationibus nonnullis, Patavii in 4. ( plag. $3\frac{1}{2}$. Tabb. I. ).

§. 14. Neque ſilentio hic prætereunda ſunt *Marini Merſenni* Phænomena Hydraulica pneumatica, quæ inter Cogitata ipſius Phyſico-mathematica leguntur, in quibus tam naturæ, quam artis effectus admirandi certiſſimis demonſtrationibus explicantur, Pariſiis 1654. in 4. ( Alph. 8. plag. 19. ). In hac nimirum collectione, quæ inter opera mathematica ſuperius commemorari merebatur, reperiuntur 1. Tractatus de menſuris, ponderibus atque nummis tam Hebraicis, quam Græcis & Romanis ad Pariſienſia expenſis, 2. Tractatus, cui titulus: Hydraulica pneumatica, Arsque navigandi, Harmonia theorica, practica, & Mechanica phænomena, 3. Tractatus mechanicus theoricus & practicus, 4. Baliſtica & Acontismologia, in qua ſagittarum, jaculorum & aliorum miſſilium jactus & robur arcuum explicantur, 5. Univerſæ Geometriæ mixtæque Mathematicæ Synopſis & bini refractionum demonſtratarum Tractatus 6. *Ariſtarchi Samii* Tractatus de mundi Syſtemate & Reflexiones Phyſico-mathematicæ, quibus varia adjiciuntur ad præcedentia. In Synopſi tantummodo ſine demonſtratione recenſentur Propoſitiones *Euclidis*, *Petri Rami*, *Archimedis*, *Theodoſii*, *Menelai*, *Maurolyci*, *Apollonii*, *Mydorgii*, *'geometricæ; Pappi*, *Guidonis Utaldi & Stevini mechanicæ.*

§. 15. De motu fluminum ſcripſit *Dechales* in Tractatu de fontibus naturalibus prop. 39. & ſeqq. Tomi III. Mundi Mathemarici f. 137. & ſeqq. ſed paucis plura & abſtruſiora hiſce complexus eſt *Hermannus* in Phoronomia cap. 10. p. 226. & ſeqq. Ex inſtituto de hoc argumento ſcripſit *Dominicus Guliel-mini*, cujus della Natura de Fiumi Trattato Fiſico-Matematico prodiit Bononiæ An. 1697.

in 4. (Alph. 2. plag. 3. Tabb. 15.). Multa in Italia prodiere scripta Italico sermone, in quibus plura ad hoc argumentum spectantia leguntur, occasione controversiæ de Rheno fluvio in Padum deducendo.

§. 16. Inter veteres machinas hydraulicas descripsit *Heron Alexandrinus* in libro spiritalium a *Commandino* in Latinam linguam translato (Parisiis An. 1583. in 4.) Ex recentioribus similem operam collocarunt *Salomon de Caux*, Architectus militaris Electoris Palatini, in libro Gallico de Machinis, præcipue hydraulicis, qui An. 1615. prodiit: *Cesparus Schottus* in Mechanica Hydraulico-pnevmatica Herbipoli 1657. in 4. (Alph. 2. plag. 22. Tabb. 56.) edita, *Dechales* in Mundo Mathematico Tom. III. (§. 4. c. 1.), *Georgius Andreas* Böckler in Architectura Curiosa Germanica (Norimbergæ An. 1704. in fol. plag. 21. Tabb. 200), qui ultra 70. fontium salientium & ultra 120. fontium artificialium formas describit; & *Lucas Antonius Portius* in Nonnullis de fontibus naturalibus, quæ nonnullis de motu corporum subjuncta, possibilitatem inprimis quorundam fontium adstruens, qui a *Plinio* commemorantur. (Neapoli A. 1704. in 4. plag. 7. Tabb. 5.).

§. 17. Denique quæ de Hydrostatica & Hydraulica per plurimos libros & volumina dispersa leguntur, qua theoriam & praxin, uno complexus est & sub titulo: An introduction to a general system of Hydrostaticks and Hydraulicks, Londini 1729. in 4. charta aug. (Alph. 2. plag. 16. Tabb. æn. 60.) edidit *Stephanus Swizer*. Extant etiam in hoc libro descriptiones machinarum, quibus aqua elevatur.

§. 18. Inprimis autem iis, qui praxin solidam Hydraulicæ curæ cordique habent, commendari meretur Architectura hydraulica, quam Gallico idiomate conscriptam Parisiis Anno 1737. in 4. reg. cum 54. Tabulis æneis splendidissimis edidit *de Belidor*. In hoc opere etiam accurata traditur molarum descriptio & quæ ad molas aqua agitandas requiruntur ibidem explanantur. Opus utilissimum in linguam Germanicam verti mereretur.

§. 19. Ad Hydraulicam quidam referunt Libellationem aquarum, de qua nos egimus in Mechanicæ Elementis. Egregium de ea Tractatum conſcripſit *Picardus*, quem *Philippus de la Hire* poſt mortem ipſius Pariſiis An. 1684. in 12. (plag. 15. Tabb. 3.) edidit, unde ſua deſumſere, qui de hoc argumento apud Noſtros ſcripſere, veluti *Leupoldus* atque *Sturmius*, filius. Inter opera *Mariotti* extat quoque de libellatione Tractatus brevis.

---

## CAPUT VIII.

### DE

# OPTICA, CATOPTRICA, DIOPTRICA ET PERSPECTIVA.

§. 1.

OPticæ & Catoptricæ elementa olim conſcripſit *Euclides*, quæ a *Johanne Pena*, Mathematico Regio, Latine verſa Pariſiis A 1604. prodiere. Extant etiam in Curſu Mathematico *Herigonii* (§. 1. cap. 1.) & in editione *Gregoriana* operum *Euclidis* (§. 2 c. 3).

§. 2. Circa annum Chriſti 1100. *Alhazen* Arabs ingens de Optica volumen compoſuit, quod in libros, capita & propoſitiones diſtinxit *Fridericus Risnerus*. Uſus eſt ſcriptis veterum, præertim *Ptolemæi* de Optica libris decem, qui hodie deſiderantur.

§. 3. Cum demonſtrationes *Alhazeni* ſint admodum intricatæ ac prolixæ; *Vitellio* Polonus circa An. 1270. aliud de Optica volumen conſcripſit in libros 10 digeſtum. Pleraque ex *Alhazeno* deſumſit, ſed demonſtrationum fundamenta ex *Apollonio*, *Theodoſio*, *Menelao*, *Theone*, *Pappo & Proclo* petiit. Ad hunc Autorem Paralipomena edidit *Johannes Kepplerus*, quibus Aſtronomiæ pars optica traditur. (Francofurti 1604 in 4. 2. Alph. 15. plag.). Habentur

tur tamen multa quoque alia in hisce paralipomenis, & inter alia modum visionis primus decente ratione explicat Autor. *Alhazenum* & *Vitellonem* uno volumine edidit *Fridericus Risnerus* Basileæ An. 1572. in fol. (Alph. 7. plag. 18.). Titulus libri est: Opticæ Thesaurus. *Alhazeni* Arabis libri septem nunc primum editi. Ejusdem liber de crepusculis & Nubium ascensionibus. Item *Vitellonis* libri X. Omnes instaurati, figuris illustrati & aucti, adjectis etiam in *Alhazenum* commentariis a *Federico Risnero*.

§. 4. Compendium Opticæ antiquæ circa annum 1279. conscripsit *Johannes Peccamus*, Archiepiscopus Cantuariensis & Primas Angliæ (Coloniæ Agrippinæ 1627. in 4. plag. 11.), quale etiam recentius dedit *Ambrosius Rhodius*, Professor Mathematum Wittebergensis, cujus Optica Wittebergæ 1611. cum Tractatu de crepusculis in 8. prodiit (1. Alph. 10 plag.). Uberius eandem exposuit *Risnerus* ante laudatus, cujus Opticæ libri quatuor Cassellis 1606. in 4. prodiere (Alph. 1. plag. 14.).

§. 5. Opticam quoque illustrare aggressus est circa idem tempus *Rogerius Bacon*, Philosophus suo tempore summus, anno 1284. Oxonii mortuus, & ob scientias Mathematicas magiæ accusatus. Ejus Perspectivam in lucem protraxit *Joannes Combachius*, Philos. Professor Marpurgensis, (Francof. 1714. in 4. 1. Alph. 5. plag.): parum tamen Mathematici ea continet, etsi lectu non indigna.

§. 6. Enimvero veteres ea, quæ visionem directam & reflexam concernunt, potissimum explicant: quæ vero ad refractam spectant, nimis imperfecte tradunt. *Johannes Baptista Porta* libris novem de Refractione conscriptis hanc doctrinam melius tradere conatus est (prodiere Neapoli An. 1593. in 4. 1. Alph. 6. plag.); sed parum adhuc profecit. Primus qui Dioptricam meliori habitu induit & lentium sphæricarum proprietates demonstravit accurate, fuit *Johannes Keplerus*, cujus Dioptrica prodiit Augustæ Vindelicorum 1611. in 4. (plag. 14.) & posthac alibi recusa. Præmittuntur epistolæ *Gallilæi* de iis, quæ post editionem Nuncii

siderei

ſiderei ope perſpicilli nova & admiranda in cœlo deprehenſa ſunt, itemque Examen præfationis *Johannis Penæ* in Opticam *Euclidis* de uſu Opticæ in Philoſophia.

§. 7. *Carteſius* in Dioptrica, quæ principiis Philoſophiæ ſubjungi ſolet, veram refractionis legem a *Snellio* inventam, ſed ſuppreſſo inventoris nomine, affert & modum viſionis diſtinctius, quam ab aliis factum fuerat, explicat, lentium ellipticarum & hyperbolicarum proprietates recenſet & praxin poliendi vitra ita docet, ut in ea non ſatis verſatum judicent experti.

§. 8. Theoriam Dioptricæ magis excoluit, novis plerumque demonſtrationibus inventis, *Wilhelmus Molyneux* in dioptrica Nova Anglice conſcripta (Londini An. 1692. in 4. plag. 16. Tabb. 40.), ubi calculo trigonometrico ad eruendas lentium ſphæricarum proprietates juxta veram refractionis legem utitur. Omnium maxime eandem hactenus perfecit *Hugenius*, cujus dioptrica maximam poſthumorum partem conſtituit. Eidem & praxis multum debet: de quo tractatus de poliendis vitris teſtatur, dioptricæ ſubjunctus. Prodiere primum opera poſthuma Lugduni Batav. An. 1703. in 4. (2. Alph. 19. plag. Tabb. 24.), deinde cum aliis recuſa (§. 35. cap. 1.). Opus Hugenianum perfectiſſimum eorum, quæ in hoc genere proſtant: requirit autem lectorem in Geometria probe verſatum.

§. 9. Tyronibus adeo commendandum eſt *Dioptricæ* Tentamen Gallicum *Nicolai Hartſoeker* (Pariſ. An. 1694. 1. Alph. 10. plag.), ubi mnlta quoque ad Phyſicam & praxin ſpectantia traduntur. Ipſe enim in poliendis vitris & opticis technaſmatis erat verſatiſſimus.

§. 10. In ſplendidi Operis dioptrici *Cherubini*, Capucini, Tomo primo, qui ſub titulo: *Dioptrique oculaire* Pariſiis An. 1671. in fol. (5 Alph. 11. plag.) Tabb. 16.) prodiit, multa ad praxin ſpectantia reperiuntur. In altero Tomo, qui ſub titulo: *La viſion parfaite* Pariſiis 1678. in fol. (3. Alph. 10. plag. Tab. 23. lucem adſpexit, argumentum palmarium eſt tubus binoculus, cujus ſub finem tomi primi mentionem injecerat.

§. 11.

§. 11. Opticam sine Catoptrica & Dioptrica tradit *Christophorus Scheinerus*, e Societate Jesu, in Oculo (Oeniponti 1619. in 4. 1. Alph. 10. plag.). Ab iis potissimum legendus, qui rationes phænomenorum visionis directæ cognoscere gestiunt.

§. 12. Vir summus *Newtonus* in egregio Optices opere novas luminis proprietates, ante nondum animadversas, & quarum consideratio (ceu ex *Hugenii* dioptrica apparet) maximi in Dioptrica momenti, per experimenta edocet. Prodiit opus primum Londini An. 1704. in 4. reg. (2. Alph. 5. plag.) sub titulo: *Opticks or a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and coleurs of Light.* In fine adjiciuntur duo Tractatus Latini, primus scilicet de enumeratione linearum tertii ordinis, alter de Quadratura curvarum. Ipsum in Latinam linguam transtulit *Samuel Clarke* Autore approbante & nonnulla adjiciente (Londini An. 1706. in reg. 4. 2. Alph. 9. plag. Tabb. 19.) An. 1719. ibidem prodiit versionis editio altera in 4. (Alph. 2. plag. 8. Tabb. 12.), ubi quæstiones adjectæ augentur, sed Tractatus geometrici omittuntur, quos in Analysi sua ediderat *Jones* (§.21. cap. 4.). Post mortem *Newtoni* Londini 1729. in 4. (Alph. 1. plag. 14. Tabb. 24.) prodierunt Lectiones ejus opticæ An. 1669. 1670 & 1671 in Scholis publicis habitæ. In his equidem multa continentur quæ in Optica leguntur, alia tamen prorsus ratione proponuntur. Reperiuntur hic, quæ alibi frustra quæsiveris.

§. 13. Huc etiam referri potest *Mariotti* Tentamen de Coloribus (Paris. An. 1681. in reg. 12. Alph. 1. plag. 9. Tabb. 16.) quod Tentaminum Physicorum Gallice conscriptorum quartum est, & in editione Batava operum ipsius legitur, atque *Hugenii* Tractatus Gallicus de Lumine (Lugd. 1690. in 4. 1. Alph. 2. plag.), qui in Operum reliquorum volumine primo extat. Ejus hypothesi in explicandis phænomenis opticis utitur *Petrus Ango* in Optica Gallica (Paris. An. 1682. in 12.).

§. 14. *Andreas Tacquet* in Optica Perspectivæ fundamenta jecit & in Catoptrica speculorum planorum & sphæricorum pro-

proprietates bene demonſtrat. (§. 28. cap. 1.), ſed Dioptricam non attingit. *Iſaacus Barrowius* in Lectionibus Opticis, quæ Lectionibus Geometricis præmittuntur (§. 19. cap. 3.), theoriam Catoptricæ & Dioptricæ demonſtrat. Nec dubitamus, quin *Jacobus Gregorius* in Optica promota multa præclara dederit, etſi nobis non viſa. An. 1663. in 4. lucem adſpexit.

§. 15. Utriusque Compendium dedit *David Gregorius* in Elementis Dioptricæ & Catoptricæ ſphæricæ (Oxonii 1695. in reg. 8. plag. 7.). Idem in linguam Anglicam vertit *Wilhelmus Browne*, M. D. & prolixum ſupplementum adjecit atque Introductionem præmiſit. Prodiit ſecunda vice cum appendice J. T. *Deſagulieurs*, L. L. D. de teleſcopio reflectente cum epiſtolis, quas de eodem *Newtonus* & *Jacobus Gregorius* ad ſe invicem ſcripſere, Londini A. 1735. in 8. reg (plag. 20. Tabb. 4.). Prima teleſcopii catoptrico-dioptrici idea debetur *Gregorio*, qui eam deſcribit in Optica promota p. 94. Sed eam perfecit *Newtonus* & tandem feliciſſime iſtiusmodi teleſcopium conſtruxit *J. Hadley*, atque nunc conſtruuntur ab *Eduardo Scarlet*, Optico Regio, ejusque filio. Deſcripſimus idem in Elementis Dioptricæ noſtris.

§. 16. Opticam, Catoptricam & Dioptricam una expoſuit *Zacharias Traberus*, e Societate Jeſu, in Nervo Optico (Viennæ A. 1675. in fol. 2. Alph. 16. plag. Tabb. 28.). Multa in praxi jucunda habet, ſed theoria exigui momenti. Quoad praxes opticas opus abſolutum cenſeri poteſt *Johannis Zahn* Oculus artificialis telediopricus. Editio altera auctior, ſed vitioſior prodiit Norimbergæ An. 1702. in fol. (9. Alph. 8. plag.) cum figuris multis cum ligno, tum æri inciſis. Huc etiam ſpectat *Athanaſii Kircheri* Ars magna lucis & umbræ (Romæ 1646. in fol. 10. Alph. 16. plag. Tabb. 34.).

§. 17. *Johannes Chriſtophorus* **Kolhans** in Tractatu Optico (Lipſ. 1663. in 8. 1. Alph. 15. plag.) non contemnenda prorſus dedit excerpta cum ad theoriam, tum ad praxin opticam ſpectantia, retentis ipſorummet Autorum verbis. Omnes

tres

tres Opticæ partes diſcurſu vulgari recenſuit in gratiam artificum *Johannes Michaël Conradi* in Optica Germanica, quam ſub titulo: **der dreyfach geartete Sehe-Strahl** Coburgi An. 1710. in 4. edidit (plag. 17. Tabb. 25.).

§. 18. De poliendis vitris Commentarios reliquit *Hugenius*, qui inter poſthuma leguntur (§. 35). Hac arte excelluit ipſe: primus enim lentes objectivas tanta exactitudine paravit, ut iis pares nullibi reperirentur, quemadmodum in Aſtronomicis docuimus & Dioptricis. In Germania An. 1716. in 8. (plag. 14. Tab. 20.) Halæ prodiit ſub titulo: **Christian Gottlieb Hertels vollständige Anweisung zum Glasschleiffen, wie auch zu Verfertigung der optischen Maschinen.** Erat Autor Matheſeos Profeſſor in Academia illuſtri Lignicenſi & in arte poliendi vitra plurimum exercitatus. Eandem notis illuſtravit *Joannes Georgius Leutmannus*, qui & ipſe hanc artem non ſine ſucceſſu excoluerat. Prodierunt Wittebergæ An. 1719. in 8. (plag. 7. Tabb. 21.) ſub titulo: **Neue Anmerckungen vom Glasschleiffen.**

§. 19. Scriptis opticis accenſeri merentur ea, in quibus microſcopicæ obſervationes recenſentur. Pertinent huc 1. *Roberti Hooke* Micrographia Anglice ſcripta (Londini An. 1667. in fol. 3. Alph. 8. plag. Tab. 38.) 2. *Antonii van Leeuwenhoek* ſcripta varia; nempe *α*) Arcana Naturæ detecta Delphis 1695. in in 4. (Alph. 2. plag. 6. Tab. 11.) *β*) Continuatio Arcanorum Naturæ detectorum Ibid. An. 1697. in 4. (Alph. 1. plag. 2. Tab. 7.) *γ*) Arcana Naturæ ope & beneficio exquiſitiſſimorum microſcopiorum detecta Lugd. Batav. An. 1696. in 4. Alph. 3. Tab. 26.) *δ*) Continuatio epiſtolarum datarum ad longe celeberrimam Regiam Societatem Londinenſem Lugd. Batav. 1696. in 4. (plag. 16½. Tab. 10.) *ε*) Epiſtolæ ad Societatem Regiam Anglicam & alios illuſtres viros, Lugd. Bat. 1719. in 4. (Alph. 2. plag. 11. Tab. 33.). *ζ*). Epiſtolæ phyſiologicæ ſuper compluribus naturæ arcanis, Delphis 1719. in 4. (Alph. 2. plag. 16. Tab. 31). Titulus generalis: *Antonii a Lee-*

wenhoek *Opera omnia, seu Arcana naturæ ope exactissimorum microscopiorum detecta, experimentis variis comprobata, epistolis ad varios illustres viros, ut & ad integram, quæ Londini floret, sapientem Societatem datis comprehensa* impressus Lugduni Batavorum & scriptis istis diverso tempore nec eadem prorsus forma editis in unum fasciculum collectis præfixus. 3. *Johannis Francisci* **Griendels von Aach** Micrographia curiosa Germanica (Norimbergæ 1687. in 4. plag. 9. Tab. 35.) 4. *Philippi Bonanni* Micrographia curiosa, adjuncta observationibus circa viventia, quæ in rebus non viventibus reperiuntur (Romæ An. 1691. in 4. 2. Alph. 12. plag. Tab. 68.)

§. 20. Inter scriptores Perspectivæ omnium maxime commendatur *Desargues*, cujus methodum universalem exercendi Perspectivam gallice conscriptam edidit *Abrahamus Bosse*, ex Gallico in Belgicum sermonem transtulit J. *Bara*. Prodiit Amstelodami 1686. in 8. (plag. 12. & figurarum æri incisarum 1. Alph.)

§. 21. Nec parum Perspectivæ studiosum juvant *Andreæ Alberti* Libri duo de Perspectiva, Norimb. An. 1670. in fol. plag. 19. Tab. XV.): primis vero tyronum conatibus respondet *Bernhardi Lamy* Perspectiva Gallice conscripta (Parisiis A. 1701. in 8.)

§. 22. Concinnas Praxium Perspectivæ demonstrationes dedit *Joh. Franciscus Niceron* ex Ordine Minimorum, in hac arte excellens, in Thaumaturgo Optico, cujus tantum pars prima Parisiis 1646. in fol. prodiit (2. Alph. 18. plag. Tab. 42). Post mortem ejus immaturam anno 1652. prodiit Perspectiva curiosa Gallice conscripta in 4. sub ejusdem nomine, in libros quatuor divisa, in qua plura continentur, quam in Thaumaturgo.

§. 23. Ad praxin properantibus & theoriam spinosam aversantibus satisfacit Anonymus Gallus e Societate Jesu in Perspectiva practica Gallice Parisiis 1642. in 4. publicata & a *Johanne Christophoro Remboldo* Germanice versa atque Augustæ Vindelicorum An. 1710. in 4. edita (1. Alph. 8. plag. cum 150

Tabulis æri incisis atque textui insertis). Enimvero A. 1663. prodiit editio altera duabus partibus & auctior, & quoad primam emendatior ac locupletior. (Tom. I. Alph. 2. plag. 10. Tom II. Alph. 1. plag. 13. Tom. III. Alph. 2. plag. 8.). In parte secunda docetur Perspectiva corporum inclinatorum: in tertia agitur de laquearibus & anamorphosibus opticis, catoptricis & dioptricis.

§. 24. Praxin Perspectivæ multis exemplis illustrat *P. Andreas Puzzo* in Architectura Pictorum & Sculptorum. Tomus prior prodiit Romæ 1693. in fol. posterior ibidem A. 1700. in fol. Uterque totidem continet Tabulas æneas, quot folia, nimirum prior 102; posterior 120. Prior Germanice prodiit Augustæ Vindelicorum An. 1706. in fol. posterior ibidem An. 1709.

§. 25. An. 1711. *G. J. Gravesandius*, Juris Doctor, nunc Mathematum Professor Lugdunensis, Hagæ Comitum idiomate Gallico evulgavit Tentamen de Perspectiva, in 8. (plag. 12. Tab. 32.). Titulus libelli: *Essai de Perspective*, in quo multiplices regulas seu methodos demonstrat.

§. 26. Cæterum scriptoribus Opticis adhuc accensendus est *Honoratus Fabri*, e Societate Jesu, qui in Synopsi Optica (Lugd. An. 1667. in 4. 1. Alph. 8. plag.) illa omnia, quæ ad Opticam, Dioptricam & Catoptricam pertinent, breviter quidem, accurate tamen demonstrat.

## CAPUT. IX.

## De

# ASTRONOMIA.

§. 1.

Scripta astronomica sunt varii generis. Aut enim observationes recensent, aut calculos motuum cœlestium trigonometricos & geometricos exponunt, aut tabulas Astronomicas complectuntur, aut usum

 globi

globi cœleſtis, aut denique corporum mundanorum rationem declarant.

§. 2. Veterum obſervationes, quas inter eminent obſervationes *Hipparchi*, conſervavit *Ptolemæus* in Almageſto. A. 882. apud Saracenos obſervationibus operam dedit *Albategnius*. Ab An. 1457. Norimbergæ iisdem incubuit *Johannes Regiomontanus* (vero nomine Müller), cui ſucceſſere diſcipuli *Johan. Wernerus* & *Bernhardus Waltherus*, ab A. 1475. usque ad A. 1504. obſervationes ſuas continuantes. *Regiomontani* atque *Waltheri* obſervationes prodiere Norimbergæ cum quibusdam aliis *Regiomontani* atque *Purbachii* ſcriptis An. 1544. in 4. (plag. 22). Titulus operis: Scripta *Johannis Regiomontani* de Torqueto, Aſtrolabio armillari, Regula magna Ptolemaica baculoque Aſtronomico & obſervationibus cometarum; item obſervationes motuum Solis ac ſtellarum tam fixarum, quam erraticarum; item libellus M. *Georgii Purbachii* de Quadrato Geometrico. Ab An. 1509. *Copernicus*, poſt eum *Wilhelmus* Haſſiæ Landgravius cum Mathematico *Chriſtophoro Rothmanno* & Mechanico ſuo *Juſto Byrgio* Caſſellis & *Tycho de Brahe* Uraniburgi obſervarunt. Incepit obſervationes ſuas *Tycho* A. 1582. easque continuavit usque ad A. 1601. majori & meliori inſtrumentorum apparatu, quam ante ipſum fecerat nemo. Omnes obſervationes hactenus recenſitæ continentur in *Hiſtoria cœleſti*, quæ juſſu *Ferdinandi* III. Imperatoris Ratisbonæ 1672. in fol. prodiit (12. Alph. 6. plag. Tab. III.). Deſcribuntur quoque in eadem inſtrumenta *Tychonis*, una exhibentur obſervationes *Mœſtlini*, *Schickhardi* aliorumque. Ipſe alias *Tycho* inſtrumenta ſua deſcripſit A. 1602. in Aſtronomiæ inſtauratæ Mechanica Norimbergæ An. 1602. in fol. edita (Alph. 1. plag. 11.). *Wilhelmi* vero Haſſiæ Landgravii obſervationes una cum obſervationibus *Regiomontani* atque *Waltheri* edidit *Willebrordus Snellius* Lugduni Batavorum An. 1618. in 4. (Alph. 1. plag. 13.).

§. 3. Magis ſumtuoſo inſtrumentorum apparatu & majori ſtudio, quam *Tycho*, obſervationibus cœleſtibus vacavit *Johannes*

*hannes Hevelius*, Consul Dantiscanus. Instrumentorum apparatum descripsit Tomo primo Machinæ cœlestis (Gedani 1673. in fol. reg. 5. Alph. 4. plag. Tab. 30): Tomo secundo (Gedani A. 1679. in fol. 14. Alph. 6. plag.) observationes 48. annorum comprehendit. Dolendum vero, quod Tomi præsertim posterioris exemplaria pleraque ferali flamma fuerint absumta. Equidem *Robertus Hooke* in Animadversionibus in Tomum primum Anglico sermone editis Londini 1674. in 4. (plag. 11. Tab. æn. 3) instrumenta *Heveliana* reprehendit ceu minus exacta; sed celeberrimus *Hallejus* consensu Societatis Regiæ Britannicæ Dantiscum A. 1679. profectus & instrumentorum, & observandi accurationem approbavit. Observationes, quas in gratiam hospitis instituit, una cum aliis reperiuntur in Anno climacterico s. Rerum Uranicarum observationum quadragesimo nono (Gedani 1685. in fol. 2. Alph. 6. plag. Tab. 8). Jam ante An. 1661. celeberrimus Galliæ Astronomus *Ismaël Bullialdus* Dantiscum venit Observatorium *Hevelii* visurus & modum ejus observandi examinaturus. Quid uterque, *Bullialdus* nimirum atque *Hallejus*, de eodem senserint; docent *Excerpta ex literis illustrium & clarissimorum virorum ad* DN. Joh. Hevelium *perscriptis Judicia de rebus astronomicis ejusdemque scriptis*, quæ Dantisci An. 1683. in 4. (Alph. 1. plag. 5.) edidit *Joannes Ericus Olhofius* p. 67. 68. 71. 79. 187.

§. 4. In Anglia seculo superiori observandi studio clarus extitit *Jeremias Horoccius* ab A. 1636. usque ad A. 1640. Ejus observationes ex epistolis ad *Guil. Crabtrium*, suum in studiis astronominicis socium, excerptæ leguntur in operibus posthumis (Londini 1673. in 4. 3. Alph. 12. plag. Tab. 2). Adjiciuntur excerpta ex schediasmatis *Guil. Crabtrii* de observationibus ab ipso institutis A. 1635. 36. 37. & 38.

§. 5. In Italia *Joh. Baptista Ricciolus* superiori seculo observatorem egit, qui præcipuas observationes suas in Astronomia Reformata (Bononiæ 1665. in fol. 6. Alph. 5. plag.) cum selectis veterum & recentiorum observationibus contulit & de

Astro-

Aſtronomiæ perfectione inde judicium tulit.

§. 6. Selectæ celeberrimi *Caſſini* aliorumque obſervationes extant in præſtantiſſimo opere, cujus titulus: *Recueil d' obſervations faites en plusieurs voyages par ordre de ſa Majeſté, pour perfectionner l' Aſtronomie & la Geographie, avec divers Traitez Aſtronomiques par Meſſieurs de l' Academie Royale des Sciences.* (Pariſ. 1693. in fol. 6. Alph. 12. plag. Tabb. 11.). Vide ſupra §. 37. c. 1. Ejusdem *Caſſini*, aliorumque Aſtronomorum Regiorum, *Caſſini junioris*, *Maraldi* atque *Philippi de la Hire* obſervationes complures extant in Commentariis Academiæ Regiæ Scientiarum, qui quotannis prodeunt: de quibus ſupra (§. cit.). Habemus quoque obſervationes non contemnendas in Transactionibus Anglicanis, Miſcellaneis Berolinenſibus, Commentariis Petropolitanis, Actis Eruditorum & Diario Trevoltienſi. Vide ſupra (§. 36. 38. 39.).

§. 7. In Anglia longa annorum ſerie obſervationes cœleſtes continuavit obſervator celeberrimus *Joannes Flamſtedius.* Quænam in hiſtoria ejus cœleſti, ab Aſtronomis dudum deſiderata, eſſent comparitura, in Miſcellaneis Berolinenſibus p. 263. & ſeqq. docetur A. 1712. Hiſtoriam cœleſtem *Flamſtædii* edidit *Hallejus* Londini in fol. reg. (Alph. 6. plag. 8. Tab. 5.) Libris duobus, quorum prior exhibet Catalogum ſtellarum Fixarum Britannicum novum & locupletiſſimum una cum earundem Planetarumque omnium obſervationibus ſextante, Micrometro &c. habitis; poſterior tranſitus ſiderum per planum arcus meridionalis & diſtantias eorum a vertice complectitur. Nimirum An. 1704. aliquot Societatis Regiæ Sodalibus, *Francisco* nimirum *Robartes*, *Chriſtophoro Wrenno*, *Iſaaco Newtono*, *Davidi Gregorio & Joanni Arbuthnot* ex chartis *Flamſtædii* obſervationes ejus edendas ſuis ſumtibus commiſerat ſereniſſimus Daniæ Princeps *Georgius*, Reginæ *Annæ* conjux: Sed cum moreretur, antequam liber obſervationum primus abſolveretur, tandem Regina, *Flamſtædii* oculis in naſcentia indies ſiderum phænomena intentis & in ætate provecta minus acutis, hanc curam demandavit *Edmundo*

*Halle-*

*Hallejo*, ut ea quæ adhuc deerant perficeret. Enimvero cum editio non prorſus eſſet ad mentem *Flamſtædii*, de nova ipſe cogitavit: cui tamen immortuus eſt An. 1719. die ultima Decembris, cum magna ejus pars typis jam eſſet deſcripta, ita ut tandem denuo *Hallejus* editionem hanc novam ad umbilicum perducere teneretur. Prodiere itaque Hiſtoriæ cœleſtis Britannicæ Volumina tria, Autore *Joanne Flamſtædio*, Aſtronomo Regio, Londini in fol. maj. A. 1725. (Alph. 13.). Volumen I. continet ſtellarum fixarum & planetarum omnium obſervationes, ſextante & micrometro peractas, ſubjunctis locis, quæ ex obſervationibus deducta ſunt. Volumen II. complectitur fixarum ſtellarum & planetarum omnium tranſitus, per planum arcus meridionalis & diſtantias eorum a vertice, nec non Solis, Lunæ & Satellitum Jovis obſervationes arcu meridionali habitas & loca planetarum inde derivata ab An. 1689 ad An. 1720. Volumen III. comprehendit Hiſtoriam Aſtronomiæ, Catalogos fixarum ante autorem editos una cum *Abrahami Scharpii* Indice fixarum auſtralium in noſtro hemisphærio non conſpicuarum & Catalogum Britannicum Autoris ad A. C. 1689. cui ſubjunguntur longitudines & latitudines ſtellarum fixarum, quæ a Luna tegi poſſunt, ſigillatim & appendicula Tabularum aſtronomicarum a *Scharpio* conſtructarum. Optandum quoque foret, ut ſelectæ obſervationes Hafnienſes *Rœmeri*, Berolinenſes *Kirchii* ac viduæ ipſius, Norimbergenſes *Eimarti* atque *Wurtzelbaueri* lucem publicam adſpicerent.

§. 8. *Franciſci Blanchini* obſervationes aſtronomicas & geographicas per Italiam paſſim habitas nuperrime Veronæ in fol. edi curavit *Euſtachius Manfredi*, Aſtronomus Bononienſis.

§. 9. Obſervationes phyſicæ, mathematicæ atque botanicæ juſſu Regis Chriſtianiſſimi in America Meridionali & India occidentali ab A. 1701. usque ad annum 1712. a *Ludovico Feuillée*, Minimo, factæ ſub titulo: *Journal des Obſervations phyſiques, mathematiques & botaniques* prodiere Pariſiis duobus Volum. in 4. reg. 1714. & 1725.

(Vol. I. Alph. 4. plag. 6. Tab. æn. 66. Vol. II. Alph. 3. plag. 5. Tab. æn. 57. & A. 1729. *E. Souciet*, e Societate Jesu, idiomate Gallico Parif. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 18. Tab. 8.) publicæ luci exposuit observationes mathematicas, astronomicas, geographicas, chronologicas & physicas ex antiquissimis Sinarum libris exceptas & recentius a Patribus Societatis in India & China factas. Addit An. 1732. Tomum secundum, qui continet Historiam Astronomiæ Sinarum a R. P. *Gaubil* e Societate Jesu conscriptam cum dissertationibus (Alph. 2. plag. 5. Tab. 3.). Huc etiam referendæ sunt *Francisci Noel*, Societatis Jesu, Observationes mathematicæ & physicæ in India & China factæ ab An. 1684. usque ad An. 1708. quæ Pragæ 1710. in 4. (plag. 14. Tab. 1.) prodierunt.

§. 10. Astronomiam Geometricam inter veteres justo volumine exposuit *Claudius Ptolemæus* anno Christi 147. mortuus. Opus ejus, quod μεγάλη Σύνταξις inscribitur, A. C. 827. jussu *Maimonis* Regis Saracenorum in Arabicum translatum & A. 1528. ex Arabico in Latinum versum a *Georgio Trapezuntio* & a *Luca Gaurico* Mathematum Professore Neapolitano revisum illoque anno primum editum. An. 1551. idem cum ejusdem *Ptolemæi* scriptis Astrologicis, libris nempe quatuor de judiciis, Centiloquio & significationibus stellarum inerrantium sub titulo: Cl. *Ptolemæi omnia, quæ extant, Opera præter Geographiam*, Basileæ in fol. (6. Alph.) opera *Erasmi Oswaldi* recusum.

§. 11. Cum ipsum Astronomiam integram complectatur, sed ad captum tyronum minime sit accommodatum; *Georgius Purbachius* in commodiorem formam id redigere cœpit. Sed cum vix cœpto labore rebus humanis valedicere cogeretur; *Regiomontanus* discipulus suasu Præceptoris telam pertextam absolvit. Recusi sunt ejus Libri tredecim in *Ptolemæi* magnam compositionem, quam Almagestum vocant, Norimbergæ 1550. in fol. (2. Alph. 11. plag.) & in iis universa doctrina de cœlestibus motibus, magnitudinibus, eclipsibus &c. in epitomen redacta proponitur. Commendantur merito Astronomiæ studiosis, præsertim si qui Astro-

nomiam

nomiam veterem cognoſcere in animum induxerint.

§. 12. Juxta formam *Almagesti* inter Arabes *Albategnius* opus de Scientia ſtellarum compoſuit, Norimbergæ 1537. & Bononiæ 1545. in 4. editum, in quo ex propriis obſervationibus Aſtronomiam perficere ſtudet.

§. 13. Seculo decimo ſexto *Nicolaus Copernicus* in libris 6. Revolutionum cœleſtium aliquoties recuſis, reſuſcitato *Philolai* de motu Telluris dogmate, primus ad theoriam cœlo conſonam fundamenta poſuit. Proſtat inter alias editiones Baſileenſis A. 1566. in fol. (Alph. 4. plag. 14.). *Copernicum* ſecutus *Philippus Lansbergius* theorias motuum cœleſtium faciles dedit (§. 26. cap. 1.).

§. 14. Ex adverſo autem *Christianus Severinus Longomontanus* in Aſtronomia Danica, in qua integram Aſtronomiam pertractat & regulas exemplis veris illuſtrat, theorias intricatiores propoſuit, cum motum Telluris annuum circa Solem in Aſtronomiam cum *Tychone* admittere nollet. (Amſtelod. 1640. in fol. 6. Alph.). Etenim extra omnem controverſiam poſitum eſt, motus Planetarum per hypotheſin Terræ motæ non modo facilius, quam in hypotheſi Terræ quieſcentis explicari poſſe; verum etiam loca planetarum in iſta computata cum cœlo demum conſentire. Unde etiam Inquiſitores in Italia permittunt, ut eadem utantur Aſtronomi, etſi eam pro veritate demonſtrata venditari non ferant.

§. 15. Omnes omnino Aſtronomi usque ad *Keplerum* motum planetarum circularem ſtatuerunt: unde theoriæ ipſorum cœlo non ſatis reſponderunt. Hanc Aſtronomiam circularem omnium optime expoſuit *Andreas Tacquet* in octo de Aſtronomia libris (§. 28. cap. 1.). Dolendum vero, quod præcepta nullis exemplis illuſtraverit, ut magis inſervirent ſtudiis tyronum.

§. 16. Enimvero vir acerrimi judicii ingeniique ſagaciſſimi *Johannes Keplerus* obſervationibus *Tychonis* (quas eiam adhibuerunt *Longomontanus* atque *Lansbergius*) feliciſſime uſus in Commentariis de motibus ſtellæ Martis ſeu Aſtronomia nova αἰτιολογητῷ (A. 1609. in fol. (4. Alph.

Alph.) theoriam planetarum ellipticam proposuit & in Epitome Astronomiæ Copernicanæ (Franc. 1635. in 8. 2. Alph. 15. plag.) ad omnium planetarum motus supputandos adhibuit ac primus in causas physicas motuum cœlestium inquirere cœpit. Hanc theoriam causis physicis convenientem demonstravit *Newtonus* lib. 3. Princ. Mathem. Philos. Nat. itemque *Leibnitius* in Tentamine de causis motuum cœlestium physicis, quod legitur in Actis Eruditorum A. 1689. p. 82. quod idem suo modo ostendere conatus *Philippus Villemot* in Novo systemate motus Planetarum Lugduni An. 1707. in 12. (plag. 12. Tab. 12.) edito. Phænomenis rectius, quam coeteras hypotheses, satisfacientem deprehenderunt Astronomi.

§. 17. Equidem *Kepleri* inventa sprevit *Lansbergius* suaque iisdem anteposuit: sed optime illum contra hujus insultus defendit *Horoccius* in posthumis (§. 4.), qui in extollendis laudibus *Kepleri*, a quo sub initium studii astronomici *Lansbergii* magnificis promissis & nimium acerbis in *Keplerum* stricturis factus fuerat alienior, veluti extra seipsum rapitur.

§. 18. *Ismaël Bullialdus* in Astronomia Philolaica (Parisiis 1645. in fol. 7. Alph. 20 plag.) *Kepleri* theoriam emendare conabatur, ut scilicet calculus magis geometricus fieret, cum *Keplerus* regula positionum interdum uti cogatur (§. 691. *Astron.*): ostendit vero *Sethus Wardus*, Astronomiæ in Academia Oxoniensi Professor, in Inquisitione in Astronomiam Philolaicam *Bullialdi*, quæ Tractatui de Cometis subjecta prodiit Oxonii A. 1653. in 4. (plag. 14), errores quosdam ab ipso fuisse commissos: quos agnoscens *Bullialdus* in Fundamentis Astronomiæ Philolaicæ clarius explicatis & assertis adversus *Wardi* impugnationem (Parisiis An. 1657. in 4. plag. 7.) emendavit. Cæterum *Wardus* Ideæ quoque Trigonometriæ demonstratæ, quæ cum prælectione de Cometis Oxonii 1654. in 4. (plag. 3.) prodiit, inquisitionem aliquam in *Bullialdi* Astronomiæ Philolaicæ fundamenta adjecit.

§. 19. *Sethus Wardus* in Astronomia Geometrica (Londini

ni 1656. in 8. reg. $14\frac{1}{2}$. plag.) methodum geometricam proposuit motus siderum computandi; sed a veris motuum regulis per *Keplerum* stabilitis recedit. Eandem anno sequenti proposuit *Comes de Pagan* in Theoria Planetarum Parisiis A. 1657. in 4. idiomate patrio edita. Non ignoravit eam *Keplerus*; sed ex Epitome Astronomiæ Copernicanæ haud obscure colligitur, quod ideo rejecerit, quia veris naturæ legibus adversam reperit.

§. 20. *Bullialdi* hypothesin excoluit *Vincentius VVing* in Astronomia Britannica (Londini A. 1669. in fol. 7. Alph. 5. plag.) ubi præcepta singula Astronomiæ practicæ veris exemplis illustrantur ad captum tyronum studii Astronomici. Præmittit Trigonometriam tam planam & sphæricam, in qua exemplis illustrantur problemata, & in sphærica exhibet regulam catholicam *Neperi*.

§. 21. *VVardianam* ad numeros revocavit *Johannes Newton* in Astronomia Britannica patrio sermone conscripta (Lond. 1657. in 4. 1. Alph. 20 plag.). Eandem excoluit *Thomas Streete* in Astronomia Carolina Londini 1661. in 4. (plag. 29.) primum edita & non sine augmento ibidem 1710. in 4. (2. Alph. plag. 3.) recusa. Id peculiare habet, quod motum Apheliorum & Nodorum sustulerit. Astronomiam hanc Carolinam ex idiomate Anglico in Latinum transtulit Gabriel Doppelmayer & Norimbergæ An. 1705. in 4. (Alph. 1. plag. 13. Tab. 5.) edidit.

§. 22. Omnia Astronomorum tam veterum, quam recentiorum hypotheses atque inventa, quæ tunc temporis prostabant, in unum volumen congessit *Johannes Baptista Ricciolus* e Societate Jesu in Almagesto Novo (Bon. A. 1651. in fol. $16\frac{1}{2}$ Alph.). Contra *David Gregorius* in Elementis Astronomiæ Physicæ & Geometricæ (Oxoniæ 1702. in fol. 5. Alph. 12. plag.) recentiorem Astronomiam exposuit, *Copernici*, *Kepleri* atque *Newtoni* inventis superstructam, quorum ille verum systema mundi, iste veras planetarum orbitas ac motuum leges, hic tandem omnium causas physicas detexit. Multum præstantiæ operis accederet, si numeris ex recentioribus obser-

vationibus illustraretur. In Anglia in linguam Anglicam versa sunt hæc Astronomiæ elementa: Latina vero recusa sunt Genevæ A. 1726. in 4. (Alph. 5. Tab. 46.) cum nonnullis additamentis.

§. 23. Nucleum Astronomiæ recentioris exhibuit *Guilielmus VVhiston* in Prælectionibus Astronomicis (Cantabrigiæ 1707. in 8. reg. 1. Alph. 6. plag.) solam tamen partem theoricam perstingit. Idem fuit institutum *Joannis Keill* in Introductione ad veram Astronomiam (Oxoniæ 1718. in 8. Alph. 1. plag. 9½. Tabib. 2.), in qua recentissima continentur Astronomorum inventa. Alias Tyronibus inprimis commendandi sunt *Nicolai Mercatoris* Institutionum Astronomicarum Libri duo (Londini A. 1676. in 8. 1. Alph.), in quo & Sphærica, & theorica juxta hypotheses tam veteres, quam recentiores breviter explicatur & exemplis illustratur, calculus quoque stronomicus perspicue docetur.

§. 24. Quodsi cui volupe fuerit, theoricas veterum animi gratia cognoscere; ei satisfaciet *Purbachius* in Theoricis Planetarum sæpius editis. Recusæ sunt Basileæ An. 1569. in 8. cum *Regiomontani* disputationibus contra Cremonensia in planetarum theoricas deliramenta & *Johannis Essleri* speculo Astrologico (plag. 18.). Accessere huic editioni *Christiani VVurstisii*, Mathematum Professoris Basileensis, quæstiones novæ in illas theoricas (1. Alph. 5. plag.). Explicat autem *Purbachius* in tyronum gratiam solas theoricas planetarum, forma calculi geometrici neglecta, quæ ex *Regiomontani* Epitome Almagesti *Ptolemæi* hauriri debet. Hasce Theoricas prolixo ac perspicuo Commentario illustravit *Erasmus Oswaltus Schreckenfuchsius*, qui Basileæ An. 1556. in fol. (Alph. 5. plag. 5.) prodiit, ita ut Astronomiam veterem, qualem tradidit *Ptolemæus*, omnium optime ex hoc opere haurire possint tyrones. Theoricam Astronomiam tantummodo explicavit in gratiam tyronum *Purbachius*, quia isto tempore in Scholis doctrina sphærica tradebatur ex *Joannis de Sacro Bosco* libello de Sphæra, sæpissime recuso, quem prolixo Commentario illustravit *Clavius*

*vius* Tomo tertio Operum (§. 24.). *Michaël Mœstlinus*, Matheseos Professor Tubingensis, *Kepleri* Præceptor, in Epitome Astronomiæ (Tubingæ A. 1610. in 8. 1. Alph. 12. plag.) non modo theoricas Planetarum, sed & partem Astronomiæ sphæricam explicat.

§. 25. Tabulæ Astronomicæ antiquissimæ sunt *Ptolemaicæ*, in *Ptolemæi* Almagesto; sed hodie cum cœlo non amplius consentiunt. Eas A. 1252. corrigi curavit *Alphonsus* XI. Rex Castiliæ, usus inprimis opera *Isaaci Hazan* Judæi, impensis 400000. aureorum factis. Hinc enatæ sunt *Tabulæ Alphonsinæ*, quibus ipse Rex præfationem præmisit. Sed mox harum etiam defectum agnoverunt Astronomi periti *Purbachius* & *Regiomontanus*: unde *Regiomontanus* & post ipsum *Waltherus* atque *VVernerus* observationibus cœlestibus incubuerunt; non tamen fata permisere, ut iis emendandis manum admoverent. Sane Tabulæ resolutæ, quas dedit *Regiomontanus*, ex Alphonsinis derivatæ. Hasce correctas & locupletatas edidit *Schonerus* An. 1536. & reperire licet in Operibus ejus mathematicis, de quibus postea dicemus. Neque ab his abludunt Tabulæ resolutæ de supputandis siderum motibus *Joannis Virdungi Haffurdii*, quas A. 1542. Norimbergæ edidit *Jacobus Curio*, nunquam antea typis excusas, in 4. (plag. 15.), nisi quod sint breviores.

§. 26. *Nicolaus Copernicus* in libris Revolutionum cœlestium tabulis Alphonsinis alias substituit ex recentioribus & partim propriis observationibus a se supputatas; sed ex Copernici observationibus & theoriis mox *Erasmus Reinholdus* Tabulas Prutenicas procudit, aliquoties recusas. Utor ego editione Tubingensi A. 1571. (in 4. 2. Alph. 15. plag.).

§. 27. Tabularum Prutenicarum imperfectionem juvenis agnovit *Tycho de Brahe*: qua agnita permotus, ut tanto cum fervore observationes cœlestes venaretur. Ipse tamen nonnisi Solis ac Lunæ motus inde restituit Progymnasmatum Tomo primo. Sed mox iisdem utebantur *Longomontanus*, qui in Astronomia Danica exemplo *Ptolemæi* & *Copernici* theoricis singulorum Planetarum tabulas

bulas motuum ſnbjunxit, *Danicarum* nomine hodienum celebratas, & *Keplerus*, cujus opera prodiere *Tabulæ Rudolphinæ* (Ulmæ 1627. in fol. 2. Alph. 20. plag.), quæ hodienum magno in pretio habentur, anterioribus omnibus prælatæ. Has in aliam formam transmutavit *Maria Cunitia*, cujus Urania propitia ſive Tabulæ Aſtronomicæ mire faciles vim hypotheſium phyſicarum a *Keplero* proditarum complexæ, facillimo calculandi compendio ſine ulla Logarithmorum mentione phænomenis ſatisfacientes Latine & Germanice Olsnæ in Sileſia An. 1650. in fol. (6. Alph. 4. plag.) prodiere, ut ſcilicet calculus *Rudolphinus* difficilis facilior redderetur. Idem inſtitutum fuit *Mercatoris* in Aſtronomicis Inſtitutionibus (§. 23.) & *Joh. Baptiſtæ Morini*, cujus Tabulas *Rudolphinas* in compendium redactas verſioni Latinæ Aſtronomiæ Carolinæ *Streetii* ſubjunctæ (§. 21.).

§. 27. Equidem *Lansbergius* Tabularum Rudolphinarum fidem ſubleſtam reddere tentavit & Tabulas motuum cœleſtium perpetuas, quas vocat, condidit (§. 26. c. 1.) ſed non ſolum *Horoccius* hominis arrogantiam retudit in Aſtronomia Kepleriana defenſa, quæ maximam poſthumorum partem abſolvit (§. 4.); verum etiam reliqui Aſtronomi parum eidem tribuerunt. Similiter *Rudolphinarum* autoritatem non imminuere *Tabulæ Britannicæ VVingii* (§. 20.), quæ in ipſius Aſtronomia Britannica leguntur, & *Newtoni*, quas in ſua Aſtronomia Britannica propoſuit (§. 21.), nec Gallicæ Comitis *de Pagan* (Pariſ. 1658. in 4. 1. Alph. 11. plag.), Novalmageſticæ *Riccioli*, quæ extant in ejusdem Aſtronomia Reformata (§. 22.), Philolaicæ *Bullialdi*, quæ leguntur in Aſtronomia Philolaica (§. 18.) & Carolinæ *Streetii* in Aſtronomia Carolina (§. 21). Inter meliores tamen cenſentur Philolaicæ & Carolinæ, ita ut ob benignum *Flamſtedii*, optimi hac in re arbitri, judicium Carolinas prælectionibus ſuis Aſtronomicis ſubjunxerit *VVhiſton* (§ 23.)

§. 28. Novas quoque Tabulas ex datis *Keplerianis* & *Bullialdinis* juxta propriam hypotheſin Conoellipticam ſupputavit *Joh. Jacobus* **Zimmermann**

Eccle-

Ecclesiæ Würtemberga-Bieticanæ Diaconus, in Prodomo Bicipite Cono-ellipticæ & a priori demonstratæ Planetarum Theorices (Stutgardiæ 1679. in 4. plag. 15.); sed nullam hactenus in foro Astronomico autoritatem adeptæ.

§. 30. Tabulæ omnium novissimæ sunt Ludovicianæ, quas Astronomus præclarus *Philippus de la Hire* ex solis observationibus, citra ullius hypotheseos subsidium, deduxit: quod ante inventa micrometra, tubos & horologium oscillatorium impossibile habebatur. Prodiere Parisiis 1702. in 4. (1. Alph. 4. plag. Tab. IV.) cum ante jam 1687. Tabulæ Solares & Lunares sub titulo partis prioris Tabularum Astronomicarum (in 4. plag. 17.) lucem adspexissent. Haberi possunt pro Tabulis Rudolphinis correctis. Dudum etiam in manibus Astronomorum versantur *Joh. Dominici Cassini* Tabulæ astronomicæ & in Anglia novas condidit *Hallejus*.

§. 31. *Johannes Hevelius* in Prodromo Astronomiæ (Gedani 1690. in fol. 4. Alph. 7. plag. Tab. I.) cum Catalogo fixarum ex propriis observationibus deducto Tabulas quoque Solares exhibuit domesticis observationibus superstructas, quæ præstantissimæ habentur. Optandum vero fuisset, ut fata permisissent, quo reliquorum quoque Planetarum Tabulas conderet observationum suarum fructum laturus celeberrimus Autor.

§. 32. Primum fixarum Catalogum confecit ex domesticis observationibus *Hipparchus*, quem ad suum tempus reductum *Ptolemæus* exhibuit in Almagesto lib. 7. Novum dedit *Tycho* Progymnasmatum Tomo primo p. 257. & seqq. quem extendit *Keplerus* in Rudolphinis. Exhibet fixarum Catalogum, sed tantummodo correctum, non vero ex propriis observationibus conditum *Ricciolus* in Astronomia Reformata. Ast Tabula Longitudinis ac Latitudinis stellarum fixarum ex observatione *Ulugh Beighii*, Tamerlani Magni Nepotis, ex MSC. Persicis Latine vertit, Commentariis illustravit & Oxonii A. 1665. in 4. (1. Alph. 13. plag.), edidit *Thomas Hyde*. Addit *Muhammedis Tixini* Tabu-

las declinationum & Afcenfionum rectarum. *Hevelius* in Prodromo catalogus fixarum omnes, qui hactenus proftant, una exhibet atque inter fe comparat.

§. 33. Enimvero locupletiffimus Fixarum omnium, quæ confpici poffunt, ex propriis obfervationibus conditus a *Flamftædio* & fub titulo: Catalogi Fixarum Britannici exhibetur in Aftronomi fummi Hiftoria cœlefti, de qua abunde diximus fuperius (§. 7.).

§. 34. Aftra defcribunt & fchematismis illuftrant *Johannes Bayerus* in Uranometria Ulmæ 1661 quæ prodiit textu in 4. figuris in folio impreffis (plag. 13. Tabb. 48.), qua in citandis ftellis utuntur Aftronomi, & *Johannes Hevelius* in Firmamento Sobiefciano (Gedani A. 1690. in fol. plag. 6. Tabb. æn. 54.). Optandum vero fuiffet, ut literas, quibus ad indigitandas ftellas ufus fuit *Bayerus*, etiam *Hevelius* retinuiffet: id quod fecit *Johannes Flamftædius* in opere magnifico *Atlantis cœleftis*, quod Londini 1729. in fol. reg. (plag. 5. Tab. 29.) prodiit. Compemdia ufibus tyronum fervientia funt *Ægidii Strauchii* Aftrognofia (Wittebergæ An. 1684. in 12. plag. 9. Tabb. 25.) & *Wilhelmi Schickardi* Aftrofcopium (Lipfiæ An. 1698 in 12. plag. 6. Tabb. 2.)

§. 35. Globi cœleftis conftructionem & ufum perfpicue explicavit *Schonerus* in Tractatu, qui inter opera ipfius extat. Recentius præter alios ufum globi cœleftis docent *Guilielmus Bleau* in Inftitutione Aftronomica de ufu globorum (Amftelodami 1690. in reg. 8. plag. 16.) & *Bion* in libro Gallico ejusdem argumenti, qui fub titulo *Ufage des Globes celeftes & terreftres & des fpheres* Parifiis 1699. in 12. reg. (16. plag. Tabb. 26.) prodiit, ac nuper auctior recufus.

§. 36. Librum *Bionis* Germanice vertit & annotationibus nonnullisque additamentis locupletavit D. *Chriftianus Philippus* **Berger**. Prodiit Lemgoviæ fub titulo: **des Herrn Bions Abhandlung von der Welt-Beschreibung und dem Gebrauch derer Himmels und Erd-Kugeln auch Sphären** An. 1736. in 8. (Alph. 1. plag. 19. Tab. 35.).

Expli-

Explicat hic Autor in altera præſertim editione, quæ ex Aſtronomia & Geographia tanquam cognita ſupponi debent, ſiquidem uſum utriusque Globi, terreſtris ſcilicet ac cœleſtis, intelligere volueris. Adduntur etiam phyſica de Meteoris & alia, quæ ad Calendarii notitiam faciunt.

§. 37. Cum *Lotharius Zumbach de Kœsfeld*, Med. D. poſtea Matheſeos Profeſſor in illuſtri Collegio Carolino, quod Caſſellis erat, novos Globos, cœleſtem juxta Catalogum fixarum *Hevelii* & terreſtrem ex recentiſſimis obſervationibus, *Gerardo Valk* chalcographo conſtruxiſſet, adornationem quoque & diſtributionem ac uſum Globorum deſcripſit. Enimvero quia Globus cœleſtis tantummodo ſatisfacit phænomenis primi mobilis novum excogitavit inſtrumentum aſtronomicum, quale adhuc deſiderari arbitrabatur, quo loca & motus Planetarum atque ſtellarum fixarum proprii in longitudinem & latitudinem Zodiaci, eclipſes Solis & Lunæ, occultationes ſtellarum aliaque plurima inde derivata absque calculo exacte, facile ac promte exhibentur. Inſtrumentum hoc *Planetolabium* appellavit & *Gerardus Valk* dextre idem præparavit. Deſcriptioni itaque Globorum adjunxit deſcriptionem Planetolabii ſui, explicans omnem ejus rationem & uſum. Utraque deſcriptio ſub titulo: Praxis Aſtronomiæ utriusque, ut & Geographiæ exercita per uſum Globi cœleſtis & Terreſtris, tum & Planetolabii; prodiit Amſtelodami A. 1700. in 4. Deſcriptio globorum conſtat plag. 18. Tab. 4. Planetolabii plag. 9. Tab. 2. Supponit illa ad manus eſſe Globos, hæc Planetolabium. Equidem *Schonerus* jam invenerat Organum Uranicum, quod vocat, e quo facillime absque ſcrupuloſa ſupputatione veri mediique planetarum motus reperiuntur, & quod ſub finem operum deſcribitur; cum tamen ejus conſtructio nitatur hypotheſibus veterum, *Zumbachii* vero Planetolabium ſecundum hypotheſin recentiorem ellipticam & *Bullialdi* inprimis Aſtronomiam Philolaicam fuerit conſtructum, & multo accuratius exhibeat loca planetarum, quin non inuti-

ſem operam ſumſerit *Zumbachius* dubitandum non eſt. Ne quid in mechanica Aſtronomiæ Theoricæ parte deſiderari poſſet, addidit idem *Jovilabium* & *Saturnilabium*, quorum iſto loca Satellitum Jovis, hoc autem loca Satellitum Saturni absque calculo ad datum quodcunque tempus determinantur. Deſcriptio Jovilabii prodiit Amſtelodami A. 1716. in 4. (plag. 6. Tab. 1.); Saturnilabii vero ibidem An. 1726. in 4. (plag. 9. Tab. 2.).

§. 38. Conſtruxit *Zumbachius* Planetolabium ſuum ad imitationem Aſtrolabii, inſtrumenti ad explicanda phænomena motus primi dudum adhibiti. Aſtrolabii conſtructionem & uſum rigidiſſime demonſtravit *Clavius* in Tractatu de Aſtrolabio, qui in Operibus ejus legitur (§. 24. c. 1.). Etſi autem *Clavius* tantummodo de polari, quod vocatur, egerit; tanta tamen uſus prolixitate & ſchemata conſtruxit tam implexa ac intricata, ut a nullo mortalium totum fuiſſe perlectum judicet *Tacquetus*. Quamobrem ipſe lib. 3. Opticæ, qui de projectione aſtronomica agit, doctrinam hanc magis perſpicue proponit, & non minus æquinoctiale, quam polare explanat. Ceterum quoad doctrinam de projectione ſphæræ tam orthographica, quam ſtereographica commendari meretur Tractatus, quem ſub titulo: *A Treatiſe of the ſphere* patrio ſermone Londini A 1714. edidit *Joannes Witty* (plag. 15. Tab. 10.). Tyronibus autem, qui uſum Aſtrololabii cognoſcere ſtudent, ſatisfaciet *Bion* in Tractatu, qui Pariſiis A. 1702. in 12. reg. (plag. 10½. Tab. 9.) ſub titulo: *L' uſage des Aſtrolobes tant univerſels, que particuliers* lucem adſpexit.

§. 39. Ad naturam ſiderum & rationem univerſi cognoſcendam conducunt præter *Ricciolum* in Almageſto *Chriſtophori Scheineri* Roſa Urſina (Braccianí A. 1626. usque ad A. 1630. in fol. 11. Alph. cum figuris multis textui inſertis) opus de maculis ſolaribus abſolutiſſimum; ejusdem disquiſitiones Mathematicæ de controverſiis & novitatibus aſtronomicis (Ingolſtadii 1614. in 4. plag. 12.); opuſculum de refractionibus coeleſtibus (Ingolſtadii 1617. in 4.) & ejusdem Sol ellipticus (Auguſtæ

gustæ Vindelicorum in 4. plag. 5.); *Gallilæi* Tractatus de maculis solaribus (Romæ 1613.) & Nuncius sidereus aliquoties recusus; ejusdem dialogi de Systemate mundi (Lugd. Bat. An. 1699. in 4. 3. Alph.), opus lectu dignissimum; *Johannis Kepleri* Tractatus Germanicus de Cometa anni 1607 (Halæ 1608. in 4. plag. 5.) & de Cometis libelli tres (Augustæ Vindelicorum 1619. in 4 plag. 20. Tab. 1.): ejusdem Prodromus dissertationum cosmographicarum, continens Mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium cœlestium deque caussis cœlorum numeri, magnitudinis motuumque periodicorum genuinis & propriis, demonstratum per quinque regularia corpora Geometrica, cum Narratione *Georgii Joachimi Rhetici* de libris revolutionum *Nicolai Copernici* (Tubingæ 1596. in 4. 1. Alph.): ejusdem Somnium seu opus posthumum de Astronomia lunari (Francof. 1634. in 4. 1. Alph.): ejusdem Harmonica Mundi (Lincii 1619. in fol. 3. Alph. 13. plag.): ejusdem Hyperaspistes *Tychonis* (Franc. 1625. in 4. plag. 28.) adversus *Scipionis Claramontii* Antitychonem, in quo contra *Tychonem Brahe* demonstrare satagit cometas esse sublunares, non cœlestes (Venetiis 1621. in 4. 2. Alph. 2. plag.); *Hevelii* Selenographia (Gedani 1647. in fol. 6. Alph. 10. plag. Tabb. 111.), in quo ejus facies secundum omnes phases accuratissime delineatur: ejusdem Prodromus Cometicus, quo historia Cometæ A. 1664. exorti, cursum faciesque diversas capitis ac caudæ accurate delineatas complectens, nec non dissertatio de Cometarum omnium motu, generatione variisque phænomenis exhibetur (Gedani 1665. in fol. plag. 17. Tab. 3.): ejusdem descriptio Cometæ A. 1664. (Gedani 1666. in fol. 2. Alph. 5. plag. Tab. 7.): ejusdem epistola de Cometa A. 1672. (Gedani 1672. in fol. 2. plag. Tab. 1.): ejusdem Cometographia (Gedani 1668. in fol. 10. Alph. 19. plag. Tabb. 38.), opus de Cometis absolutissimum: ejusdem dissertatio de nativa Saturni facie (Gedani 1656. fol. 12. plag. Tab. 9.), ubi phases Saturni delineat & ad caussas suas revocare studet: ejusdem Mercurius in Sole visus cum *Horoccii*

Venere in Sole viſa & Hiſtoria ſtellæ miræ (Gedani 1662. in fol. 2. Alph. 2. plag. 10. Tabb.), *Chriſtiani Hugenii* Syſtema Saturninum (Hagæ Comitis 1659. in 4. plag. 12.), in quo annulus Saturni deſcribitur & unus ejus ſatellitum annunciatur, & inprimis ejusdem Coſmotheoros (ibid. 1698. in 4. plag. 18. Tab. 5. it. Leoburgi 1704. in 8. plag. 8. Tab. 5.), in quo natura planetarum ex conjecturis probabilibus eruitur: *Franciſci Blanchini* Heſperi & Phoſphori Nova phænomena, ſive Obſervationes circa Planetam Veneris (Romæ 1728. in fol. Alph. 1. plag. 2. Tab. 10.), in quo opere maculæ Veneris exactiſſime delineantur & Veneri eadem opera impenditur, quam in Luna, conſumſit *Hevelius* præter alia ad parallaxin Veneris & ejus a Terra diſtantiam ſpectantia: *De Mupertuis* Diſcurſus Gallice conſcriptus de Figuris differentibus aſtrorum (Pariſ. 1732. in 8. plag. 5½.): *Jacobi Bernoulli* Conamen novi ſyſtematis Cometarum (Amſtelodami An. 1682. in 8. 6½. plag. Tab. 8.): *Joh. Baptiſtæ du Hamel* Aſtronomia Phyſica (Tom. 1. Operum Philoſ. Norimb. 1681. in 4.): *Wilhelmi Derham* Theologia Aſtronomica, quæ ſub titulo: *Aſtro-Theology* Londini An. 1715. in 8. (plag. 20. Tab. 3.) prodiit & Hamburgi ex Anglico ſermone in Germanicum translata lucem adſpexit.

§. 40. Huc etiam referendi ſunt Autores qui motuum cœleſtium cauſas phyſicas tradere aggreſſi ſunt *Kepplerus* in Phyſica cœleſti ſeu Commentariis de motibus ſtellæ Martis & in Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ (§. 16.), *Newtonus* in Principiis Philoſ. Natur. Mathem. cum *Gregorio* in Elementis Aſtronomiæ (§. cit.) *Villemot* ſupra laudatus (§. *cit.*): & Cel. J. *Polenus* in dialogo de Vorticibus cœleſtibus (Patavii 1712. in 4. 1. Alph. 6. plag. 7. Tab.).

§. 41. Syſtema Copernicanum defendunt præter *Gallilæum* ante laudatum in Dialogis de Syſtemate mundi (§. 39.) peculiaribus ſcriptis *Petrus Megerlinus*, Profeſſor Mathematum Baſileenſis in Syſtemate mundi Copernicano argumentis invictis demonſtrato (Amſtelodami An. 1682. in 8. plag. 6. Tab. 3.);

Bul-

*Bullialdus* in Philolao ab inferis resuſcitato ſeu diſſertatione de vero ſyſtemate ( Amſtelod. An. 1639. in 4. ), *Petrus Horrebovius* Mathematum Profeſſor Hafnienſis, in Copernico triumphante, ſive de parallaxi Orbis annui Tractatu epiſtolari ( Hafniæ 1727. in 4. plag. 7. Tab. 1. ) & *Joh. Jacobus* Zimmermann in Scriptura Copernizante Germanice ſæpius edita. Utor editione Noribergenſi anni 1709. in 8. ( plag. 8. ).

§. 42. Aſtronomiam, quam in parte prima ſecundum proprias hypotheſes explicaverat, in ſecunda ad uſum concionatorum transfert *Antonius Maria Schyrlæus de Rheita*, Capucinus, in Oculo *Enochi* atque *Eliæ*, ſeu Radio ſidereo myſtico ( Antverpiæ 1665. in fol. 4. Alph. 9. plag. ), qui etiam ſub finem partis primæ praxin dioptricæ explicat.

§. 43. Calculum eclipſium peculiaribus ſcriptis in uſum tyronum illuſtrarunt *Elias Molerus* in Opere novo Aſtronomico, in quo doctrina de ſupputandis deliquiis juxta Tabulas Prutendicas explicatur ( Lugduni 1687. in 4. 1. Alph. 4. plag. ); *Johannes Hanke*, e Societate Jeſu, in Tenebris ſummatim illuſtratis, qui ſecundum Tabulas *Riccioli* computum inſtituit ( Moguntiæ 1682. in 4. plag. 15. ) & inprimis *Zimmermannus* modo laudatus in ſcripto Germanico, cui titulus: Auf alle und jede *Hypotheſes applicable fundamental* - Aufgaben von den Sonn- und Mond-Finſterniſſen ( Hamburgi. 1691. in 8. 15½. plag. ) Eclipſeos ſolaris calculum quoque bene tradidit & Logarithmos in uſum Logiſticæ ſexagenariæ exhibuit, quales alibi non proſtant. Commemorari hic quoque merentur diſſertationes quædam academicæ. Nimirum calculum eclipſium ſolarium exemplo eclipſeos anni 1715. illuſtravit *Johannes Bernhardus VVideburgius*, nunc Profeſſor Mathematum Jenenſis ( Helmſtadii 1714. in 4. plag. 12. Tab. 4. ) & Eclipſeos ſolaris anni 1723. calculum ſecundum methodum *Philippi de la Hire* ex ejusdem Tabulis quoad minutiſſima repræſentat *Georgius Matthias Boſe*, nunc Phyſicæ Profeſſor in Academia Wittebergenſi, in Commentatione in Eclipſin Terræ

Anno

Anno. 1723. d. 13. Maji (Lipsiæ An. 1723. in 4. maj. Alph. 1. Tab. 1.) Huc etiam pertinent Dissertationes de eclipsi lunari & de eclipsi solari *Christophori* Langhansen / Professoris Mathematum Regiomontani, quarum primam sub præsidio *Blæsingii*, tum Mathematum Professoris, alteram ipse Præses defendit.

§. 44. Equidem Tabularum astronomicarum conditores præcepta quoque calculi iisdem præmittere solent, quod etiam fecit *Philippus de la Hire*: quoniam tamen sæpissime præcepta breviora sunt, quam ut ad omnem calculum astronomicum absolvendum tyronibus præsertim satisfaciant; ideo *Joannes Albertus Klimmius* idiomate Germanico Norimbergæ 1725. in 4. (Alph. 1. plag. 17. Tab. 16.) Tabulas *Philippi de la Hire* cum nova, completa & accurata descriptione omnis calculi astronomici in usum tyronum calculi edidit. Ad eundem finem tendit opus in hoc genere maxime commendandum, Astrosophia numerica, sive astronomica supputandi ratio *Angeli Capelli*, Canonici & Astronomiæ Professoris Parmensis, quæ duabus partibus Venetiis 1733. & 1736. in 4. prodiit (Pars I. plag. 14. Tabb. æn. 8. Pars II. Alph. 1. plag. 16.). Parte priori abunde docentur, quæ ad calculum faciunt; posteriori autem Tabulæ astronomicæ continentur.

§. 45. *Joannes Leonhardus Rostius* A. 1718. Norimbergæ in 4. (Alph. 3. Tab. 14.), edidit librum astronomicum sub Titulo: Astronomisches Hand-Buch, h. e. Manuale Astronomicum, in quo doctrinam sphæricam exemplis perspicuis illustrat & modum observandi declarat, ipse nimirum in observando versatissimus. Addidit deinde An. 1727 (Norimbergæ in 4. Alph. 2. plag. 5. Tab. 14.) partem alteram sub Titulo: Aufrichtiger Astronomus, h. e. Astronomus ingenuus. In ea plurima tradit, quæ ad doctrinam sphæricam, motus Cometarum & observationes astronomicas spectant. Inprimis autem plurima tradit, quæ ad calculum eclipsium facilitandum conducunt. Ad Astronomiam adeo practicam addiscendam utile opus.

§. 46. Quoniam in anterioribus aliquoties mentionem inje-

injecimus Operum Mathematicorum *Joannis Schoneri*, ut de iis adhuc dicamus res ipsa flagitare videtur. Ea in unum volumen congessit, & correcta & locupletata Noribergæ A. 1561. in fol. excudi curavit Autoris filius *Andreas Schonerus* (Alph. 10.). Continentur in hisce 1. Isagoge Astrologiæ judiciariæ, 2. de Judiciis Nativitatum libri tres, 3. Tabulæ resolutæ astronomicæ, 4. de usu globi cœlestis, 5. de compositione globi cœlestis, 6. de usu globi terrestris, 7. de compositione globi terrestris, 8. Libellus de distantiis locorum per numeros & instrumentum investigandis, 9. de constructione Torqueti, 10. In constructionem atque usum Rectanguli sive radii astronomici Annotationes, 11. In Fabricam & usum magnæ Regulæ *Ptolemæi* Annotationes, 12. Horarii Cylindri Canones, 13. Æquatorium astronomicum, ex quo errantium stellarum motus, luminarium configurationes & defectus colliguntur, oppositis ubique planetarum sphæris & terminorum expositionibus, 14. Planisphærium seu Metheoroscopium, in quo singula, quæ per motum primi mobilis contingunt, inveniuntur, 15. Organum Uranicum, quo facillime absque scrupulosa supputatione veri mediique planetarum motus reperiuntur, 16. Instrumentum impedimentorum Lunæ, per quod dies impediti facillime colliguntur his apprime utile, qui Almanach conscribere gestiunt. Videmus adeo in hisce operibus non contineri alia, nisi quæ ad præsens caput pertinent, quæ siderum nempe scientiam concernunt.

§. 47. Plura nobis recensenda essent scripta astronomica, si omnia promiscue in medium afferre liberet. Sed cum ea, quæ a veteribus & recentioribus usque ad Annum 1660. seculi superioris literis consignata fuere, ex *Riccioli* Almagesto facile suppleri queant, cetera ex Diariis Eruditorum, quæ hodie magno numero eduntur, peti queant; potiora a nobis commemorata esse sufficit. De *Tychonis* tantum Progymnasmatibus Astronomiæ instauratæ, aliquoties laudatis, observamus, quod pars prima equidem inscribatur de nova stella anni 1572. generaliter tamen de restitutione motu-

motuum Solis & Lunæ ſtellarumque inerrantium tractet (Uraniburgi & Pragæ 1610. in 4. 4. Alph. 13. plag.); altera vero de Cometa 1577. agat (Pragæ 1610. in 4. 2. Alph. 13. plag.). Tomo ſecundo hujus editionis adjiciuntur *Tychonis* de *Brahe* epiſtolæ Aſtronomicæ (Uraniburgi 1610. in 4. 1. Alph. 16. plag.). Sola Progymnasmata ſub titulo Operum *Tychonis de Brahe* poſtea Francofurti ad Mœnum in 4. recuſa.

§. 48. Dignum quoque eſt, cujus ſingularem mentionem injiciamus, Automatum Planetarium *Hugenii*, motus planetarum motu ſuo accurate indicans, deſcriptum ſub finem poſthumorum (§. 35. cap. 1.). Etſi enim ante ipſum iſtius modi automata conſtruxerint alii, quorum nonnulla recenſet *Schottus* in Technica curioſa: eorum tamen uſus hodie nullus amplius eſt, poſtquam *Hugenianum* ad Aſtronomiæ recentioris perfectionem compoſitum.

§. 49. Præterea nobis adhuc commemoranda ſunt ſcripta quædam recentiora, quæ ſilentio præteriri nefas. Nimirum An. 1697. Norimbergæ in fol. (Alph. 1. plag. 4. Tabb. 4.) *Joh. Philippus a Wurzelbau* edidit Tractatum de ſitu Geographico ſecundum latitudinem & longitudinem civitatis Norimbergenſis ſub titulo: *Uranies Noricæ Baſis* in uſum obſervationum ſuarum, quas ibidem multa ſolertia & inſtrumentis exquiſitis inſtituebat. Sed cum in longitudine ac refractionibus aliquid immutandum eſſe poſthac deprehenderet, ejus ſupplementum A. 1713. in fol. (plag. $5\frac{1}{2}$) addidit ſub titulo: *Stabilimentum Baſeos Uranies Noricæ Aſtronomicæ & Geographicæ pro deducto antehac inclytæ urbis latitudine & corrigendis longitudinum Geographicarum numeris* &c. ubi etiam de obliquitate Eclipticæ & refractione horizontali agit. Tandem A. 1719. acceſſit opus Motuum ſolarium, in qua ex ſolis obſervationibus in Meridiano Norimbergenſi per tria ſecula habitis iidem definiuntur & eorundem Tabulæ exhibentur, ſed intra dimidium ſeculum variabiles ob eccentricitatis, quam ſtatuit, mutabilitatem. Prodiit Norimbergæ An. 1719. in fol. (plag. $22\frac{1}{2}$. Tab. 1.) ſub titulo: *Uranies Noricæ Baſis aſtronomica*, ſive *Rationes*

*tiones motus annui ex observationibus in Solem hoc nostro & seculo abhinc tertio Norimbergæ sub eodem Meridiano habitis quam plurimis deductæ & ampliter demonstratæ* Operi huic solari adjicitur tractatus de situ geographico Norimbergæ & ejus supplementum, de quo ante diximus, ut adeo integrum, quale nunc in bibliopoliis prostat, constet (Alph. 2. plag. 9. Tabb. 5.).

§. 50. An. 1735. Hafniæ in 4. reg. (Alph. 1. plag. 7. Tabb. 11.) *Petrus Horrebowius*, Phil. & Med. D. in Universitate Hafniensi Astronomiæ Professor, edidit Basin Astronomiæ, sive Astronomiæ partem mechanicam, in qua describuntur observatoria atque instrumenta astronomica Roemeriana Danica, simulque eorundem usus, sive methodi observandi Roemerianæ in usum publicum & præsertim in gratiam una prodeuntis valde insignis atque usus amplissimi, nunquam non posteris memorandi Tridui observationum Tusculanarum Roemeri ex fundamentis exponuntur. Dolendum vero, quod duo libri, in quo observationes suas descripserat *Rœmerus* ferali isto incendio An. 1726. quod circa finem Octobris totam fere *Havniam* vastavit, una cum observationibus *Horrebovianis* perierint.

§. 51. Multum desudavit *Rœmerus* in detegenda parallaxi orbis annui, nec sine successu hoc se præstitisse sibi videbatur. Ex ejus adeo observationibus *Horrebowius* eandem demonstandam sibi sumsit, ediditque ea fini Havniæ in 4. (plag. 8 Tab. 1.) suis sumtibus Copernicum triumphantem, sive de parallaxi orbis annui Tractatum epistolarem ad serenissimum Principem Christianum, Daniæ & Norwegiæ hæredem An. 1727., cujus pleraque exemplaria ferale istud, quod modo commemoravimus, incendium consumsit.

§. 52. Enimvero nondum triumphare Copernicum in Commentariis Bononiensis Scientiarum & Artium Instituti (§. 40. c. 1.) ostendit *Eustachius Manfredi*, cum ex observationibus Rœmerianis, quæ colligitur in fixis quoad declinationem & ascensionem rectam, mutatio parallaxi orbis annui minime consentiat. Nimirum hactenus A-

ſtronomi in parallaxin orbis annui inquiſituri id tantummodo agebant, ut omni circumſpectione diſpicerent, num aliqua fixarum a loco fixo aberratio annua deprehendatur, parum ſolliciti utrum præciſe talis ſit, qualem exigit motus annuus Telluris circa Solem, an vero eidem contrarietur. Saluberrimo igitur conſilio *Manfredius* Theoriam de annuis inerrantium ſtellarum aberrationibus, in Aſtronomia hactenus deſideratam condidit eamque publici juris fecit Bononiæ Anno 1729. in 4. (plag. 10. Tabb. 6.), ut juxta eam obſervationes examinari queant, ne per errorem parallaxis orbis annui inde colligatur, quæ inde colligi nequit.

§. 53. Celebratiſſimus hodie inter Aſtronomos eſt Gnomon Meridianus Bononienſis ad D. Petronii, cui Aſtronomia multa debet incrementa & cujus hiſtoriam dederunt *Joannes Dominicus Caſſini* atque *Dominicus Gulielminus*. Hujus inſtrumenti deſcriptionem & obſervationes aſtronomicas omnes eodem ab ejus conſtructione usque ad hoc tempus peractas 1736. Bononiæ in 4. reg. (Alph. 2. plag. 2.) edidit idem *Manfredius* In hoc opere de obliquitatis eclipticæ mutatione & theoria Solis præclara leguntur, & illa inprimis extra omnem controverſiæ aleam ponitur.

§. 54. Anno 1725. *Horrebovius* edidit Havniæ in 4. (plag. 16. Tab. 1.) Clavem Aſtronomiæ, ſive Aſtronomiæ partem phyſicam, in qua potiſſimum in parallaxin Solis inquirit. Pendet autem methodus ab hypotheſi quadam phyſica. Unde ipſi poſthac conſultum viſum, ut miſſis omnibus hypotheſibus elementa Aſtronomiæ quoad refractiones, obliquitatem eclipticæ polique altitudinem nudis obſervationibus *Rœmeri* ſuperſtrueret. Eo conſilio in publicam lucem emiſit An. 1732. Havniæ in 4. (plag. 16. Tab. 1.) Atrium Aſtronomiæ, ſive de inveniendis refractionibus, obliquitate eclipticæ atque elevatione poli Tractatum. Subjunxit ſchediasma de arte interpolandi, quod jam antea ſeorſim publicatum ad ſcripta analytica referendum. Ceterum in Atrio hoc aperiendo ampliſſimum uſum oſtendit Tridui illius *Rœmeriani*, quod in Baſi Aſtronomiæ extat (§. 50.), & ſe in poſte-

ſterum uberiorem adhuc oſtenſurum pollicetur. Unde non mireris *Rœmerum* morti vicinum ejus editionem una cum deſcriptione inſtrumentorum ſuorum ſerio commendaſſe & eo fine ejus exemplar nitide deſcriptum S. R. Selandiæ Epiſcopo C. W. *Wormio* tradidiſſe.

§. 55. Ad ſcripta Aſtronomica referendæ etiam ſunt Ephemerides, in quibus loca planetarum eorumque adſpectus ad ſingulos anni dies computati una cum Eclipſium deſcriptionibus exhibentur. Juxta Tabulas Prutenicas Ephemerides ab A. 1577. ad annum 1590. conſtruxerat *Joannes Stadius*. Juxta easdem ab An. 1581. usque ad annum 1620. computatas Venetiis excudi curavit *Joannes Antonius Maginus*, Mathematum Profeſſor Bononienſis, edito opere Primi Mobilis, duodecim libris contenti, in quibus habentur Trigonometria ſphæricorum & aſtronomica, gnomonica, geographicaque problemata, magnus trigonometricus canon emendatus & auctus ac magna primi mobilis Tabula ad decades primorum ſcrupulorum ſupputata (Bononiæ 1609. in fol. Alph. 10. plag. 21.), celebris: ſed cum eas examinaret *Davides Origanus*, Mathematum Profeſſor Franc. ad Viadrum eas non ſatis accuratas deprehendit. Quamobrem ipſe 1599. Franc. ad Viadrum in 4. (4. Alph. 12. pl.) Novas edidit Ephemerides ab An. 1595. usque ad An. 1630. deinceps continuatas usque ad finem ſeculi. Præmiſſa eſt Introductio ſeu compendiaria Ephemeridum enarratio, qua non ſolum, quæ ad motum primi & ſecundorum mobilium uſumque pleniorem Ephemeridum faciunt, ſed & plurima alia chronologica & aſtrologica præcepta ea facilitate explicantur, ut inde quisque calendaria anniverſaria & nativitatum texere poſſit judicia. Hæ ephemerides ſeculo decimo ſexto celebratiſſimæ fuerunt, iisdemque uſi ſunt calendariographi. Etſi enim *Keplerus* ab An. 1617. usque ad An. 1636. ex Tabulis ſuis Rudolphinis ſupputatas Lincii in 4. (3. Alph. 17. plag.) edidiſſet, inchoatas Lincii 1616. & abſolutas Sagani Sileſiæ typis Autoris An. 1630. quibus præmittitur explicatio fundamentorum Ephemeridis & inſtructio ſuper

nova ejus forma; facile tamen apparet, cur usum Ephemeridum *Origani* impedire minime potuerint.

§. 56. Cum *Origani* Ephemerides cum seculo præcedente exspirassent, initio hujus complures de novis computandis consilia agitarunt: quo successu, nostrum jam non est enarrare. Initio hujus seculi Ephemerides dederat *Mezzavaccha*, quibus deficientibus manum eidem operi admovit Marchio *Antonius Ghislerius*, cujus Ephemerides motuum cœlestium ab A. 1721. ad An. 1740. ex Tabulis *de la Hire*, *Streetii* & *Flamstædii* ad Meridianum Bononiæ supputatæ prodierunt Bononiæ A. 1720. in 4. (Alph. 3. plag. 9½.). Anno autem 1725. ibidem lucem adspexere Novissimæ Ephemerides motuum cœlestium e Cassinianis Tabulis ad meridianum Bononiæ supputatæ, autoribus *Eustachio Manfredio* Bononiensis Scientiarum Instituti Astronomo & sociis ad usum Instituti. Tomus primus continens Ephemerides ex An. 1726. in A. 1737. constat Alph. 2. plag. 4. Tabb. 8. Tomus II. complectens Ephemerides ex A. 1738. in An. 1750. Alph. 2. plag. 6. Tabb. 7. Id singulare habet *Manfredius*, quod dederit typos eclipsium solarium, quales per totam Telluris faciem, ubi conspicuæ sunt, apparent juxta principia projectionis.

§. 57. Singulis annis Parisiis in usum anni sequentis jussu Academiæ Regiæ scientiarum ad Meridianum Parisiensem editur Ephemeris sub titulo: *Connoissance des Tempe pour l' Année* v. gr. 1739. Ephemeridi subjiciuntur Tabulæ quædam astronomicæ cum earundem explicatione & usu, una cum Catalogo singulorum membrorum Academiæ Regiæ scientiarum, qualis est mense Novembri ejus, quo editur, anni. Extant in iisdem eclipses Satellitum Jovis, cum in casum observationum astronomicarum potissimum edantur istæ ephemerides, quæ præterea usum Calendarii præstant.

§. 58. Olim usque ultra dimidium seculi superioris ad Astronomiam quoque relata fuit *Astrologia judiciaria*, ars divinandi ex astris: omnes enim & naturæ, & hominum actiones horumque fata iisdem subjecerunt

runt veteres. Magna ea fuit autoritatis, exculta & defensa a gravibus Autoribus, ita ut ipse *Ptolemæus* de eadem commentatus fuerit eamque Astronomiæ sociam fecerit (§. 10. c.9.). Nostro autem ævo vanitate ejus agnita indigna censetur, quæ inter scientias mathematicas referatur: quæ etiam ratio est, cur nullum eidem in Elementis nostris Matheseos universæ fecerimus locum. Quodsi tamen cui volupe fuerit, Astrologiæ præcepta cognoscere, ei satisfaciet *Schonerus* in Opusculo astrologico, quod ex diversorum libris summa cura pro studiosorum utilitate collegit & Norimbergæ A. 1539. in 4. (plag. 14.) edidit. Legitur idem in Operibus, in quibus primum tenet locum (§. 46.). In his autem prolixa quoque occurrit tractatio de judiciis nativitatum, ut in hac Astrologiæ parte nihil amplius desiderari possit. Compendiosor est Tractatus astrologicus de genethliacorum thematum judiciis pro singulis nati accidentibus ex vetustis & optimis quibusque auctoribus collectus industria *Henrici Ranzovii*, Producis Cimbrici, qui Francofurti ad Mœnum A. 1633. in 8. (Alph. 1. plag. 2.) prodiit & quo in juventute usus, cum artem illam pernoscere gestirem.

§. 59. Superiori adhuc seculo Astrologiæ maxime deditus fuit *Joannes Baptista Morinus*, Medicinæ Doctor, & Parisiis Regius Mathematum Professor, cujus Astrologia Gallica principiis & rationibus propriis stabilita atque in 26 libros distributa prodiit Hagæ-Comitis 1661. in fol. cum prolixa præfatione apologetica (Alph. 6. plag. 12), qui vulgo dicitur Astrologiam demonstrasse. Sed quantum distent a veris demonstrationibus ejus probationes, haud difficulter judicabit, qui genuinæ demonstrationis formam animo concepit.

CAPUT

# CAPUT. X.

## DE SCRIPTIS CHRONOLOGICIS, GEOGRAPHICIS ET GNOMONICIS.

§. 1.

DOctrinam temporum primus in Scientiæ formam redegit *Josephus Scaliger*, cujus de emendatione temporum libri primum A. 1587. lucem adspexerunt, deinde quindecim annis elapsis prorsus immutati denuo prodierunt. Multa eruditione conscriptum est hoc opus; sed ad captum Tyronum minime compositum,

§. 2. Præclarum quoque in Chronologia opus est *Dionysii Petavii* doctrina Temporum, Parisiis 1627. in fol. primum edita; sed An. 1703. tribus Tomis in fol. reg. (21. Alph. 7. plag.) Antverpiæ recusa. Accessit editioni novæ integer tomus tertius, in quo continentur Uranologium sive systema variorum auctorum, qui de Sphæra ac sideribus eorumque motu Græce commentati sunt, A. 1630. seorsim editum; Libri 8. variarum Dissertationum Chronologiam illustrantium & libri tres epistolarum. Nimirum in Uranologio continentur *Gemini* Elementa Astronomiæ; *Ptolemæi* de Apparentiis inerrantium & significationibus, cui Tractatui subjungitur Calendarium vetus Romanum cum ortu occasuque stellarum ex *Ovidio*, *Columella*, *Plinio*; *Achillis Tatii* Isagoge ad *Arati* Phænomena; Ejusdem fragmenta a *Victorio* edita, quæ cum anterioribus eadem fere continent; *Hipparchi Bithyni* ad *Arati* & *Eudoxi* Phænomena Enarrationum libri tres; *Arati* Genus & Vita; *Theodori Gazæ* liber de mensibus; S. *Maximi* Martyris Computus ecclesiasticus; *Isaaci* Monachi Computus; S. *Andreæ* Hierosolymitani methodus investigandi cycli solaris & lunaris, nec non Paschatis. Ceterum paulo durius tractat *Scaligerum*, cui opus suum opposuit.

§. 3.

§. 3. Dogmata *Scaligeri* ad faciliorem intelligentiam proposuit *Sethus Calvisius*, Cantor Lipsiensis, vir longe ultra sortem sui similium eruditus, cujus Introductio ad Chronologiam sæpius cum in 4. tum in folio recusa.

§. 4. Triumviris istis jungi meretur *Johannes Baptista Ricciolus* in Chronologia Reformata, quæ Bononiæ 1669. in fol. prodiit (Alph. 11. plag. 18.).

§. 5. Tyronibus inserviunt *Dionysii Petavii* Rationarium temporum (Moguntiæ 1646. in 8. 2. Alph. 22. plag.), *Guilielmi Beveregii* Institutiones Chronologicæ, quæ cum Arithmetica Chronologica recusa Londini An. 1705. in 4. (1. Alph. 11. plag.) & *Ægidii Strauchii* Breviarium Chronologicum (Wittebergæ A. 1664. in 12. 2. Alph. 10. plag.)

§. 6. Ad Chronologiam Historicam spectat opus *Isaaci Newtoni*, quod Londini 1728. in 4. sub Titulo: *The Chronology of ancient Kingdoms amended* (Alph. 2. plag. 4. Tabb. III.) prodiit, in quo agitur de Chronologia Grecorum, Ægyptiorum, Assyriorum, Babyloniorum & Medorum atque Persarum. Traditur etiam in eodem descriptio templi *Solomonis*. Cum nobis jam sit negotium cum Chronologia mathematica; facile patet, Chronologiam *Newtoni* non esse hujus loci. Ne tamen quis miretur, cur ejus nullam injecerimus mentionem, cum *Newtonus* inter Mathematicos summus emineat; eum silentio præterire noluimus. Singulares vero prorsus sibique proprias de Chronologia antiquorum imperiorum fovet opiniones *Newtonus*, ita ut enormis detur inter ipsum & ceteros Chronologos dissensus. Quamobrem eodem adhuc anno *Arthurus Bedford* idiomate patrio Animadversiones in Chronologiam *Newtoni* edebat Londini in 8. (plag. 15.) Ostendit autem, *Newtonum* e diametro esse adversum scriptoribus sacris: quæ adeo ratio esse videtur, cur ad eum confutandum adeo properaverit.

§. 7. Ad Calendariographiam spectant, quæ Tomo quinto operum *Clavii* habentur (§. 24. c. 1.); *Sethi Calvisii* Elenchus Calendarii Gregoriani (Franc. ad Moen. 1612. in 4. plag. 27.); *Francisci Vietæ* Relatio

latio Calendarii vere Gregoriani & Calendarium Gregorianum perpetuum (§. 25. cap. 1.); *Blondelli* Historia Calendarii Romani Gallice conscripta (Paris. 1682. in 4.); *Erhardi Weigelii* bürgerlicher Zeit-Spiegel / seu speculum temporis civile (Jenæ A. 1664. in 4. plag. 15.); *Guilielmi Bonjour* Calendarium Romanum (Romæ An. 1701. in fol. 21. plag.) *Francisci Blanchini* Solutio Problematis paschalis (Romæ 1703. in 4. plag 13. Tabb. 5.); *Dominici Quartaironii* Responsiones ad assertiones *Dominici Cassini* pro reformatione Calendarii Gregoriani (Romæ 1703. in 4. pl. 4.); *Eustachii Manfredii* epistola ad *Quartaironium*, qua *Cassini* assertiones 16. vindicantur (Venetiis 1705. in 4. reg. plag. 8.); *Thomæ Pii Maphæi* Opus de Cyclorum Soli-Lunarium inconstantia & emendatione (Venetiis 1706. in 4. $1\frac{1}{2}$. Alph.).

§. 8. Calendarium Judaicum ex Hebræorum penetralibus cum versione Latina edidit *Sebastianus Münsterus* Basileæ A. 1527. in 4. 1. Alph. 5. plag.: in quo computus Judæis usitatus exponitur. *Rabbi Ori* Calendarium Palæstinorum & universorum Judæorum ex Hebræo sermone in Latinum vertit & Francof. ad Mœnum publicavit *Jacobus Christmannus*, in Academia Heidelbergensi Professor A. 1594. in 4. (plag. 20.).

§. 9. Inter veteres Geographos eminet *Ptolemæus*, cujus Geographiæ libri octo, in quibus non modo traduntur ad Geographiam mathematicam spectantia, sed inprimis etiam quæ ad historicam faciunt, Basileæ prodiere plus simplici vice, e. gr. An. 1542. in fol. (Alph. 2. plag. 16. Tab. 48.) Inter compendia vero maxime celebre fuit *Joannis de Sacro Bosco* libellus de sphæra, sæpius recusus: in quem post alios commentatus est *Clavius* (§. 24. cap. 1.).

§. 10. Præstantissimum in hoc scientiarum genere & fere unicum est *Johannis Baptistæ Riccioli* Geographia & Hydrographia Reformata (Venetiis 1662. in fol. 7. Alph. 17. plag.), ex quo *Erhardus Weigelius* scitu præ cæteris necessaria in tyronum gratiam in compendium misit in speculo Terræ, (Erd-Spiegel), quod vocat, patrio idioma-

diomate conſcripto, (Jenæ An. 1665. in 4. 1. Alph. 3. plag.).

§. 11. Multa habet *Ricciolus*, quæ ad Geographiam proprie non ſpectant, ſed ab eo in eadem pertractantur, ne ea aliunde ſupponere habeat opus. Unde tyronum conatibus magis reſpondet Geographia, quæ in curſu Mathematico *Millieti Dechales* extat (§. 4. c. 1.).

§. 12. Cæterum applauſum eruditorum dudum quoque meruit *Bernhardi Varenii* Geographia generalis, ſæpius recuſa. Elegans eſt editio Cantabrigienſis anni 1672. in 8. (1. Alph. 9. plag. Tabb. 5.), juxta quam recuſa eſt Jenæ 1693. in 8. ſed præſtantiſſima omnium prodiit Cantabrigiæ A. 1712. in 8 reg. (1. Alph. 15. plag. 9. Tabb. 9.) cum Appendice *Jacobi Jurin*, in qua nova habentur inventa, poſt obitum ſcilicet *Varenii* demum detecta. *Varenio* autem non ſolum mathematica, verum etiam phyſica curæ cordique ſunt.

§. 13. Laudantur quoque Elementa Geographiæ generalis Cl. *J. G. Liebknecht* Prof. Gieſſ. (Franc. 1712. in 8. 1. Alph. 10. plag. fig plag. 3½.), *Leonhardus Chriſtophorus Sturmius* vero in Compendio Geographico, quod idiomate vernaculo in gratiam tyronum Francof.. A. 1705. in 8. edidit (plag. 10. Tab. 5.) praxin inprimis conficiendi mappas Geographicas bene tradit, quamvis demonſtrationes omiſerit, utpote quæ non ſunt ad palatum tyronum.

§. 14. De Hydrographia ſeu arte navigandi commendatur Tractatus in Curſu Mathematico *Millieti Dechales* (§. 4. c. 1.) Data opera omnium prolixiſſime ſcripſit de eadem *Georgius Fournier* e Societate Jeſu in Hydrographia Gallice edita Pariſ. 1653. in fol. (10. Alph. 10. plag.). Habebatur pro opere præſtantiſſimo in hoc genere: verum poſtea in Anglia prodiere libri complures de arte navigandi, qui præ illo commendari merentur.

§. 15. *Jacobus Hodgſon*, Lector Matheſeos in ſchola mathematica regia orphanotrophii ad S. Salvatorem conſcripſit Theoriam navigationis demonſtratam, in uſum Navigationis docendæ. Eam deinde multo auctiorem ſub titulo: *A ſyſtem of the Mathematicks*, hoc eſt, ſyſtema Mathe-

thefeos, Londini A. 1723. in 4. duobus Voluminibus (Alph. 7. plag. $19\frac{1}{2}$. Tabb. æn. 14. cum figuris multis ligno incifis & textui infertis) multo auctiorem recudi curavit. In hoc fyftemate ex Mathefi non traduntur, nifi quæ ad Navigationem rigide demonftrandam faciunt & in ea ufum habent. Præmittuntur ex *Euclidis* Elementis fex prioribus, quæ ad hunc fcopum conducunt una cum Trigonometria plana ex inventis recentiorum plurimum illuftrata. Reperies hic porro Trigonometriam fphæricam & doctrinam de projectione fphæræ tam orthographica, quam ftereographica prolixe explicatam, quarum hæc ad folvenda problemata trigonometrica & aftronomica applicatur. Ex Aftronomia docentur, quæcunque ufui effe poffunt in navigatione, veluti modus computandi appulfum Lunæ ad ftellas fixas, & harum per illam occultationes, quarum in determinandis longitudinibus locorum ufus eft. Inferuntur novæ Tabulæ folares, quarum docetur conftructio & ufus. Adduntur Tabulæ aliæ, quibus opus eft in navigatione. Ipfa autem praxis Navigationis omnis perfpicue docetur, exemplis illuftratur & Theoriæ demonftratæ fuperftruitur. Id nimirum egit autor, ut ex fuo opere Navigationis Theoriam & praxin folide addifcere liceat & quæ ex reliqua Mathefi præfupponuntur aliunde hauriri non demum opus fit.

§. 16. Anno 1715. *Henricus Wilfon*, problemata nautica variis modis foluta dedit in Tractatu, quem fub titulo: *Navigation new modell'd*, hoc eft, Navigatio in novam formam redacta, Londini in 8. maj. (Alph. 1. plag. 12.) publici juris fecit. Docet problemata ifta folvere 1. per conftructiones geometricas triangulorum, in locum folutionum Trigonometricarum furrogandas, 2. per calculum trigonometricum, & ope peculiarium Tabularum, ut calculo nullo fit opus 3. per calculum, qui canone finuum, tangentium, fecantium & Logarithmorum non habet opus, fed tantummodo paucis quibusdam numeris in Tabulam redactis; 4. ope circini & fcalæ geometricæ; tandemque 5. per novam methodum a fe inventam, qua prob-

problemata Trigonometriæ planæ sine Tabulis ac instrumentis solvuntur. Navigationem primam geometricam, secundam trigonometricam, tertiam arithmeticam, quartam instrumentalem, quintam vero practicam appellat. Nullum adeo dubium est, quin hunc librum multo cum fructu legant, qui artem navigandi addiscere cupiunt, modo ex ceteris partibus Matheseos hausta theoria fuerint instructi, quæ hic præsupponitur.

§. 17. Quoniam libri, qui magno numero de navigatione conscripti sunt, vel solam praxin tradunt, vel nimis diffusi sunt, nec levi pretio comparandi; ideo *Archibaldus Patoun* praxin navigationis ex primis principiis demonstratam sub titulo: *A Compleat Treatise of practical navigation demonstrated from its first Principles*, una cum tabulis omnibus necessariis Londini A. 1730. in 8. maj. (Alph. I. plag. 10. Tab. I.) edidit. Præmittit adeo ea, quæ ex Geometria, Trigonometria plana, Geographia, astronomia & Chronologia perspecta esse debent ei, qui artem navigandi penitus perspicere voluerit.

§. 18. Eodem anno idiomate itidem Anglico Londini 1730. in 8. maj. (Alph. I. plag. 9.) a *Georgio Gordonio* publicata sunt ex MSC. originali opera posthuma *Johannis Wardi*. In horum parte prima præmissis principiis Geometriæ & Trigonometriæ planæ Navigatio explicatur, ubi nova quædam methodus simul proponitur ab autore inventa; in parte autem secunda Trigonometria sphærica traditur, ubi simul sphæræ projectio tam orthographica, quam stereographica explicatur. Ad demonstrationes illius facilius percipiendas schemata ita construxit, ut casus singuli in solido repræsentari possint: quo artificio etiam usus est *Joannes Keill* in Trigonometria, quam *Euclidis* Elementis ex versione *Commandini* a se editis subjunxit.

§. 19. Apud Batavos de arte navigandi Tractatum conscripsit *Willebrordus Snellius*, qui sub titulo: Tiphys Batavus, sive Histiodromice de navium cursibus & re navali, Lugduni Batavorum An. 1724. in 4. (Alph. I. plag. 7.). De Loxodromia accu-

accuratas affert demonſtrationes quæ hactenus deſiderabantur. Theoriam tradit libro primo; praxin ſecundo.

§. 20. Inter problemata vexata refertur problema de invenienda longitudine maris, quod hactenus multum exercuit ingenia Mathematicorum, irritio ſucceſſu ſolutionem ejus aggreſſorum. Nimis prolixum foret recenſere tentamina, quæ publice deſcripta proſtant. Non tamen poſſumus, quin mentionem injiciamus autoris cujusdam perſonati *Dorothei Alimari*, Mathematici (ſi credimus) Veneti, cujus Methodus longitudinis aut terra, aut mari inveſtigandæ, adjectis demonſtrationibus & inſtrumentorum Iconismis Londini An. 1715. in 8. (plag. 13. Tabb. 4. ) prodiit. Etſi enim ea non ſatisfaciat; continentur tamen in hoc Tractatu, quæ legi merentur.

§. 21. Pars nauticæ difficillima eſt manuaria nautica, quia reconditam Geometriæ ſublimioris notitiam ſupponit. Agit autem manuaria nautica de diſpoſitione velorum, gubernaculi & navis. Equidem Vir & generis nobilitate, & experientia maritima præſtans *Renau* A. 1689. libellum de ea ediderat; ſed mox *Hugenius* principium ejus unum, dein ex intervallo celeberrimus *Bernoullius* alterum impugnavit & theoriam aliam ſubſtituit in Tentamine novæ theoriæ nauticæ, quæ idiomate Gallico ſub titulo: *Eſſay d'une nouvelle Theorie de la Manoeuvre des Vaisſeaux* una cum epiſtolis nonnullis de eadem materia perſcriptis Baſileæ An. 1714. in 8. reg. (plag. 15. Tabb. 10.) prodiit. Theoriam hujus artis ad praxin aptare ſtuduit *Pitotus* in libro Gallice conſcripto, qui ſub titulo: *Theorie de la Manœvre de Vaiſſeaux reduite en Pratique* Pariſiis in 4.

§. 22. Ad Geographiæ potiſſimum perfectionem tendunt obſervationes Mathematicæ & Phyſicæ in India & China factæ a R.P. *Franciſco Noël*, e Societate Jeſu ab A. 1684. usque ad An. 1708. (Pragæ 1710. in 4. plag. 17. Tabb. 2) & obſervationes argumenti ſimilis a R.P. *Franciſco Feuillée* juſſu Regis Chriſtianiſſimi in regionibus potiſſimum auſtralibus factæ de quibus ſupra (§. 9. c. 9.). Summæ harum obſervationum legun-

guntur in Actis Eruditorum Lipsiensibus.

§. 23. Commemorandi hic denique sunt Autores, qui in magnitudinem & figuram Telluris inquisiverunt. Laudandus hic nobis *Willebrordus Snellius*, cujus Eratosthenes Batavus de Terræ ambitus vera quantitate Lugduni Batavorum An. 1617. in 4. ( Alph. 1. plag. 11½. ) prodiit. Sed errores quosdam in metiendis angulis, tum & in calculo admisit, quos ipse agnovit: Unde observationes repetiit & in MSC. correctas reliquit. Emendationes videre licet in Dissertatione de magnitudine Terræ *Petri van Musschenbroek*, Mathematum Professor in Academia Ultrajectina, quæ legitur in opere dissertationum physicarum experimentalium & geometricarum de magnete, tuborum capillarium vitreorumque speculorum attractione, magnitudine Terræ, cohærentia corporum firmorum Lugduni Batavorum An. 1729. in 4. reg. edito p. 354. & seqq.

§. 24. In Gallia feliciori successu laborem hunc exantlatus est *Picardus*, postea continuatus a *Cassino*. Mensurationem *Picardi* videre licet in Tractatu, quem ex sermone Gallico in Anglicum transtulit *Richardus Waller* & Londini sub titulo: *The Measure of the Earth* 1688. (plag. 6. Tab. 4.), edidit tum in Commentariis Academiæ Regiæ scientiarum Parisinæ ab A. 1666. usque ad A. 1699. Tom. 7. *Cassinianam* vero in Commentariis A. 1618.

§. 25. Quoniam per mensurationes *Cassinianas* alia prodibat figura Telluris, quam per demonstrationes *Newtoni* atque *Hugenii*; ideo jussu Regis Christianissimi *De Maupertuis* cum Sociis summo cum studio & plusquam Herculeo labore gradum Meridiani prope circulum polarem dimensus est aliasque observationes huic instituto inservientes instituit. Legatur Tractatus, quem Parisiis An. 1738. in 8. edidit ( plag. 13. Tabb. 10. ). Observationibus hisce exactissimis figura Telluris confirmatur *Newtoniana* & *Hugeniana*. Constat jussu Regis Christianissimi eodem fine missos esse Mathematicos in regnum Peruvianum, qui ubi redierint, cum publico dubio procul communica-

nica-

nicabunt absque mora ſuas quoque obſervationes.

§. 26. Theoriam atque praxin Gnomonicam more veterum rigidiſſime, ſed adeo intricate demonſtravit *Chriſtophorus Clavius* (§. 24. c. 1.) ut vix credibile ſit, ullum unquam ejus demonſtrationes omnes perlegiſſe. Faciliores vero exhibent *Dechales* atque *Ozanam* in curſibus (§. 4. 7. c. 1.).

§. 27. Demonſtrationes quoque affert *Guarinus Guarini* in parte poſteriore Mathematicæ cœleſtis (Mediol. 1683. in fol. 1. Alph. 3. plag.). Pars prior, quæ una cum poſteriore prodiit (7. Alph. 5. plag.) integram Aſtronomiam complectitur.

§. 28. Novam methodum horologia ſolaria magna conficiendi, lineis horariis per calculum determinatis, invenit *Picardus*, quæ in Operibus Mathematicis Academicorum Gallicorum (§. 31. c. 1.) legitur. Et Cel. *Philippus de la Hire* in ſua Gnomonica, quam patrio ſermone Pariſiis 1683. in 12. reg. publici juris fecit, methodum Geometricam expoſuit, ex quibusdam punctis per obſervationem determinatis lineas horarias ducendi.

§. 29. Anno 1625. *Eberhardus Welperus*, Artium Magiſter, Argentorati propriis ſumtibus typis deſcribi curavit ſuum de Gnomonica tractatum vernaculum in 4. (plag. 8.), in quo ex facili fundamento horologia in planis primariis deſcribere docet. Idem fundamentum jam antea perſpicue expoſuit eodemque in deſcribendis horologiis uſus eſt *Sebaſtianus Münſterus* in Rudimentis Mathematicis, quorum liber prior prima elementa Geometriæ, poſterior omnigenum horologiorum genus delineare docet. (Baſileæ An. 1551. in fol. 2. Alph. 20. plag.).

§. 30. *Welperi* Gnomonicam A. 1672. Norimb. in 4. (plag. 21. Fig. plag. 14½.) recudi curavit & integra parte ſecunda de horologiis inclinatis & declinatis ac figuris Zodiacalibus arcubusque diurnis & horis varii generis inſcribendis auxit, notisque partem primam illuſtravit *Joh. Chriſtophorus Sturmius*, Math. Prof. Altorfinus. Addidit A. 1681. (Norimbergæ in 4. plag. 19. Fig. plag. 9.) partem ter-

tertiam de horologiis reflexis & portatilibus. Eadem Gnomonica cum insigni augmento *Sturmiano* denuo recusa Norimbergæ An. 1708. in fol. (2. Alph. 16. plag. Tab. 35.). Accessit vero pars quarta, in qua methodi, *Picardiana & Lahiriana*, magna horologia describendi exponuntur (§. 28.). In hoc adeo opere plura continentur, quam ullibi in unum volumen congesta reperire licet, ita ut instar omnium esse possit, nisi quis demonstrationes exasciatas praxium desideret, theoriæ magis, quam praxi intentus. Appendicis quoque loco adjicitur Tractatus de horologiis automatis ex Anglico in Germanicum sermonem translatus, quemadmodum jam supra monuimus (§. 26. c. 6.).

§. 31. Commendandum hic quoque est opus de horologiis majoribus delineandis, methodo universali, quod debetur J. G. *Doppelmayero*, Matheseos Professori Norimbergensi, & sub titulo: **Neue und gründliche Anweisung, wie nach einer Universal-Methode grosse Sonnen-Uhren aus einem arithmetischen und geometrischen Fundament zu zeichnen**, Norimbergæ An. 1719. in fol. (Alph. 2. plag. 10. Tabb. 20.) prodiit. Quodsi idem cum novissima & auctiori Gnomonica *Welperiana* conjungas, vix est ut quicquam in praxi Gnomonica, sive utilitatem, sive curiositatem spectes, amplius desideres. Ceterum *Alexander* in eximio de horologiis Tractatu egregiam quoq; tradit methodum horologia majora solaria accurate in quovis pariete delineandi (§. 26. c. 6.).

§. 32. Solas praxes tradunt *Johannes Peterson* **Stengel** in Gnomonica universali, idiomate vernaculo (Ulmæ A. 1706. in 8. plag. 18. Tabb. 109.) edita, rerum varietate commendanda; *Georgius Michaelis* in Praxi Gnomonica Germanice A. 1701. Jenæ in 8. edita (12. plag fig. æn. plag. 1½.), qui tamen tantum communiora exponit; *Joh. Ulricus* **Müller** in Indice horarum infallibili Germanice itidem Ulmæ 1702 in 8. edito (1. Alph. plag. 9. Fig. æn. plag. 9.) & *Henricus Coetsius* in Horologiographia plana (Lugd. Bat. 1689. in 4. plag. 12 Tabb. 20.). qui tamen inscriptiones signorum & arcuum diurnorum negligit, nec ad

ad horologia portatilia descendit.

§. 33. Anno 1711. Augustæ Vindelicorum in 4. ( 2½. Alph. Tab. æn. 21¼. plag. ) prodiit *Johannis Gauppenii* Gnomonica Mechanica universalis, sermone vernaculo in eorum gratiam conscripta, qui in theoria Mathematica parum versati. Inseruit operi suo Tractatum brevem, quem *Henricus Bierum*, Architectus militaris, A. 1676. ( plag. 4. ) ediderat, & ejus fundamento mechanice describendi horologia utitur. Rerum varietate commendatur iis, qui variis horologiorum solarium generibus conficiendis delectantur.

§. 34. Eodem fundamento nititur *Johannes Jacobus Scheublerus* in libro Germanico, qui sub titulo: Neue und deutliche Anleitung zur practischen Sonnen-Uhr-Kunst Norimbergæ 1726. in 8. reg. ( plag. 14. Tab. 44. ) prodiit, & ubi inter alia ornamenta, quibus horologia solaria parietibus inscripta circumscribi possunt, delineat. Alias jam initio seculi præteriti *Casparus* Uttenhöfer / civis Norimbergensis, Pedem Mechanicum invenit, cujus ope horologia solaria mechanice delineari possunt. Descriptionis editio altera auctior prodiit Norimbergæ A. 1620. in 4. ( plag. 7 ).

§. 35. Horologiorum solarium omnis generis, præsertim portatilium descriptionem etiam tradit *Nicolaus Bion* in opere Gallico de constructione & præcipuis usibus instrumentorum Mathematicorum ( Parisiis 1709. in 8. reg. 1. Alph. Tabb. 28 ), quod unicum fere in hoc genere a J. G. *Doppelmayero* Prof. Math. Noribergensi ex Gallico in Germanicum sermonem verti meruit ( Noribergæ 1712. in 4. Alph. 2. plag. 5. Tabb. 28. ).

§. 36. Commendari quoque merentur Machinæ duæ, quæ pro describendis horologiis solaribus publicavit aliquoties jam citatus *Ignatius Gaston Pardies* ( Hagæ Comitum 1691. in 12. 2. plag. ). In hac editione tertia subjunguntur Elementis Staticæ.

§. 37. Methodum trigonometricam describendi horologia solaria excoluit *Bernardus Gruber*, S. Ordinis Cisterciensis in Monasterio B. V. *Mariæ* de Alto Vado Professus, in Collegio Archi-

chiepiſcopali Pragæ A. L. L. & Philoſophiæ Profeſſor, in Horographia Trigonometrica, ſeu Methodo accuratiſſima arithmetice per ſinus & tangentes horologia quævis ſolaria in plano ſtabili qualitercunque ſituato, etiam declinante & ſimul inclinato, facile negotio deſcribendi, & quædam alia, quæ vialia dicuntur, expoſitis eorundem fundamentis & rationibus, Vetero-Pragæ A. 1718. in 4. (Alph. 1. plag. 14. Tabb. 11.) edidit. Idem inſtitutum fuit *Benedicti Mariæ Caſtronii*, Ordinis Prædicatorum ac Panormi Matheſeos Profeſſoris, qui Horographiam univerſalem, ſeu Sciatericorum omnium planorum, gnomonice nova methodo deſcribendorum, pro quovis horologio ſive aſtronomico, ſive Italico, ſive Babylonico, ſive Judaico doctrinam uniformem atque univerſalem ſola triangulorum analyſi breviter expoſitam cum iſagogicis nonnullis Mathematum & triplici Appendice de nautica ſcientia, de militari Architectura ac de temporum Janua Panormi A. 1728. in fol. ( Alph. 4. plag. 10. Tabb. 19. ) edidit. Temporum Januam vocat Calendarium quoddam perpetuum, Januæ formam præ ſe ferens, quod a ſe inventum. Tenendum hic eſt methodum trigonometricam, quæ & arithmetica dici ſolet, in Gnomonica præferendam eſſe geometricæ, cum hæc facilius errori obnoxia fiat, qui per illam evitari poteſt.

§. 38. Quoniam non cujusvis eſt per calculum Trigonometricum eruere numeros, quibus in deſcribendis horologiis ſolaribus opus eſt; ideo *Joannes Ludovicus Quadri*, Academiæ Inſtituti ſcientiarum Bononienſis Adſcriptus idiomate Italico Bononiæ 1733. in 4. (Alph. 1. plag. 5. Tabb. 6.) edidit Tabulas Gnomonicas delineationi Horologiorum ſciatericorum inſerviente, quæ conſentiunt cum horologiis Italicis, ſonitu campanæ pulſæ horas indicantibus: ut adeo Italorum tantummodo uſui deſtinentur. Dederat jam ante iſtiusmodi Tabulas in Italia *P. Angelus Maria Colombonus* & apud Noſtros *Jo. Gaupius* in Gnomonica mechanica (§. 33.) & *Bernardus Gruber* in Horographia Trigonometrica modo laudata ( §. 37.). Edidit

dit quoque Tabulas Gnomonicas, sed pro horarum quovis genere sub titulo Deciliarum mathematicarum sermone patrio una cum brevi descriptione praxeos universæ Geometriæ & Trigonometriæ tam sphæricæ, quam planæ, quæstionibusque & problematibus astronomicis chronologicisque ad Calendarium ecclesiasticum pertinentibus, ope tabularum logarithmicarum facili modo solvendis, Romæ 1730. in 4. reg. (Alph. 4. plag. 2. Tabb. 14.).

§. 39. Hic denique commemorare lubet *Adriani Metii*, M. D. & Matheseos Professoris in Academia Frisiorum, Primum mobile astronomice, sciographice, Geometrice & hydrographice nova methodo explicatum. Prodiit editio nova ab innumeris mendis vendicata & instrumentis mathematicis aucta a *Guilielmo Blaev* Amstelodami An. 1633. in 4. (Tomus I. Alph. 2. Tomus II. Alph. 1. plag. 12. Tom. III. Alph. 1. plag. 10. Tom. IV. plag. 20.) Primo exponitur doctrina sphærica, Gnomonica & Geographia; secundo continetur accurata descriptio Astrolabii utriusque & ejus usus, una cum Trigonometria sphærica; tertio solvuntur problemata primi mobilis per astrolabium, Trigonometriam sphæricam & Tabulas astronomicas; quarto denique problemata primi mobilis geometrice delineantur & arithmetice solvuntur, atque Tabulæ geographicæ & hydrographicæ describuntur & per easdem tumque per Canones ex secantibus conflatos ars navigandi absolvitur.

## CAPUT. XI.
## DE
# ARCHITECTURA CIVILI.

§. 1.

INtegram Architecturam civilem tradidit *Virtuvius*, qui sub *Augusto* floruit, cui decem de Architectura libros dedicavit. Optima editio Latina prodiit Amstelodami 1649. in fol. (6. Alph.). Accessere huic editio-

editioni novæ caſtigationes & obſervationes *Guil. Philandri* integræ, *Danielis Barbari & Claudii Salmaſii* excerptæ & paſſim inſertæ. Præmittuntur Elementa Architecturæ *Henrici Wottoni*, Equitis Angli: ſubjiciuntur Lexicon Vitruvianum *Bernhardi Baldi*, ejusdem Scamilli impares Vitruviani, de pictura libri tres *Leonis Baptiſtæ de Albertis*, de ſculptura excerpta ex Dialogo *Pomponii Gaurici* & Commentarius de ſculptura & pictura *Ludovici Demontioſii*.

§. 2. Reprehendunt in egregio alias opere *Virtuviano*, quod nullum ordinem tenuerit; quod obſcure ſcripſerit, nempe judice *Leone Baptiſta de Albertis* (a) Græcis Latine & Latinis Græce; quod denique multa ſuperflua ac aliena immiſcuerit. Hinc *Perrault*, quemadmodum olim ſuaſerat *Philibertus de l' Orme*, regulas Architectonicas Vitruvianas ex opere prolixo excerpſit & in ordinem redactas ſub titulo: *Architecture generale de Vitruve reduite en Abregé* publici juris fecit. (Amſtelodami A. 1681. in 8. 16½. plag. & fig. æn. plag. 1½.). Textum obſcurum *Virtuvii* in verſione Germanica, & adjecta ſingulis capitibus paraphraſi clariorem reddidit *D. Gualt. H. Rivius*. Recuſa eſt hæc verſio Baſileæ A. 1614. in fol. (7. Alph. 2. plag.). In paraphraſi ſeu Commentario, ſi mavis, more *Vitruviano*, multa aliena admiſcuit. Magis commendanda eſt verſio Gallica, quam primum An. 1673. typis deſcribi, ſed A. 1684. auctiorem & emendatiorem recudi curavit *Perrault* adjectis notis ſelectis & figuris æri nitidiſſime inciſis (Pariſiis in fol. reg. 4. Alph. 5. plag.). Idem *Perrault* opus præclarum de Ordinibus A. 1684. in fol. addidit ſub titulo: *Ordonnance des cinq eſpeces de Colonnes ſelon la methode des anciens*, in quo præjudicia Architectorum refellit & quod inſtar ſupplementi Architecturæ *Vitruvii* haberi poteſt, qui doctrinam de Ordinibus imperfectam tradidit.

§. 3. Poſt *Vitruvium* libros decem de re ædificatoria edidit *Leo Baptiſta de Albertis* aliquoties recuſos & ex idiomate Latino

S 3

(a) lib. 6, c. 1. de re ædificatoria p. 80. & ſeq.

tino in varias Linguas translatos. Prodiit Latine Parisiis An. 1512. in 4. (2. Alph.) & Florentiæ A. 1585. Italice lucem adspexit Venetiis A. 1546. in 8. (1. Alph. 9½. plag.); Gallice An. 1553. Multa habet utilia; sed *Vitruvio*, quemadmodum intenderat, palmam præripere non potuit. Doctrinam de Ordinibus non satis perfectam tradidit.

§. 4. Mox secuti sunt *Sebastianus Serlius & Andreas Palladius* coëtanei, quorum ille septem, hic quatuor de Architectura libros composuit. Architecturæ *Serlianæ* libri quinque Italice Venetiis An. 1602. in fol. Germanice Basileæ An. 1609. in fol. (4. Alph. 13. plag.) prodiere. Quinque tantum ordines cum variis ædificiorum generibus describit; regulas ex *Vitruvio* supponit, a quibus recedere religioni duxit. Vid. lib. 3. f. 46. edit. Venetæ. Liber sextus de ædificiis privatis in publicum nondum prodiit: Septimum de ædificiis publicis *Jacobus Strada* Latine & gallice Francofurti A. 1575. in fol. imprimi curavit.

§. 5. *Palladius* hanc laudem meruit, quod splendorem ordinibus ac operibus suis conciliaverit. Libro primo regulas fundamentales Architecturæ tradidit; reliquis varia ædificiorum & operum architectonicorum genera delineavit. Commendatur Architecturæ purioris studiosis. Prodiere libri omnes Italice A. 1575. in fol. recusi anno superiore An. 1714. Venetiis in fol. adjecto ipsius de Antiquitatibus Romanis tractatu. Libros duos priores *Georgius Andreas* **Böckler** / Germanice vertit & multis annotationibus auxit (Norimbergæ 1689. in fol. 1. Alph. 3. plag. Tabb. 88.). Idem *Palladius* scripsit de Templis Romanis (A. 1554. in 8.).

§. 6. *Philibertus de Lorme*, Caroli IX. Consiliarius, Eleemosinarius & Architectus A. 1567. Parisiis in fol. edidit novem de Architectura libros idiomate vernaculo. Architecturæ peritia adeo celebris erat, ut ad excitanda palatia Principum ex Gallia in exteras regiones evocaretur.

§. 7. *Jacobus Barozzius Vignola* A. 1631. Italice de quinque ordinibus scripsit, cujus liber in varias linguas translatus. Utor

ego editione Gallica, quæ sub titulo: *Regles des Cinq ordres d' Architecture d. J. B. de Vignole avec plusieurs augmentations de Michel Ange Buonaroti* cura *Duræi de Champdoré* Lugduni Batavorum A. 1712. in 8. prodiit (plag. 9½.). Eundem prolixis additamentis locupletavit *Daviler* & idiomate Gallico Parisiis in 4. edidit cum Lexico Architectonico. Mox recusum est opus sub titulo: *Cours d' Architecture, qui comprend les Ordres de Vignole avec des Commentaires, les figures & descriptions des plus beaux batimens & de ceux de Michel Ange &c.* Amstelodami An. 1694. in 4. (3. Alph. 20. plag. Tabb. 103. magnam partem textui insertæ). *Leonhardus Christophorus Sturmius* Germanice vertit & notis quibusdam auctum, omisso Lexico, Amstelodami 1699. in 4. (2. Alph.) edidit, figuram plagulis 3½. adjectis ultra eas, quæ in editione Gallica habentur. Prodiit nuper nova editio Gallica Parisiis in 4. auctior. Laudatur ob facilitatem & perspicuitatem. Unde omnibus fere sese probavit, qui praxi operam dant.

§. 8. *Vincentius Scamozzi* A. 1615. Venetiis sermone patrio edidit librum primum, secundum, tertium, sextum & septimum Ideæ Architecturæ universalis in fol. Præstantissima editio est, quæ idiomate Gallico Lugd. Bat. An. 1713. in fol. reg. (3. Alph. 5. plag. Tabb. 105. quorum 84. textui insertæ) sub titulo: *Oeuvres d' Architecture de Vincent Scamozzi* prodiit. Liber sextus & tertius Germanice versus sub titulo: **Klärliche Beschreibung der fünf Säulen-Ordnungen und der gantzen Bau-Kunst.** Norimbergæ An. 1697. in fol. (2. Alph. 6. plag. Tabb. 85.) lucem adspexit. Laudatur, quod Symmetriam unus omnium optime excoluerit, sed intricate scribit.

§. 9. *Carolus Philippus Dieussart* in Theatro Architecturæ Civilis, quod vernaculo sermone Bambergæ 1697. in fol. reg. (1. Alph. 3. plag. Tabb. 95.) prodiit, non modo regulas Architectonicas explicavit, verum etiam Ordinis juxta institutum *Palladii*, *Vignolæ*, *Scamozzi*, *Petri Catanei*, *Sebastiani Serlii* & *Brancæ* inter se comparavit: quod idem executus est ante ipsum

ipſum *Rol. Freard. de Chambray* in Parallelismo Architectonico Gallice Pariſiis A. 1650. in fol. publicato. Et poſtea idem fecit *le Blond* in Libro ſub titulo: *Parallele des V. Ordre d' Architecture* Pariſiis 1710. in 4. edito. Plurium quoque Architectorum Ordines inter ſe confert *Johannes Christianus* Seyler / in Parallelismo Architectonico Germanice Lipſiæ in fol. edito.

§. 10. *Franciſcus Blondel* in Curſu Architecturæ Gallico (Pariſiis A. 1698. in fol. reg. 8. Alph. 14. plag. Tabb. 24. cum figuris plurimis textui inſertis) parte prima Ordines *Vitruvii*, *Vignolæ*, *Palladii* & *Scamozzi* explicat; in cœteris quatuor ex omnium Architectorum celebrium ſcriptis congeſſit, quicquid circa ordinum uſum notatu dignum occurrit. Habentur etiam in eodem alia nonnulla ad Architecturam ſpectantia, v. gr. de feneſtris & ſcalis. Curſus hjus aliquid jam 1675. prodierat. Ea potiſimum explicare intendit, quæ ad ornatum ædificiorum faciunt.

§. 11. *Nicolaus Goldmannus*, Vratislavienſis, in Tractatu de Stylometris (Lugd. Bat. 1661. fol. Lat. & Germ. 9. plag. Tab. 40) oſtendit, quomodo Ordines Architectonici ab ipſo ad majorem perfectionis gradum deducti ope peculiarium quorundam inſtrumentorum facile delineari poſſint: quorum & conſtructionem, & uſum docet, textui Latino ad latus adjecta verſione Germanica. In opere vero Architectonico, quod *Leonhardus Christophorus Sturmus* ſub titulo: **Vollständige Anweiſung zu der** *Civil-***Bau-Kunſt** (Guelpherbyti 1696. in fol. reg 2. Alph. 4. plag. Tabb. 74.) publici juris fecit, præter Ordinum doctrinam magna dexteritate tradidit, quicquid in *Vitruvii*, & Architectorum Italorum ſcriptis atque *Vilalpandi* Commentario in Prophetam Ezechielem, ex quo ſe plura didiciſſe ait, quam ex Architectorum ceterorum omnium ſcriptis, boni continetur: ita ut hoc opus cœteris omnibus præferatur. Cl. Editor A. 1699. Appendicem ſub titulo: **Ausübung der** *Civil-***Bau-Kunſt des Goldmanns** / in fol. (1. Alph. 14. plag. Tabb. 19.) adjecit, in quibus ex aliis ſupplet, quæ in eo ſcitu neceſſaria deſiderantur.

Ordi-

Ordinem quoque ſextum, quem Germanicum appellat, proponit; ſed hactenus in uſum non receptum. Fallitur autem plurimum editor, dum ſibi aliisque perſuadere vult, *Goldmannum* regulas Architecturæ demonſtraſſe & eam in formam ſcientiæ redegiſſe. Plura ad operis hujus illuſtrationem poſthac edidit *Sturmius*, qui Architecturæ totus erat deditus. Sed de his dicemus mox apertius.

§. 12. *Dominicus de Roſſi* in Studio Architecturæ civilis in ornamentis portarum & feneſtrarum, delineatis ex inſignioribus Romæ ædificiis A. 1702. ſeu potius 1712. Romæ in fol. reg. edito figuris æneis 143. celeberrimorum Architectorum monumenta circa ornatum portarum & feneſtrarum repræſentat. Auguſtæ Vindelicorum figuris ad minorem modulum reductis recuſum eſt hoc opus, ut facilius & minori ſumtu comparari poſſit. Plurima tamen habet, quæ imitari non licet, niſi a puritate Architecturæ Græcorum recedere velis.

§. 13. Ad eam perſpiciendam inſervit opus, quod *Antonius Desgodetz*, qui ædificia antiqua Romæ ex ruderibus nitidiſſime delineavit, ſub Titulo: *Edifices antiques de Rome* (Pariſiis 1697. in fol. (3. Alph. 17. plag.) edidit.

§. 14. *Johannes Balthaſar* **Lauterbach** in Compendio Architecturæ (Amſtelodami A. 1699. in 8. Gall. 2. plag. Tabb. 18.) ordines Architectonicos delineandi methodum facillimam proponit.

§. 15. In Gallia A. 1728. in 4. reg. (Alph. 1. plag. 19½. Tabb. 150.) prodiit opus architectonicum ſub titulo: *Architecture moderne, ou l' Art de bien batir pour toutes ſortes de Perſonnes, tant pour les Maiſons des particulieres, que pour les Palais.* Explicantur ſatis perſpicue omnia, quæ ad exſtructionem ædificiorum omnis generis ſcitu neceſſaria, excepta doctrina de Ordinibus, quæ aliunde nota ſupponitur. Maximam operis partem complent omnis generis ædificiorum delineationes, quibus doctrina de diſtributione ædificiorum illuſtratur, vulgo vel neglecta, vel ſaltem nonniſi levi brachio pertractata. Commendatur etiam Tractatus de Architectura, quem *Muët* in 4. edidit, invention-

tiones quasdam novas continens; ſed nobis non viſus.

§. 16. Ædificia magnifica cura *Petri Poſt*, Architecti inſignis, paſſim per Bataviam exſtructa accurate deſcribuntur tum quoad ichnographiam, tum quoad orthographiam cum externam, tum internam in opere ſplendido, quod ſub titulo: *Les Oeuvres d' Architecture de Pierre Poſt* Lugduni Batavorum An. 1715. in fol. reg. (plag. 22. Tab. 75.) prodiit. Orthographiæ externæ & inchnographiæ ædificiorum, quæ in Batavia extruxit *Philippus Vingboon*, Architectus Amſtelodamenſis, exhibentur in alio opere, quod ſub titulo: *Les nouvelles oeuvres d' Architecture de Philippe Vingboons* Lugduni Batavorum An. 1715. in fol. reg. (plag. 11. Tab. 80.) lucem adſpexit.

§. 17. Villas veterum, in quibus deſcribendis admodum parcus eſt *Vitruvius*, idiomate Anglico plenius deſcripſit *Robertus Caſtellus* & ſub titulo: *The Villa's of the ancients illuſtrated* Londini ſuis ſumtibus in fol. (Alph. 1. plag. 12. Tabb. 11.) edidit. De Amphitheatris vero & præcipue Veronenſi libros duos idiomate Italico Veronæ 1718. in 12. (plag. 15. Fig. æn. 15.) edidit *Scipio Maffejus*, in quo non minus ea, quæ ad hiſtoriam, quam architecturam eorundem pertinent, exponuntur. Formam minorem elegit autor ob commodiorem uſum in ruderibus eorundem perluſtrandis.

§. 18. Anno 1721. Viennæ Auſtriæ in fol. reg. (Alph. 1. plag. 21. Tabb. 93.) prodiit opus ſplendidiſſimum *Johannis Bernhardi Fiſcheri ab Erlachen*, S. Cæſareæ Majeſtatis Architecti primarii, ſub titulo: **Entwurff einer hiſtoriſchen** Architectur, hoc eſt, ſpeciminis Architecturæ hiſtoricæ, ſumtibus Autoris, in quo varia exhibentur ædificia, quæ ab antiquis hiſtoricis celebrantur, vel hodienum apud exteras gentes conſpiciuntur, æri nitidiſſime inſculpta. Textui Germanico adjicitur verſio Gallica, ut exterorum quoque uſui inſerviat.

§. 19. In opere architectonico *Franciſci Borromini*, Patrum Congregationis Oratorii, quod Romæ eſt, Architecti, deſcribuntur Oratorium ædesque Romanæ P. P. Congregationis Oratorii S. *Philippi Neri*. Prodiit

Romæ

Romæ An. 1725. in fol. (plag. 8. Tabb. 67.).

§. 20. In Schola vero civili Architecturæ, quam *Ferdinandus Ruggieri*, Architectus Italus, idiomate patrio Florentiæ An. 1722. in fol. reg. ( Tabb. 80. ) edidit, præmissa præfatione & dedicatione cum indice contentorum, exhibentur ornamenta januarum & fenestrarum cum mensuris, ichnographia, orthographia & sectionibus verticalibus e potioribus Florentiæ ædificiis desumta, quæ a celeberrimis Italiæ Architectis extructa esse constat, ita ut nulla per totam Italiam occurrat urbs, quæ ædificiis se magis commendet Florentia.

§. 21. Non exiguus est numerus illorum scriptorum, quæ illustrandæ Architecturæ *Goldmanniæ* causa reliquit *Leonhardus Christophorus Sturmius* & quæ post fata ipsius Augustæ Vindelicorum impensis Chalcographi Augustani *Jeremiæ Wolfii* lucem adspexerunt. Eorum argumentum ex ipso titulo comparet, quos hic ex Germanico in Latinum versos exhibere lubet. Nimirum A. 1718. in fol. (plag. 8. Tabb. 11. ) lucem adspexerunt Idea & compendium Architecturæ Civilis, explicationem terminorum technicorum & præcipuarum regularum exhibens; An. 1717. ( plag. 17. Tabb. 17. ) officina ornatus anhitectonici perfecta, in qua ordines architectonici juxta *Goldmannum*, cujus insignia in hoc genere merita, describuntur; An. 1730. (plag. 4½. Tabb. 10.) Regulæ symmetriæ, eæque in Architectura templi Solomonæi conspicuæ & ab eodem mutuo in nostra opera transsumtæ; An. 1718. ( plag. 4½. Tabb. 9. ) tractatio de arcuationibus architectonicis triumphalibusque arcubus rite designandis; An. 1720. ( plag. 3. Tabb. 17. ) institutio de interioribus ædificiorum rite ordinandis & disponendis, ubi etiam de aperturis fenestrarum & januarum, & de caminis, scalis, coelis conclavium, aulis subdialibus præcepta reperiuntur. A. eodem (plag. 4½. Tabb. 5. ) institutio *Goldmanniana* de ornatu architectonio extraordinario, veluti picturis, quibus ædificia exornantur, statuis & sculpturis, obeliscis, encarpis, cornibus A-

maltheæ &c. A. 1715. (plag. 4. Tabb. 15.) institutio de commoda dispositione ædium privatarum & civilium; A. eodem (plag. 5. Tabb. 8.) de suburbanis & nobilium ædibus in agris; A. 1718. (plag. 21. Tabb. 35.) de construendis palatiis Principum ad Architecturæ regulas & genium seculi nostri; A. eodem (plag. 6. Tabb. 13.) de ædificiis ad conventus publicos Provinciæ rectorum, magistratuum, mercatorum &c. instituendos aptis; A. eodem (plag. 8. Tabb. 22.) de templis varii generis bene construendis; A. 1720. (plag. 6½. Tabb. 15.) de ædificiis publicis, quæ curæ orphanorum, liberalibus studiis erudiendorum, ob flagitia castigandorum, senum, ægrotorum, peregrinorum & vinctorum custodiæ destinantur, rite parandis; A. eodem (plag. 2. Tabb. 5.) de monumentis defunctorum, cenotaphiis, castris doloris &c. A. eodem (plag. 4½. Tabb. 10.) de machinis hydraulicis, aquæ ductibus, fontibus & cisternis publicis & tandem A. 1721. (plag. 2½. Tabb. 4.) de Navium armamentariis & stationibus, itemque partibus rite parandis. Ceterum huc etiam pertinet Prodromus Architecturæ Goldmannianæ editioni novæ & auctiori præmissus, qui sub titulo: Vorbereitung zu einer neuen und vermehrten Edition der vollständigen Anweisung zur Civil-Bau-Kunst, Augustæ Vindelicorum A. 1714. in fol. reg. (plag. 10. Tabb. 29.) prodiit. In eo de cognitione Architecto necessaria agit, consilium impertitur, quomodo Princeps efficere possit, ut omnis materia sufficienti copia in promtu habeatur, ædificium publicum describit, in quo materiæ cum machinis & instrumentis asserventur, & denique specimina quædam Architecturæ exhibet, veluti ideam palatii principalis, domus suburbanæ Ducis Megapolitani & turris alicujus prægrandis.

§. 22. In Anglia *Guilielmus Halfpenny* Londini A. 1728. in 4. (plag. 3. Tabb. 15.) edidit libellum sub titulo: Magnum in parvo, seu the Marrow of Architecture, hoc est, Medulla Architecturæ. In eo ordines architectonicos juxta *Palladium* una cum arcubus delineare docet.

§. 23.

§. 23. Artem tignariam illustrant *Dechales* in cursu (§. 4. c. 1.) *Johannes* **Wilhelm** in Architectura civili idiomate Germanico edita Norimbergæ in fol. (5. plag. Tabb. 74.) & *Johannes* **Vogel** in Architectura moderna Germanico itidem idiomate conscripta (Hamburgi A. 1707. in fol. 3. plag. Tab. 36.). In Anglia *Jacobus Smith* edidit Tractatum de Arte tignaria Londini An. 1733. in 8. maj. (plag. 2. Tabb. 41.) sub titulo: *The Carpenters Companion*, h. e. Fabrorum lignariorum Comes. Sed non alia habet quam *Wilhelmus*, nisi quod appendicem de ordinibus delineandis adjecerit.

§. 24. Artem secandi lapides in usum architectonicum, quam primus dedisse creditur *Philibertus de Lorme* in Architectura (§. 6.), docent *Dechales* in cursu (§. 4. c. 1.), qui sua ex opere, quod *P. Deran* 1643. publicavit, præstantissimum in hoc genere, descripsit & *des Argues*, cujus liber ex Gallico in Germanicum versus sub titulo: **Kunstrichtige und probmäßige Zeichnung zum Steinhauen in der Bau-Kunst** / Norimbergæ A. 1699. in 8. (15. plag. Tabb. 154.) prodiit.

§. 25. Quoniam vero Autores isti, si P. *Dechales* excipias, omissis demonstrationibus, tantummodo praxin inculcant, neque etiam hic perfectam dedit Theoriam; ideo hunc defectum supplere conatus est *Frezier* in Theoria & Praxi de Sectione Lapidum, seu Tractatu de Stereotomia, sermone Gallico duobus Tomis Argentorati 1737. & 1738. in 4. maj. edito (Tomus I. Alph. 2. plag. 14. Tabb. 27. Tom. II. Alph. 2. plag. 19½. Tabb. 69.). In usum eorum, qui praxi operam navant, ex Tomo secundo excerpi poterant, quæ huc faciunt, aut opus insigne *P. Deran* in Linguam Germanicam verti mereretur.

§. 26. Ad architecturam aquarum spectant libri Italici sequentes: 1. *Jo. Baptistæ Barattieri* Architectura d'Acque (Piacenza 1656. in fol. 3. Alph. 6. plag.) 2. *Cornelii Meyeri*, Batavi, L'Arte di restituire a Roma la tralasciata navigatione del suo Tevere (Romæ 1675. in fol. 2. Alph. 3. plag. cum multis fi-

guris textui insertis) & ejusdem Nuovi ritrovamenti (Romæ A. 1689. in fol. plag. 8. & 1696. in fol. plag. 12. cum figuris plurimis) 3. *Dominici Guielmini* della natura de fiumi Trattato (Bononiæ 1697. in 4. 2. Alph. 2. plag. 15. Tabb.). Ex *Meyeri* libro insigni plagio sua omnia descripsit Anonymus Gallus in libello Amstelodami A. 1696. in reg. 8. edito (6. plag. Tab. 12.) sub titulo: Traité des moyens de rendre les Rivieres navigables. Quoniam vero Theoriæ loco est, quod ab Italis præsertim de motu aquarum traditum; ideo non alienum a scopo præsente est injicere mentionem sylloges scriptorum de motu aquarum, quæ sub titulo: *Raccolta d' Autori, che trattano del moto dell' Aque* Tomis tribus in 4. maj. Florentiæ 1723. (Alph. 9. plag. 6. Tabb. 44. cum multis figuris textui insertis) prodiit.

§. 27. Ad Architecturam aquarum referri quoque potest Tractatus de pontibus & aggeribus & dissertatio de erismatis, fornicibus pilis & anteridibus pontium *Henrici Gautier*, Architecti & Inspectoris viarum regiarum, pontium & aggerum in Gallia. Prodiit ille sub titulo: *Traité des ponts & chaussées* Parisiis 1716. in 8. (plag. 14. Tabb. 26.); hæc vero sub titulo: *Dissertation sur les Culées voussoirs, piles & poussées des Ponts.* Habemus ab eodem autore Tractatum de viis muniendis sub titulo: *Traité de la Construction des Chemins* Parisiis A. 1716. in 8. (plag. 8. Tabb. 5.) editum.

§. 28. De Architectura navali sermone Anglico commentatus est *Wilhelmus Sutherland*, cujus quinque tentamina huc spectantia sub titulo: *The ship-builders Assistant, or Some Essays towards compleating the Art of Marine Architecture* Londini A. 1711. in 4. (Alph. 1. Tabb. 13.) lucem adspexerunt. Inprimis autem hanc Architecturæ partem tradidit Anonymus in Arte extruendi naves & earum constructionem perficiendi, quæ Amstelodami sub titulo: *L' Art de batir les vaisseaux* in 4. (Alph. 1. plag. $5\frac{1}{2}$. Tabb. 147. quarum 35. textui inseruntur) edita.

§. 29. Geometriam practicam ad Architecturam civilem applicatam addiscere licet ex opere Ang-

Anglico, quod ſub titulo: *Practical Geomotry applied to the uſefull Arts of Building, Surveying, Gardenig and menſuration* Londini 1726. in fol. (Alph. 1. plag. 11. Tabb. 40.) edidit *Batty Langley*. Eodem inſtituto inſervit *Architectura practica*, quam *Bullet*, Architectus Regius, 1691. in 8. maj. (Alph. 4. pl. 4.) Pariſ. publici juris fecit.

§. 30. In Dictionario Architectonico, quod Londini 1734. in 8. reg. (Alph. 2. plag. 18. Tabb. 33.) ſub titulo: *The Builder's Dictionary* prodiit, non modo termini explicantur, verum etiam ex Architectorum celebrium ſcriptis excerpuntur, quæ res ipſas vocabulis denotatas concernunt. Unde non modo uſui eſt Anglis, verum etiam exteris uſui eſſe poteſt. Ceterum nullam hic mentionem facimus ſcientiæ Architectorum militarium de *Belidor*, in qua multa habentur ad Architecturam ſpectantia ſingularia, quæ alibi fruſtra quæſiveris, quia de hoc libro dicemus capite 13.

## CAPUT XII.

# De PYROTECHNIA.

§. 1.

INter noſtros, qui pyrotechniæ operam dant, maximi fiunt *Caſimirus Simienowitz*, Polonus, *Johannes Sigismundus Buchnerus* & *Erneſtus Braunius*. Illius opus a *Thoma Leonhardo* Beeren ex Latino idiomate in Germanicum translatum & a *Daniele* Elrich integra parte ſecunda auctum prodiit Francofurti ad Mœnum A. 1676. in fol. ſub titulo: Vollkomene Büchſen-Meiſterey-Kunſt. Ex eo ſua plerumque deſcripſit *Dechales* in Curſu (§. 4. c. 1.). Iſtius Theoria & praxis Artilleriæ Germanico idiomate Norimbergæ 1685. in fol. (2. Alph. 18. plag. Tabb. 53.) hujus denique Noviſſimum Fundamentum & Praxis Artilleriæ eodem ſermone conſcriptum Dantiſci 1687. in fol. (2. Alph. 16. plag. Tabb. 60.) lucem adſpexit. Cæterum Autores iſti non tantum de iis agunt, quæ in bello uſui ſunt, ſed ignium quoque feſtivorum rationem exponunt.

§. 2.

§. 2. *Michaël* Mieth in Artilleriæ recentiori praxi lingua nobis vernacula conscripta (Francof. 1684. in fol. 3. Alph. 10. plag. Tabb. 60.) tormentorum & mortariorum descriptionem omnium exactissimam dedit & ignium nocivorum rationem declaravit, festivis omissis. Atque hi Autores abunde satisfaciunt iis ipsis, qui Pyrotechniæ data opera incumbunt.

§. 3. Inter Gallos eminet *Suriræus de S. Remigio*, cujus Commentarii Pyrotechnici (*Memoires d' Artillerie*) accuratam descriptionem continent omnium machinarum & instrumentorum bellicorum hodie usitatorum, una cum rebus aliis eo pertinentibus. Optima editio est Parisiensis An. 1707. in reg. 4. (4. Alph. 17. plag. Tabb. 196.), quæ cœteris quoque longe auctior.

§. 4. Ob peritiam bellicam celeberrimus *Cœhornius* sermone Batavo de Artilleria libellum brevem, sed autore suo dignum, conscripsit, qui suppresso ejus nomine in Germanicum translatus sub titulo: **Der gründliche Unterricht von der Artillerie**, Hamburgi 1699. in 8. (10. plag. Tabb. 23.) prodiit.

§. 5. Tyronum usui servit Fabrica *Vulcani*, quam *Eques de S. Juliano* (*Chevalier de Saint Julien*) Hagæ 1706. in reg. 8. (10. plag.) edidit. Titulus libri: *La Forge de Vulcain, ou l' Appareil des Machines de Guerre.*

§. 6. An. 1713. idiomate vernaculo prodiit Compendium pyrotechnicum, Pyrotechniæ studiosis commendandum, sub titulo: **Gründlicher Unterricht von der** *Theoria* **und** *Praxi* **der heutigen Büchsenmeisterey /** Francofurti 1713. in 8. (2. Alph. 4. plag. 29. Tabb.). Si titulo fidem habemus, lingua Gallica ipsum conscripsit *Eques de S. Juliano* modo laudatus, & inde in Germanicam transtulit *Augustinus* **Brand.** Sed diversum non modo est a Fabrica *Vulcani* paulo ante laudata; verum etiam partem primam integram verbotenus ex *Miethii* Artilleria descriptam reperio, quod quomodo in versinone libri a Gallo Gallice conscripti accidere potuerit, non satis apparet.

§. 7. Aliud compendium, sed minoris pretii, ante dedit *Georgius*

*gius Andreas* Böckler Tom. III. & IV. Manualis Architecturæ militaris (Francof. & Lipſ. A. 1689. in 16. Tom. III. 4. plag. Tabb. XI. & Tom. IV. 10. plag. Tabb. 34.). Cum tamen *Cæhornius*, *Eques de S. Juliano & Brandius* tantum tradant, quæ uſui bellico inſerviunt; *Bœcklerus* quoque de ignibus feſtivis tractat.

§. 8. Cæterum huc etiam referri debet *Blondelli* Tractatus de bombis jaciendis, qui ſub titulo: *L' Art de jetter les Bombes* Pariſiis 1683. in 4. prodiit & in Germanicam linguam translatus *Sulzbaci* 1686. in 8. recuſus. Scriptum Mathematico dignum. Huic affine eſt ſcriptum, quod ſub titulo: *Le Bombardier Francois*, *de Belidor* Pariſiis edidit, Amſtelodami recuſum 1734. in 4 reg. (Alph. 2. plag. 11. Tabb. 8.), in quo ſimul praxis Pyrotechniæ concinna perſpicuitate exponitur. Pertinet huc etiam F. E. Comitis *de Herberſtein* Cyclodiatomia, qua pro rei tormentariæ incremento motum ac tempus projectorum menſurat & demonſtrat (Pragæ A. 1716. in 8. Alph. 1. Tabb. 20.)

## CAPUT XIII.

# De ARCHITECTURA MILITARI.

§. 1.

Qui de Architectura militari commentati ſunt, vel formas muniendi proprias, vel alienas exponunt.

§. 2. Primum forma muniendi Belgica admodum celebris extitit, de qua ſcripſit *Adamus* Freytag / Polonus, cujus Architectura militaris Germanice prodiit Amſtelodami An. 1665. (*Wolfii Matheſis. Tomus V.*) in fol. (2. Alph. 9. plag. Tabb. $1\frac{1}{2}$. Alph.). Eandem in numeris tantum immutavit *Gerhardus* Melder / cujus Praxis fortificatoria Francofurti 1666. in fol. lucem adſpexit (plag. 36. Tabb. 8.).

§. 3. Minori autem in pretio ſtatim haberi cœpit, cum An. 1645. Comes *de Pagan* ſuam muniendi formam publicaret



Pari-

Parisiis in fol. (1. Alph. 6. plag. Tab. II.) sub titulo: *Les Fortifications de Comte de Pagan*, postea in sermonem Germanicum translatam. Cum eo in multis convenit *Henricus Rusius Baro de Rusenstein*, cujus muniendi forma cum *Melderiana* prodiit (§. 2.).

§. 4. Eidem quoque agnata est, magis tamen quam *Rusiana* ab eadem dissidet, quam *Blondellus* sub titulo: *Nouvelle maniere de fortifier les places*, Parisiis 1686. in 12. reg. (5. plag. Tab. XII.) in lucem emisit, recusam Hagæ Comitum (A. 1686. in 8.) bonam quidem, sed sumtuosam nimis.

§. 5. Comes de *Vauban* duas muniendi formas invenit & secundum eas celebria munimenta exstruxit; sed neutram ipsemet descripsit. Priorem optime delineavit Abbas *du Fay*, qui eam sub titulo: *La veritable maniere de bien fortifier de M. Vauban* in lucem publicam emisit. (Amstelod. A. 1692. in 12. plag. 9.). Posteriorem primus descripsit Autor Anonymus in libro Gallico, cujus titulus: *L' Ingenieur Francois* (Paris. 1691. in 8. reg. 13½ plag. Tab. 33.). Utramque *Sturmius*, aliquoties jam laudatus, in libro Gallico sub titulo: *Le Veritable Vauban* explanavit (Hagæ Comitum 1709. in reg. 8. plag. 14. Tabb. 31.). Recenset idem regulas Architecturæ militaris fundamentales & principia Arithmeticæ ac Geometriæ practicæ more communi præmittit, ut adeo tyronum instituto inserviat hic liber.

§. 6. *Cæhornius* suam muniendi methodum primum sermone Batavo edidit Leeuwardiæ 1685. in fol. (45. plag. Tab. 14.). Postea in sermonem Gallicum translatus prodiit Hagæ Comitum An. 1706. in reg. 8. (19. plag. Tabb. 14.) sub titulo: *Nouvelle Fortification tant pour un terrain bas & humide, que sec & elevé.*

§. 7. Singulares muniendi formas, a reliquis prorsus dissidentes apud Italos dedere *Alexander de Grotte* & *Donatus Rossetti.* Prior prodiit Italice Venetiis A. 1617. (3. Alph. in fol.) anno sequente Monachii Germanice recusa: posterior itidem Italice Augustæ Taurinorum 1678. in fol. (Alph. 2. plag. 5.)

§. 8. Similiter apud nostros inusitatam reliquis formam dedit *Bernhardus* Scheiter in libro Germanico, cui titulus: Neu vermehrte und verstärckte Vestungs-Bau- u. Krigs-Schule (Brunswigæ 1672. in fol. 11. Alph. 7. plag. Tabb. 24). Eam cum anno sequente oppugnaret *Christianus* Neubauer eidemque aliam suam opponeret in libro Germanico, cui titulus: Wohlmeinende Gedancken / oder *Discurs* über ausgegange *Fortification* des Tit. Herrn Joh. Bernhard Scheiters (Coloniæ ad Spream in 8.); *Scheiterus* A. 1677. Argentorati in fol. (1. Alph. 2. plag. Tabb. 8.) Examen fortificatorium in lucem publicam emisit, in quo *Neubauerianam* oppugnat, suam defendit, aliamque novam superaddit. *Neubauerus* autem A. 1679. suam in vera praxi Architecturæ militaris (Stargardiæ An. 1679. in fol. plag. 19. Tabb. 8.) uberius exposuit.

§. 9. *Ernestus Fridericus de Borgsdorf* novas muniendi methodos publicavit cum in Munimento inexpugnabili, cui titulus: Unüberwindliche Festung (Ulmæ 1682. in 8. plag. 7. Tab. 8.), tum in scripto altero, cui titulus: Die befestigte Stütze eines Fürstenthums / oder neu erfundene *Defension* wieder das sonst Welt bezwingende Canoniren / Bombardiren und Miniren. (Norimbergæ 1687. in 8. cum aliquot figuris.).

§. 10. *Georgius Rimplerus* in libello Germanico, cui titulus: Die befestigte Festung (Francofurti 1674. in 12. plag. 16.) hactenus usitatas muniendi formas omnes rejicit, tanquam principiis spuriis nitentes, & axiomata prorsus nova substituit: quibus tamen convenientem muniendi formam ipse non delineat. Nemo autem magis in ea delineanda desudavit, quam Cl. *Sturmius* in libello, cui titulus: Entdeckung der unstreitig allerbesten Manier zu befestigen (Francof. ad Oderam 1704. in 8. plag. 12. Tabb. 9.). Alias quoque eandem operam sumsit *Daniel* Suttinger in scripto Germanico Dresdæ in fol. edito (plag. 14. & $9\frac{1}{2}$ plag. fig.).

§. 11. Scripta *Rimpleri* admodum rara annotationibus & sche-

schematismis, quæ desiderabantur, illustrata, additis nonnullis aliis, Dresdæ in 4. A. 1724. (Alph. 3. plag. 9. Tabb. 10.) recudi curavit *Ludovicus Andreas* Herlin/ qui *Sturmii* de *Rimpleri* inventis judicium parum probat.

§. 12. *Rimpleri* principia probat J. H. *Landsbergius*, Germanus, Statuum Belgii fœderati Architectus militaris primarius, & iisdem consonam muniendi formam delineat, cum tamen non ex asse ipsi satisfaciat, novam quandam aliam substituit, in libro Gallico, cui titulus: *Nouvelle maniere de fortifier les places* (Hagæ Comitum, An. 1712. in 4. plag. 11. Tabb. 8.).

§. 13. Idem laudatus *Landsbergius* una cum aliis Architectis militaribus peritis valde probat Architecturam militarem, quam *Daniel Speckle*, Architectus Argentoratensis, jam 1589. in fol. (2. Alph. 10. plag. Tabb. 36.) publici juris fecit. Hinc etiam factum est, ut praclarum in hoc genere opus Dresdæ 1705. in fol. fuerit recusum (2. Alph. 12. plag. Tabb. 24.).

§. 14. Sunt vero adhuc plures inter nostros, qui singulares muniendi formas dedere, attentione Architectorum militarium non indignas. Huc refero *Johannem Franciscum Griendel ab Aach*, qui septem muniendi formis, utut eidem fundamento superstructis, inclaruit (Norimbergæ A. 1683. in fol. plag. 14. Fig. plag. 15.), *Christophorum* Heer/ qui in Theoria & praxi Artis muniendi (Francof. 1689. in 4. plag. 16. Tabb. 30.) elegantes dedit sibique proprias constructiones; in Speculo vero Artis muniendi (Lipsiæ 1694. in 4. plag. 17. Tabb. 31.) præterea varia munimenta celebria Europæ describit, & *Christophorum* Heidenmann/ cujus Architectura militaris una prodiit Monachii A. 1664. in fol. (1. Alph. 22. pl. 27.), & fig. plag. altera ibidem 1673. in fol. (plag. 10. & Fig plag. 14).

§. 15. Nec forte e re esset *Wilhelmi Dilichii Peribologiam* (Francofurti A. 1640. in fol. 2. Alph. 2. plag. Tabb. 409. seu 9. Alph. 11. plag.) in scenam adducere, quoniam Architecturæ militaris periti multa ad praxin proficua in ea reperient. Immo si verum fateri fas est, in hoc

hoc autore occurrunt, quæ dudum posthac in Gallia tanquam nova inventa prodita fuerunt. Unde melius de eo judicium ferendum, quam tulit *Dechales* in Tractatu de illustribus Mathematicis Tomo I. Mundi Mathematici (§. 4. c. 1.). Idem quoque edidit Scholam militarem (Francof. ad Mœn. 1689. in fol. 10. Alph. 13. plag. cum ingenti numero figurarum partim æri, partim ligno incisarum), in qua omnia ad bellum tam veterum, quam nostris moribus necessaria describuntur & illustrantur.

§. 16. In eadem scena mimi vices adimplebit *Wendelinus* **Schildknecht**/ qui muniendi formam Batavam stylo histrionico describit (Stetini 1652. in fol. plag. 129. & fig. plag. 20½.)

§. 17. Eclecticam quandam muniendi formam ex *Antonii de Ville*, *Comitum de Pagan & Vauban* methodis deductam proposuit Autor Anonymus in libro, cui titulus: *Nouvelle maniere de fortifier les places, tirée des methodes du chevalier de Ville &c.* (Amstelodami 1689. in reg. 12. plag. 10. Tab. 15.), qui regulas Architecturæ militaris bene explicat, simulque ideam exhibet, quomodo diversorum Architectorum muniendi formas una ad praxin transferre liceat. *Antonii de Ville* Ars muniendi prodiit Amstelodami 1675. recusa juxta editionem Parisinam A. 1672. in 8. (1. Alph. 3. plag. cum figuris multis partim textui insertis, partim seorsim excusis). Multa hic distincte exponuntur, quæ alibi vel omittuntur, vel strictim proponuntur.

§. 18. *Matthias Dœgen* in Architectura militari moderna, quæ A. 1647. in fol. (Alph. 5. plag. 13. Tabb. 78.), Latina lingua prodiit, formam equidem muniendi Batavam nonnisi describit, quæ illo tempore usitatissima erat; multa tamen lectu digna habet iis præsertim, qui in extructione munimentorum scitu necessaria nosse desiderant. Regulas, quas tradit, exemplis veris celebrium tunc temporis per Europam munimentorum illustrat, calculos, ubi iis opus est, perspicue explicat, de figurarum irregularium fortificatione experientia confirmata tradit, modumque munimenta oppugnandi & defendendi declarat.

Singula variis historiis tam veteribus, quam novis confirmat. Partem Architecturæ militaris, quæ de locis muniendis agit, *Hercotectonice*; alteram vero, quæ de munimentis oppugnandis & defendendis tractat, *Areotectonicen* vocat. Et hujus partem oppugnatoriam *Poliorceticen*; repugnatoriam vero *Antipoliorceticen* appellat.

§. 19. *Bonajutus Lorinus*, Nobilis Florentinus, cujus de Architectura militari Libri quinque a *Davide* **Wormbser** ex Italico in Germanicum versi Francofurti ad Mœnum 1607. in fol. prodierunt, multa habet, quæ etiam in Architectura civili usui sunt, & libro quinto Mechanicam practicam tradit, variaque instrumenta & machinas varias describit.

§. 20. *Donatum Rosetti* singularem quandam muniendi methodum invenisse, quæ a ceteris prorsus dissidet, eandemque sub titulo: *Fortificazione à Rovescio* sermone patrio edidisse, supra jam meminimus (§.7.). Ejus ideo mentionem injicere lubet, quia peritis viam ad ulteriora sternit. Unde eidem multum tribuit *Alexander Christianus le Maitre* in Troja vetere & nova 1684. in 8. (Alph. 1. plag. 7. Tabb. 14.), ob principia utilia lectu dignissimus.

§. 21. Nec minus singularis ea est, quam pro inexpugnabili venditat *Jacobus de la Vergne*, Architectus militaris Cæsareus primarius, cujus *Nouvelle Fortification imprenable par force d' Armes*, lucem adspexit Viennæ Austriæ A. 1700. in 4. (plag. 17. Tab. 1.). Ostendit idem, quomodo munimenta ordinaria ad novam istam formam reduci queant. Edidit idem ibidem A. 1798. duos Tractatus alios in 4. quorum unus inscribitur. *De l' utilité d'avoir un bon Ingenieur ou Directeur general des Fortifications dans un etat &c.* alter vero: *Nouveau exercice du Gabion & de la Fascine.* Constat ille plag. 11. hic itidem plag. 11. & Tabb. 3. Quemadmodum vero illi jungit Tractatum de officiis Architectorum militarium, qui subsunt Directori generali; ita in altero quoque agit de modo oppugnandi munimenti satis perspicue.

§. 22.

§. 22. Hactenus recensitas muniendi formas omnes, sola Landsbergiana excepta, una cum aliis a nobis brevitatis studio prætermissis atque propriis breviter describit & ad examen revocat, vir in hoc studiorum genere probe versatus sæpiusque jam nobis laudatus *Sturmius* in Architectura militari hypothetica & eclectica ( Norimbergæ 1702. in 8. plag. 10. & fig. plag. 6.), ex quo adeo libro brevi temporis spatio cognoscere licet, quæ alias ex vastis voluminibus cum multo sumtuum & temporis dispendio forent conquirenda. In prima editione desideratur orthographia munimentorum. Hic vero defectus suppletur in altera, quæ multo auctior Norimbergæ 1719. in 4. ( Alph. 1. Tabb. 41.) prodiit.

§. 23. Novam quoque muniendi methodum dedit *Rozard*, Architectus militaris Electoris Bavariæ, quam in libro sub titulo: *Nouvelle Fortification Françoise* Norimbergæ in 4. reg. A. 1731. ( Alph. 1. Tabb. 42.) edito describit. In parte altera desiderio aliorum satisfacturus adjecit explicationem trium systematum Comitis *de Vauban*, qualem ex ipsis munimentis ab eodem extructis hausit, una cum omni praxi offensiva & defensiva, ubi etiam præliorum rationem habet addens ubivis observationes, quas experientia domestica suggerebat.

§. 24. Restat ut de iis Autoribus dicamus, qui in gratiam Architecturæ militaris studiosorum libros ediderunt. Commendandi hic nobis sunt *Don Sebastian Fernandez de Medrano* in Architectura militari, quæ sub titulo *Ingenieur practique* Bruxellis 1696. in 8. ( 1. Alph. Tabb. 35.) lucem adspexit; Cl. *Ozanam*, cujus Tractatus de Architectura militari ( Traité de Fortification) Parisiis 1694. in 8. reg. ( 17. plag. Tabb. 44.) prodiit; *Eques de S. Juliano* supra laudatus, cujus Architectura militaris publicata est sermone Gallico, Hagæ Comitum An. 1705. in 8. ( plag. 11. Tab. 25.). In eundem censum venit Anonymi Architectus militaris Gallicus supra laudatus (§. 5.).

§. 25.

§. 25. In vernacula nostra notissimi sunt libri sequentes: 1. *George Conrad Martii* **Europäischer** *Ingenieur* (Norimbergæ 1696. in 8. 2. Alph. 16. plag. Tabb. 60.), qui præter Architecturam militarem etiam Arithmeticam & Geometriam practicam prolixe tradit: 2. *Joh. Heinrici* **Behrs aufs neu verschantzter Turenne oder gründlich-alt u. neue Kriegs-Bau-Kunst** (Francofurti 1690. in 8. 1. Alph. 16. plag. Tabb. 32.): 3. **Johann Sebastian Grubers Friedens- u. Krieges-Schule** (Norimbergæ A. 1697. in 8. 2. Alph. 11½. plag.): 4. Ejusdem Examen Fortificatorium (Lipsiæ 1703. in 8. 1. Alph. 22. plag. Tab. 19.): 5. ejusdem **neuer und gründlicher Unterricht von der heutigen** *Fortification* **und** *Artillerie* (Norimb. 1700. in 8. 1. Alph. 17. plag. 16. Tabb.) aliique.

§. 26. Anno 1722. Bruxellis prodiere Principia Architecturæ militaris modernæ (*Les Principes de la Fortification moderne.*) Directoris Academiæ militaris cæsareæ, quæ Bruxellis est, *Hartmanni* in 8. reg. (plag. 19. Tabb. 9.). Explicat principia *Comitis de Vauban* & *Cœhornii*, ac multus inprimis est in uberius explicanda munimentorum oppugnatione & defensione, quam ab aliis factum: ut hinc addiscere liceat, quomodo munimentorum forma ad examen revocanda, ubi quidem rectum de iis judicium ferre velis.

§. 27. Inprimis autem commendari meretur Anonymi Institutio Architecturæ militaris, quam sub titulo: *Le parfait Ingenieur François* Amstelodami 1734. in 4. (Alph. 1. plag. 22. Tabb. 42.) edidit. Omnem enim artem muniendi secundum triplicem non modo methodum Comitis *de Vauban*, verum etiam *Errardi*, *Sardii*, *Equitis de Ville*, *Equitis de S. Juliano*, *Maroloisii*, *Bombelli*, *Blondelli*, Comitis *de Pagan*, *Cœhornii*, *Scheiteri*, *Sturmii* aliorumque anonymorum explicat, artem muniendi irregularem reformat, & praxin offensivam ac defensivam consummatam tradit. De *Sturmii* cogitatis parum honorifice sentit, quantuscunque sibi visus fuerit Apollo.

§. 28. Antea celebrabatur liber Gallicus, quem secunda vice multo

multo auctiorem sub titulo: *Les Travaux de Mars ou l' Art de la Guerre*, seu Artis militaris, Parisiis 1685. in 8. reg. ediderat *Allain Manesson Mallet* tribus tomis. Tomus I. constat Alph. 1. plag. 2. Tabb. 152. Tomus II. plag. 22. Tabb. 111. Tomus III. Alph. 1. plag. 3. Figuræ ipsi textui insertæ sunt & ornatus gratia multa adjiciuntur, quæ ad rem non faciunt, quemadmodum fecit in Geometria practica supra laudata (§. 30. cap. 3.). Etsi autem ab eo tempore Architectura militaris multum subierit mutationis; in primo tamen præsertim ac tertio tomo habentur, quæ non sine fructu leguntur. Editionis primæ versionem Germanicam dedit A. 1672. Amstelodami in 8. reg. excusam sub titulo: *Manesson Mallet* **Kriegs-Arbeit**/ qui puritatem linguæ Germanicæ ridicule affectabat *Philippus a Zesen*, sed ob insuetum dicendi genus nullius momenti.

§. 29. Regulas fundamentales Architecturæ militaris qui cognoscere avent, iis abunde satisfaciet *Johan. Jacobus* **Wertmüller** in Theatro regularum fundamentalium Architecturæ (*Wolfii Mathesis. Tomus V.*) militaris tam veterum, quam recentiorum, **Schauplatz der alten und neuen** *Fortifications*-**Maximen** Francof. ad Moen. 1691. in 8. 1. Alph. 20. plag. Tab. 12.) & in Lapide Lydio Architectorum militarium **Probier-Stein der** *Ingenieur* 1685. in 8. 16. plag. Tabb. 4.), tum etiam in Apologia fortificatoria, in qua Belgicam muniendi formam defendit, quamvis eam aliqua emendatione indigere fateatur (Francof. 1691. in fol. 1. Aph. 15. plag. & Fig. plag. 16.)

§. 30. Quæ in excitatione munimentorum observari merentur, docent *Johannes* **Faulhaber** in Schola Architectorum militarium (Norimbergæ 1637. in 4.) & **Heer** in Praxi Artis muniendi (§. 14.) præter alios, quos antea laudavimus. Inprimis hic commemorari meretur *Lambertus Lambion* in Praxi Architectonica [**der Bau**-*Practica*] (Viennæ 1696. in 8. plag. 16. & Fig. plag. 1½.), ubi multa singularia occurrunt præsertim de cuniculis subterraneis, nisi quod linguæ Germanicæ non satis peritus male scripserit, ut adeo libellus Germanice scriptus in

idioma Germanicum verti mereretur.

§. 31. De praxi militari tam offensiva, quam defensiva data opera scripsit *Goulon* in libello Gallico, cui titulus: *Memoires pour l' Attaque & pour la defense d'une Place* (Hagæ Comitum 1706. in 8. plag. 13. Tab. 4.) & qui eodem adhuc anno recusus Weselii in 8. reg. (plag. 5. Tab. 4.), postea in Germanicum idioma translatus (Norimb. 1709. in 8. plag. 5½. Tab. 4.).

§. 32. Etsi autem multa utilia dederit, quæ domestica experientia ipsum docuit, non tamen dedit, quæ sufficiunt. Anno autem superiori 1737. Hagæ Comitum in 4. reg. (Alph. 1. plag. 5½. Tabb. 33.) prodiit *Comitis de Vauban* de praxi offensiva & defensiva opus posthumum, sub titulo: *De l'attaque & de la defense des places*, quod observationibus ultra dimidium seculum a se continuatis superstruitur. Composuerat idem in usum Ducis Burgundiæ, cui MSC. dederat, non ea intentione, ut publici juris fieret; sed ut arcani instar asservaretur. Neque adeo facile erat MSC. istud describi, propter Tabulas majores, in quibus Shemata nitidissime delineata erant. Cum in eo candide de singulis mentem suam aperuerit; nullum superesse potest dubium, quin insigni cum fructu legatur ab iis, qui castra sequuntur, vel de praxi offensiva & defensiva judicium sibi sumunt.

§. 33. *Johannes Teyler* in Architectura militari (Rot. 1697. in 4. plag. 8. Tab. 41.) ad Architecturam militarem Algebram applicare cœpit, quoad calculum inprimis probabilium, spem feriendi planum sclopeto vel tormento ad mensuram revocaturus. Aliud vero Specimen Algebræ ad Artem Fortificatoriam applicatæ, diversum prorsus a *Teyleriano*, etiam dedit *Joh. Matthias Hasius*, nunc Mathematum Professor Wittebergensis, (Lipsiæ 1707. in 4. plag. 3½. Tab. 1.).

§. 34. Tandem hic commemorandum est opus, quod in usum Architectorum militarium conscripsit *Belidor*, Commissarius ordinarius Artilleriæ, Professor Mathematum Regius in Scholis eidem destinatis, editum Parisiis, mox vero Hagæ Comitum recusum A. 1734. in 4. reg.

reg. (Alph. 2. plag. 10. Tabb. maj. 53.) ſub titulo: *La ſcience des Ingenieurs dans la Conduite des Travaux, de Fortification & d' Architecture civile.* In eo Autor, qui omni ſtudio id agit, ut ad ſolidam ſcientiam Architectos militares perducat, eoque fine in eorum gratiam Curſum mathematicum jam ante edidit, recuſum Pariſiis An. 1725. in 4. reg. cum 24. Tabulis figuras nitidiſſime æri inciſas exhibentibus, in quo ea inprimis docentur, quæ iisdem ſcitu neceſſaria ſunt ad finem iſtum conſequendum, non modo ea tradit, quæ ex Architectura militari, verum etiam quæ ex civili iisdem perſpecta eſſe debent. Traditur hic theoria multorum, quæ hactenus in utraque Architectura nudæ experientiæ fuere ſuperſtructa. Videre hoc eſt ex libro primo atque ſecundo, quorum iſto quæ ad muros, hoc autem quæ ad fornices pertinent, ex principiis geometricis & mechanicis demonſtrat, uſus hinc inde demonſtrationibus algebraicis. Uſui eſſe poteſt hoc opus iis, qui ad formam ſcientiæ vere mathematicæ utramque Architecturam reducere voluerint ea demonſtraturi, quæ hactenus experientiæ fide ſumuntur nondum ſatis limata. Opus hoc etiam in cenſum ſcriptorum de Architectura civili referendum, inter quæ eminet, quatenus viam ad ulteriora ſternit.

§. 35. Non ſilentio prætereundus eſt libellus Germanicus, quem *Johannes Chriſtophorus Glaſerus* Halæ Saxonum A. 1728. in 4. (Alph. 1. plag. 2. Tabb. 6.) ſub titulo: **Vernünfftige Gedancken von der Kriegs-Bau-Kunſt erſte Probe** edidit, in quo oſtendit in omnibus muniendi formis, quæ hactenus proſtant, deficere defenſionem foſſæ ſufficientem, novamque proponit, qua huic defectui ſuccurritur. Addit adhuc aliam per Algebram erutam. Plura dare conſtituerat ſpecimina Architecturæ militaris perficiendæ: ſed neſcio qui factum, ut a propoſito ſuo deſtiterit.

§. 36. Artem militarem univerſam deſcribit *Georgius Andreas* **Böckler** in Schola militari moderna: **Neu vermehrte Kriegs-Schule**, quæ Francofurti ad Mœnum A. 1635. in 8. (Alph. 2. pl. 8. cum figuris, multis æri inciſis) prodiit. Tradit autor ea

ea omnia, quæ in bello uſui eſſe poſſunt, ita ut etiam jus militare Cæſareum, Suecicum & Batavum libro ſuo inſeruerit, & ſub finem in Appendice varia arcana doceat, quæ militibus ſcitu neceſſaria.

§. 37. Huc etiam pertinet *Joannis Friderici a Flemming*, Regis Poloniarum & Electoris Saxoniæ Tribuni militum pedeſtrium, Miles Germanus perfectus, **der vollkommene Deutſche Soldat**, qui Lipſiæ 1726. in fol. (Alph. 9. plag. 8. Tabb. 64.) prodiit, in quo autor omnem ſcientiam militarem, inprimis quæ ad militem pedeſtrem ſpectant, dilucide exponit. In eundem quoque cenſum referri poteſt liber Gallice conſcriptus, quem ſub titulo: *Les Fonctions du Capitaine de Cavalerie & les principales de ſes Officiers ſubalternes* multo auctiorem Pariſiis edidit *de Birac*, recuſum Hagæ An. 1693. in 8. (Alph. 1. plag. 2. Tabb. 14.). Optandum vero foret, ut quis rei militaris peritus, in Matheſi verſatus & methodi gnarus artem militarem in eam formam redigeret, qua nos Pyrotechniam, Architecturam militarem & civilem repræſentavimus, iis ſimul perluſtratis, quæ Autores modo laudati tradiderunt, & ex Autoribus ſuperioribus aliisque peti poſſunt.

## *FINIS*

Commentationis de præcipuis ſcriptis mathematicis.

Com-

# COMMENTATIO
# DE
# STUDIO MATHEMATICO
# RECTE
# INSTITUENDO,

# PRÆFATIO.

QUi Matheſi addiſcendæ operam navant, non eundem ſibi ſcopum præfigunt. Elementa noſtra Matheſeos univerſæ ita conſcripſimus, ut pro multiplici diſcentium ſcopo ſatisfaciant omnibus. Quoniam vero non omnes eadem induſtria eidem incumbere tenentur, nec omnia addiſcenda omnibus; igitur nobis propoſitum eſt docere, quid unicuique conveniat. Multum omnino intereſt, ut ſtudium Matheſeos rite tractetur, ſiquidem ſine moleſtia ac tem-

poris dispendio feliciter progredi volueris. Quamobrem nostrum esse duximus, monstrare viam, qua sit eundum, ne ad devia declinemus: id quod facillime accidit. Eam igitur, quam in nos suscepimus, de studio mathematico rite instituendo tractationem utilitate sua non destitutum iri confidimus. Quamobrem suademus, ut omni attentione eandem legat & relegat, qui Matheseos addiscendæ animo ad Elementa nostra legenda accedit. Quodsi quis studiose observet, quæ præcipimus, eum participem futurum fructus, quem eidem pollicemur, nulli dubitamus. Insignem vero percipiet voluptatem, ubi senserit voto respondere eventum: quem ubi prævidet, eo ipso accendetur ardor majore industria Matheseos studium continuandi, quam qua idem inchoavit. Nostrum inprimis est amplificare Matheseos studium, nunquam satis commendandum, nunquam pro dignitate deprædicandum. Nihil igitur omittendum, quod huc quomodocunque facit. Alienam felicitatem qui nostram existimamus, id unice intendimus, ut dicamus, ut scribamus, quæ prosunt aliis. Quamobrem nec quicquam magis in votis habemus, quam ut omnes, qui ad Mathesin addiscendam animum appellunt, participes fiant ejus fructus, qui ex studio mathematico percipi potest.

COM-

# COMMENTATIO
## DE
# STUDIO MATHESEOS
## RECTE INSTITUENDO.

## CAPUT. I.
## DE
# Diverſis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur.

§. 1.

TRes dantur gradus cognitionis humanæ in omni veritatis genere, quos recto facultatum cognoſcendi uſu acquirere licet. Aut enim in eo acquieſcimus, quod veritatem ab aliis propoſitam intelligamus, aut ulterius progreſſi id agimus, ut ejusdem etiam convincamur, aut denique operam damus, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio Marte eruere valeamus.

§. 2. Primus gradus acquiſitu omnium facillimus & a ceteris præſupponitur: neque enim veritatis niſi intellectæ convincitur animus, ſive eum a priori, ſive a poſteriori convincere volueris, multo minus autem ex iis, quæ cognoviſti, alia incognita deducere potueris, niſi ea, quæ cognoviſti, ſatis intellexeris. Gradus ſecundus difficilius comparatur primo, cum multo ampliorem requirat facultatum uſum, nec ad tertium adſpirandum, niſi ubi ad ſecundum aſcenderis. Tertium denique omnium difficillime conſequi licet, cum ampliſſimum omnium exigat facultatum uſum. Qui in Logica & Pſycho-

logia satis fuerint versati veritatem dictorum abunde perspicient: ceteris satisfaciet experientia domestica, ubi diversis hisce gradibus acquirendis non sine successu operam dederint. Elucescet quoque quodammodo veritas ex iis, quæ mox de illis uberius dicentur.

§. 3. Cognitionem gradus primi acquisiturus, definitiones, theoremata & problematum resolutiones sibi perspecta reddere tenetur, omissis demonstrationibus. Cognitionis secundi gradus compos futurus addere debet demonstrationes. Ad cognitionnm tandem tertii gradus perventurus, in rem præsentem veniat necesse est, & ex iis, quæ ipsi cognita & perspecta sunt, acquisito cum secundo gradu facultatum usu eruere studeat opus est sibi nondum nota: quod quomodo fiat, postac inindgitabimus, quantum præsentis instituti ratio permittit. Neque enim nobis jam propositum est explicare Artem inveniendi, quæ legitimum facultatum usum in eliciendis incognitis ex cognitis distincte docet.

§. 4. Theoremata & problemata eorumque resolutiones non intelliguntur nisi per definitiones terminorum, qui in iisdem occurrunt. In cipiendum igitur est a definitionibus, quæ ideo propositionibus præmittuntur, vel omnes simul, quemadmodum in Arithmetica & Geometria fecimus; vel eo saltem loco, ubi occurrunt propositiones, quæ per eas intelligendæ, quemadmodum in reliquis Matheseos partibus non sine ratione factum esse apparet.

§. 5. Ad definitiones intelligendas afferenda est attentio, sub initium præsertim molesta, adeoque omni modo excitanda & fovenda. Conducit huc, si definitiones exemplis, veluti in Arithmetica numeris illustrentur, & in Geometria ad figuram oculis præsentem applicentur. Ita enim facilius intelliguntur, ut molestia vanescat, quæ attentionis conservandæ difficultatem parit. Ita definitio similitudinis illustratur exemplis duorum horologiorum, & duorum ædificiorum, quæ in scholio definitioni adjecto in medium attulimus (§. 27. *Arith.*). Definitionem partis aliquotæ illustramus exemplo lineæ in quatuor partes æquales divisæ, cum enim

eam pars una quater ſumta lineam integram adæquet, erit ea pars aliquota (§. 30. *Arithm.*). Ita in ipſa Arithmetica definitionem numeri quadrati & radicis quadratæ numeris adjectis illuſtravimus, ut tali exemplo non ſit opus. Cum definitiones in Geometria retulerimus ad figuras; me tacente apparet, quomodo ad eas applicari poſſint, veluti dicendo in definitione trianguli æquilateri (§. 88. *Geom.*), quod ſit AB=BC=CA (*Tab. I. Fig.* 16), perinde ac ſi ratiocinio oſtendi deberet, figuram, quæ oculis ſubjicitur, eſſe triangulum æquicrurum. Senſus nimirum aut imaginatio, quæ ſenſu antea percepta denuo præſentia ſiſtit, attentionem in objectum trahit, cujus idea exhibet, quæ in definitione continentur: quo ipſo & attentio excitatur & conſervatur, cumque definitionem a nobis intelligi nobis jam conſcii ſimus, moleſtia evaneſcit, quam termini non ſatis intellecti primum nobis objiciebat, immo in voluptatem abit, quæ ardorem dicendi accendit & inflammat, prout caſus tulerit.

§. 6. Definitiones eo ordine collocantur, ut termini in anterioribus jam fuerint definiti, qui datam ingrediuntur. Ex. gr. Commenſurabilia definiuntur, quod partem aliquotam communem habent, vel eorum unum ſit pars aliquota alterius (§. 31. *Arithm.*). Pars vero aliquota jam fuit definita (§. 30. *Arith.*), immo pars in genere (§. 9. *Arith.*). Similiter Quadratum definitur per figuram quadrilateram, æquilateram, rectangulam (§. 98. *Geom.*). Sed figura jam ante (§. 34. *Geom.*), figura quadrilatera (§. 97. *Geom.*), figura æquilatera (§. 88. *Geom.*), figura rectangula (§. 97. *Geom.*) fuit definita. Unde conſequitur, definitiones legendas eſſe eo ordine, quo in ſingulis diſciplinis numerantur, & definitiones terminorum eſſe repetendas, qui datam ingrediuntur. Ita nimirum obtinetur, ut quælibet earum penitus intelligatur, & animo ingenerentur notiones adæquatæ, in quibus nihil latet obſcuri, ut intellectus plena luce perfruatur. E. gr. ubi definitionem commenſurabilium expendere volueris, illuſtranda primum eſt exemplis (§. 5.), utrumque ejus caſum re-

repræſentando in numeris atque lineis. Ad exempla tam arithmetica, quam geometrica applicanda eſt definitio, ita ut primum contentus ſis notionibus confuſis, quas conſpectus numerorum & figurarum ſuggerit. Deinde applicandæ ad eadem exempla ſunt definitiones partis & partis aliquotæ, ita enim futurum, ut definitionem commenſurabilium in utroque quantitatum genere penitus intelligas, nec quicquam relinquatur obſcuri, ubi eadem iuduſtria in definitionibus anterioribus fueris verſatus. Sint Ex. gr. duo numeri 3 & 12. Quoniam 3. ſive ternarius quater ſumtus numerum 12 ſive duodenarium adæquat, erit ille hujus pars aliquota (§. 30. *Arithm.*); adeoque numerus unus eſt pars aliquota alterius. Numeri igitur hi 3 & 12 commenſurabiles ſunt. Et quoniam 3, 3, 3 & 3 ſimul conficiunt unum numerum, nempe 12 ſive duodenarium, adeoque idem ſunt cum duodenario, 12 eſt totum, 3, 3, 3 & 3 ſunt ejus partes, conſequenter 3 pars una (§. 9. *Arith.*). Similiter ſint duo numeri alii 6 & 8, quorum primus componitur ex 2, 2, & 2, ſeu binario ter ſumto, alter ex 2, 2, 2 & 2 ſeu binario quater ſumto. Habent igitur partem aliquotam communem 2 (§. 30 *Arithm.*), adeoque commenſurabiles ſunt. Et quia 2, 2 & 2 ſimul ſumti idem ſunt cum 6, & 2, 2, 2 & 2 ſimul ſumti idem cum 8; in genere etiam patet, eſſe 2 ſive binarium partem ipſorum 6 & 8 (§. 9. *Arithm.*), adeoque communem. Idem etiam in lineis repræſentatur, ſi linea AB quater transferatur in CD, ita ut ſit CE=EF=FD=AB. Erit enim AB pars aliquota ipſius CD (§. 30 *Arithm.*). Unde lineæ AB & CD commenſurabiles ſunt, & CE=AB intelligitur pars ipſius CD (§. 9. *Arithm.*). Tab. I. Fig. 1.

Eodem modo patet caſus alter, ſi recta AB concipitur diviſa in tres partes æquales, ut ſit AC=CD=DB, & EF in quatuor partes æquales EG, GH, HI & IF, ut ſit EG=GH=HI=IF ac præterea EG=AC. Tab. I. Fig. 2. Erit enim AC pars aliquota communis (§. 30 *Arithm.*), & eadem AC pars utriusque lineæ AB & EF intelligitur, quia AC+CD+DB & recta AB, itemque EG+GH+HI+IF & recta

rectaEF sunt una eademque linea (§. 9. *Arithm.*). Unde lineas AB & EF commensurabiles esse liquet.

§. 7. Ne evidentiæ quid desit, probe observandum est, intellectum lucem fœnerari debere a sensu, quatenus huic obvia sunt, quæ ille concipere debet ut, dum sensus suo munere fungitur, intellectus suo veluti sponte fungatur itidem suo, atque ad cooperandum leniter trahatur, quatenus fieri nequit, ut operationes intellectus cessent, dum sensus facit quod suum est, & attentione in hunc conversa illarum ne quidem conscius esse videaris, operationibus intellectum cum sensuum actionibus perceptione confusa in unum confusis. Eo ipso obtinetur, ut ad rectum intellectus seu facultatis cognoscendi superioris usum adducaris, dum sensu tantummodo, concurrentibus ceteris sua veluti sponte facultatibus cognoscendi inferioribus, imaginatione scilicet atque memoria, tibi uti videris: id quod mirifice conducit tyronibus, ut usui intellectus recto absque ulla molestia adsuefiant. Tyrones enim non adsueti sunt nisi sensuum, imaginationis atque memoriæ usui, quatenus is hasce indivulsas comites habet. Eum vero, qui requiritur, intellectus usum hactenus non fecerunt. Quamobrem molestum accidit, si a sensu ad operationes intellectus per saltum adducantur.

§. 8. Quamvis adeo levia ac puerilia videantur, quæ de definitionibus rite expendendis inculcavimus (§. 6), ut eædem penitus intelligantur & notiones adæquatæ ab omni obscuritate liberatæ animo insinuentur; principiorum tamen psychologicorum gnarus, quæ in Psychologia præsertim empirica explicavimus ex indubia experientia derivata, profunditatem in obviis non sine voluptate deprehendet. Et ubi attenta mente perlegerit, quæ de usu facultatum in parte altera Philosophiæ practicæ universalis ad recte vivendum requisito demonstravimus, fructum inde sperandum facile prævidebit: qui quod quantivis pretii sit, in dubium minime revocabit. Qui vero Logicam nostram perlustravit & inprimis sibi cognitum atque perspectum reddidit, quod de

praxi ejus docetur; is abunde intelliget quam necessarius sit hic intellectus usus, de quo in præsenti nobis sermo est. Quodsi ergo in Philosophia veriori hospites contemnant, quæ nos maximi facimus, & ambages inutiles pronuncient, per quas incedere volumus animum ad Mathemata discenda appellentes; ii haud ægre ferant contradictionem, cum nos æquo animo, non indignabundo feramus contemtum.

§. 9. Quamobrem non piget exemplo etiam geometrico docere, quomodo in perpendendis definitionibus sit procedendum. Sumamus v. gr. definitionem rhombi, quem difinimus (§. 99. *Geom.*), quod sit figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Ut cum idea rhombi notio distincta animo insinuetur, nec quicquam in ea relinquatur obscuri; oculos convertamus necesse est in figuram L M N O. Numerentur latera L M, M N, N O & L O, quæ numero quatuor deprehenduntur, unde liquet figuram hanc esse quadrilateram (§. 97. *Geom.*). Circino capiatur intervallum LM, idemque successive transferatur ex M in N, ex N in O atque ex O in L. quo ipso patet, latera omnia esse inter se æqualia, atque hinc colligitur, figuram hanc esse æquilateram (§ 88. *Geom.*). Contemplemur jam angulos L, M, N & O, quos obliquos esse patet (§. 66. *Geom.*): unde infertur, figuram eandem esse obliquangulam (97 *Geom.*). Sola attentio ad ea, quæ oculis usurpamus, omnem ex idea rhombi arcet obscuritatem, nec quicquam in notione distincta relinquit obscuri, quo minus penitus intelligatur. Quodsi definitiones anteriores, in quas definitio rhombi resolvitur, rite applices; iis suppositis familiaribus notio evadit adæquata.

Tab. I. Fig. 3.

§. 10. Non ignoro in figuris non requiri veritatem, sed sufficere ea sumi, quæ per definitionem inesse debent, ut definitio intelligatur. Neque enim demonstrandum esse, quod in nostro exemplo figura LMNO sit rhombus; sed docendum potius, qualis esse debeat, ut rhombus dici possit, ubi non intenditur, nisi ut definitio intelligatur. Ita in casu nostro sufficit dicere, si figura esse debeat rhombus, requiri ut latera LM, MN, NO & LO, qui-

bus terminatur, ſint numero quatuor, ut ſit LM=MN=NO=LO, ſeu ut latera hæc ſingula ſint inter ſe æqualia, ut denique anguli L, M, N & O ſint obliqui. Hoc pacto enim conſtat, quænam figuræ cuidam datæ ineſſe debeant, ut rhombi nomen eidem tribui poſſit: id quod ſufficit ad definitionem intelligendam. Et ubi hæc noveris atque memoriæ mandaveris, verendum non eſt, ne rhombum appelles figuram tibi obviam, quæ hoc nomen non meretur: quo ſane fine definitio præmittitur. Immo patet, quænam de rhombo ſumenda ſint, aut ſumere liceat, ubi alia de eodem demonſtranda, quando ex definitione rhombi deducere volueris, quæ eidem conveniunt: quem alterum eſſe definitionum finem, non minus ex Logica, quam Geometrarum & recta methodo philoſophantium praxi conſtat. Ipſa etiam definitionum nominalium natura aliud non requirere videtur, quam ut intelligatur, quænam in ea ſumantur de definito, cum nondum quæratur, utrum definitio ſit poſſibilis, nec ne, ſeu utrum detur iſtiusmodi ens, cui ea inſint, quæ in definitione ſumuntur; ſed de eo tantum quæſtio ſit, qualia requiramus, ut inſint, ſiquidem id nominis convenire debeat, ſeu quidnam hoc nomine inſignire velimus. Enimvero cum in Matheſi non proponantur definitiones, niſi quæ veræ ſunt; ubi ſenſuum ope operationes intellectus elicere & eorundem beneficio eidem lucem affundere atque ad rectam definitionum applicationem tyronem manuducere volueris, nil obſtat, quo minus tacite ſupponas, quod deinceps demonſtrandum, definitionibus ineſſe veritatem, hoc eſt, dari iſtiusmodi entia, quibus inſunt, quæ in definitione nominali ſumuntur. Abſit itaque, ut tibi perſuadeas, nos eorum, quæ in Logica docemus & in philoſophando, non tantummodo in univerſa Matheſi ſancte obſervamus, oblitos tradere, quæ iisdem contraria ſunt. Ecquis vero adeo veſanus erit, qui reprehendat, quod utilitatis inſignis gratia absque ullo præjudicio veritatis tacite ſumatur, quod verum eſt, immo quod ſumi neceſſe eſt, ubi in primo gradu cognitionis humanæ pedem ſiſtere

ſtere, nec ulterius progredi volueris (§. 1.).

§. 11. Etſi itaque præcepta verioris Logicæ, quæ nos tradidiſſe certi ſumus, inviolabilia exſtimemus, & methodi adeo ſimus tenaces, ut ab iis recedere nefas reputemus; tanta tamen religio minime obſtat, quo minus in favorem ejus faciamus, quod eidem promovendæ conducit. Quamobrem ut finem tam præclarum ex aſſe conſequamur, quem intendimus (§. 7.) & ſenſus omnes ferant ſuppetias intellectui, quæ ab eodem expectari poſſunt; id adhuc monendum eſſe duximus, in exemplis Arithmeticis non arbitrarium eſſe, quocunque modo numeri ſcribantur, quibus definitionem illuſtrare volueris, ſed eos potius ita ſcribendos eſſe, ut ſenſui ſubjiciantur, quæ intellectus concipere tenetur, ut omnis arceatur obſcuritas & notio evadat tam adæquata, quantum per anteriores definitiones permittitur. Dedimus in ſuperioribus exempla, quibus definitionem commenſurabilium illuſtravimus (§. 6.). Duo ſunt commenſurabilium caſus. Aut enim numerus minor eſt pars aliquota majoris, aut uterque numerus partem aliquotam communem habet (§. 31. *Arith.*). Exemplum caſus primi præbent numeri 3 & 12, quorum prior quater ſumtus poſteriori fit æqualis. Repreſentandus igitur eſt ternarius tanquam pars duodenarii definitioni partis convenienter (§. 9. *Arithm.*) & tanquam pars aliquota ejusdem definitioni partis aliquotæ conformiter (§. 30. *Arithm.*). Quamobrem non ſufficit, duodenarium ſive 12 reſolvere in 3, 3, 3, & 3, ſed ipſis etiam oculis quaſi ſpectandum exhiberi debet, quod ternarius ſit pars duodenarii & hic conſideretur tanquam pars aliquota ejusdem, quatenus ea oculis uſurpare licet, quæ definitiones partis atque partis aliquotæ tamquam notas continent. Exhibetur autem 3 tanquam pars ternarii, ſi ſcribatur 3 + 3 + 3 + 3 12: etenim ſignum + oſtendit quatuor iſtos ternarios ſimul ſumtos conſtituere duodenarium, ſeu numerum, qui idem eſt cum duodenario. Unde unus intelligitur pars duodenarii (§. 9. *Arithm.*). Et dum apparet, eundem numerum 3 aliquoties, nimi-

nimirum quater repetitum, numerum 12 adæquare, illum hujus partem aliquotam esse perspicitur (§. 30 *Arithm.*). Nimirum hoc modo ipsis oculis exhibetur, quod plura, scilicet 3, 3, 3 & 3 sint idem cum uno, scilicet 12, & pars una 3 aliquoties, scilicet hic quater sumta, adæquet totum, quemadmodum voluut definitiones partis atque totius & partis aliquotæ. Sola igitur hac scriptione in conspectum adducuntur, quæ in oculos per se minime incurrunt & definitiones partis atque totius & partis aliquotæ instar rei visibilis exhibentur. Dum vero ternarius sive 3 etiam solitarie scribitur, juxta duodenarium in partes suas aliquotas resolutum, quemadmodum hic factum esse apparet

3 $\quad 3+3+3+3=12$,

tum ipsis oculis exhibentur 3 & 12 tanquam duo numeri, qui ad se invicem referuntur, & primus 3 repræsentatur tanquam pars aliquota alterius 12, ut nihil insit in definitione commensurabilium quoad casum primum, quod non pateat conspectui. Immo hac ipsa scriptione non minus manifestum est, quomodo dato quocunque numero prodeat alius ipsi commensurabilis, nimirum si numerus quidam semel positus, deinceps ponatur aliquoties, quoties nempe visum fuerit, & iterato positi sumantur simul tanquam unum: id quod clarius perspicitur, si duo vel tria exempla sibi invicem subscribantur, quamadmodum hic factum vides.

3 $\quad 3+3=6$
3 $\quad 3+3+3=9$
3 $\quad 3+3+3+3=12$
&c. $\quad$ &c. in infinitum.

Ad illustrandum casum alterum, qui in definitione commensurabilium continetur, adduximus exemplum numerorum 6 & 8, qui partem aliquotam communem 2 habent. Quodsi ergo singula ut ante repræsentare volueris, numeri ita scribendi sunt

$2+2+2=6 \quad 2+2+2+2=8$
$2+2+2+2+2=10 \quad 2+2+2+2+2+2+2=14$
&c. $\quad$ &c.
in infinitum $\quad$ in infinitum

Ita nimirum etiam conspicitur, quomodo numeri commensurabiles in altero casu procreentur, nimi-

nimirum ſi idem quicunque numerus, veluti hic 2, ponitur toties, quoties libuerit, veluti hic ter, quinquies &c. & deinceps adhuc pluries, veluti hic quater, ſepties &c. ac iterato poſiti ſumantur ſimul tanquam unum. Hoc pacto definitio commenſurabilium nominalis reducitur ad geneticam, adeoque realem: id quod multiplicem habet uſum. Quodſi numeris ſubjiciantur lineæ in tot partes æquales diviſæ, quoties idem numerus repetitur ad conſtituendum numerum eundem, in continuo jam magis claret, quænam ſit vis ſigni +, quo indigitatur plura coaleſcere in unum, ut unum ſit idem cum multis, quemadmodum vult definitio partium atque totius (§. 9. *Arithm.*).

§. 12. Quoniam in definitionibus partis atque totius relativis, quarum una absque altera intelligi nequit, diverſa utique ſunt pluralitas eorum, quæ ad totum conſtituendum concurrunt, plurium concretio, qua fit unum, ſeu totum conſtituitur, & inde reſultans identitas plurium cum uno, adeoque ubi definitionem penitus intelligere volueris, notionem diſtinctam formaturus opus habes totidem actibus intellectus, quibus pars & totum concipitur, quot definitioni diverſa inſunt tanquam totidem notæ. Siquidem ſenſus ſuppetias ferre debet intellectui, ſingulis intellectus operationibus reſpondere debent ſinguli actus externi, qui in ſenſus incurrunt & illas individuas comites habent: id quod in dato caſu obtinetur, ſi numeri, quibus ſimul ſumtis efficitur totum, primum ſcribantur juxta ſe invicem absque ullo ſigno interpoſito, deinde autem ſignum + interponatur, tandemque iisdem hoc ſigno inter ſe connexis adjiciatur ſignum æqualitatis = cum nota numerica, qua indigitatur numerus ex iisdem coaleſcens, veluti in exemplo primo 12, qui ex 3, 3, 3 & 3 in unum coaleſcentibus reſultat. Hac enim ſucceſſiva ſcriptione eo, quem diximus, ordine facta actu ſcriptionis primo determinatur intellectus ad concipiendam pluralitatem ad totum conſtituendum concurrentium, actu ſecundo exhibetur concretio in unum, quam cogi-

cogitare tenemur, & tertio denique repræſentatur plurium cum uno identitas, in quam aciem mentis intendi neceſſe eſt. Hoc pacto efficitur, ut nihil ſit in intellectu, quod non etiam ſit in ſenſu, & ſenſus intellectum blande trahit ad cooperandum, dum operationes intellectus per actus in ſenſum incurrentes determinantur, adeoque cum actibus ſenſus una ponuntur, modo animo præſens ſis attentione allata ad ſingula, quæ fiunt. Quodſi ergo in illuſtrandis definitionibus eam, quam monſtramus, viam ingredi volueris; ſenſus ſuppetias omnes ferent intellectui, quas ab eo expectare licet.

§. 13. Simile quid obtinet in exemplis geometricis, ſi ſingulas determinationes, quæ definitionem ingrediuntur, ita ſcribere volueris, ut ad figuram oculis ſubjectam referantur ſigna, quibus repræſentatur. Dedimus in ſuperioribus exemplum rhombi, qui per definitionem eſt figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula. Quamobrem ſi ſcribas, quemadmodum hic factum eſſe vides,

$$LM+MN+NO+LO=4$$ Tab. I. Fig. 3.

$$LM=MN=NO=LO$$

L
M
N } angulus obliquus
O

---

LMNO rhombus;

ipſi ſenſui obvium eſt, quomodo ex determinationibus definitionem ingredientibus, ſeu notis in eadem contentis colligatur, figuram datam eſſe rhombum. Etenim $LM+MN+NO+LO=4$ indigitat, figuram datam LMNO quatuor habere latera, adeoque æquilateram eſſe; $LM=MN=NO=LO$ ſignificat, latera omnia eſſe inter ſe æqualia, conſequenter figuram datam LMNO eſſe æquilateram: denique

L
M
N } angulus obliquus
O

indigitat ſingulos figuræ datæ LMNO angulos eſſe obliquos, conſequenter figuram ipſam obliquangulam. Linea his ſubducta ſignum eſt, quo indigitatur, id quod eidem ſubſcribitur, inde inferri, ſeu per ſupra ſcripta de-

terminari, nimirum quod figura oculis ſubjecta LM NO ſit rhombus. Evidens adeo eſt, ad quænam ſucceſſive promovenda ſit attentio, ubi rhombum agnoſcere atque ab aliis figuris diſtinguere volueris. Hoc pacto ſenſus diſtinguit, quæ intellectus diſtinguere tenetur, dum diſtincte rhombum concipit.

§. 14. Repræſentatio definitionum ſymbolica, qua oculis conſpicienda exhibentur, quæ ab intellectu concipiuntur, eo quidem ordine, quo operationes intellectus eliciuntur, convenit regulis artis characteriſticæ, cujus theoria hactenus deſiderata partem quandam artis inveniendi abſolvit, propterea quod in inveniendo uſum multiplicem habet, quemadmodum ſuo tempore oſtendemus, ubi philoſophia ad umbilicum perducta artem inveniendi ad eam formam redigemus, qua Logicam exhibuimus. Major enim eſt artis characteriſticæ uſus, quam vulgo creditur, ut adeo conſultum ſit, quaſi aliud agendo mature eidem adſueſcere. Non loquimur niſi experta, & quæ ex ipſa animæ humanæ natura a priori demonſtrare valemus, etſi a præſenti loco alienum ſit ipſas demonſtrationes afferri ex principiis noſtris pſychologicis haud difficulter contexendas, ſed arti inveniendi reſervandas.

§. 15. Unicum eſt, quod hic monuiſſe ſufficiat, ſilentio minime pretereundem, ſcilicet quod iſta definitionum ſymbolica repræſentatio mirifice conducat ad facilitandam repetitionem, qua eædem memoriæ absque ulla moleſtia & mora infiguntur & memoria retinentur. Diſtincte nimirum oculis exhibentur, quæ intellectus diſtinguere tenetur in definito ſibi repræſentando, & eo ordine, quo actus intellectus ſeſe invicem excipere debent. Cognitio non modo ſymbolica ad intuitivam reducitur, ſed ipſa etiam ſymbolica intuitivæ aſſimilatur. Nemo autem eſt qui neſciat, ſenſu percepta facilius & tenacius memoria retineri, quam quæ ſola vi intellectus concipiuntur. Et convenit omnino omnem facere facultatum uſum, qui natura nobis conceſſus eſt, ac mature adſuefieri juvat, ut eundem ubivis conſtanter faciamus. Quamobrem & nos per ſtudium mathe-

mathematicum plura intendimus, quam ut Mathesis sibi sola discatur, quemadmodum faciunt illi, qui contenti sunt ea, quæ docentur in Mathesi, cognita atque perspecta sibi habere.

§. 16. Erit forsan acutior, qui reprehendet, quod in illustrandis definitionibus in methodi leges injurii simus, quod in illustrandis definitionibus anterioribus præsupponamus, quæ demum per sequentes patent. Objiciet v. gr. nos in symbolica partis aliquotæ repræsentatione, veluti quod 3+3+3+3=12, supponere, quod perspectæ sint notæ numericæ, quod notum sit signum additionis, quod ipsam additionis notionem habeamus, cum tamen definitio partis aliquotæ præcedat (§. 30. *Arithm.*), definitio additionis demum sequatur (§.61. *Arith.*) & notæ numericæ in sequentibus demum (§. 49. *Arithm.*) cum signo additionis (§.63. *Arithm.*) explicentur. Immo forsan arguet ipsam additionem præsupponi, quæ demum docetur multo post (§. 96. *Arith.*). Enimvero quicquid est hujus difficultatis, id protinus omne evanescit, modo attentionem nostram desiderari non patiamur. Etenim nemo ad studium Matheseos, præsertim ad legenda Arithmeticæ nostra Elementa Latina, accedit adeo rudis, ut notæ numericæ nondum ipsi sint perspectæ, & numerare nesciat. Neque lex numerandi & notæ numericæ explicantur eo fine, ut numerare discamus & notas numericas cognoscamus; sed ut appareat, cur ea numerandi lex sanciatur & cur notis istis utamur, tum etiam quia hypothesibus istis opus habemus tanquam principiis ad demonstrandum ea, quæ sequuntur. Signum additionis quodnam sit, anticipando doceri potest, ubi ejus usus requiritur. Neque hic opus est, ut notio additionis una explicetur: sufficit enim moneri, hoc signo indigitari, numeros simul sumi debere, ut constituatur per eos unus. Multo minus autem præsupponenda est additio, cum nemo numerandi peritus nesciat, quomodo numeros exiguos sive digitos in unitates, siquidem opus est, resolutos connumerare debeat. Accedit, quod nemo facile ad Matheseos studium,

dium, præſertim ad Elementa noſtra Latina legenda ſeſe conferat, qui Algorithmum numerorum integrorum, ſaltem additionem & ſubtractionem, non didicerit. Abunde igitur patet, non præſupponi quæ nondum cognita ſunt, ſed ex inferius traditis demum haurienda, in definitionibus illuſtrandis.

§. 17. Propoſitiones, ſive theoremata fuerint, ſive problemata, primum exponuntur, dum in Arithmetica ad numeros, in Geometria ad figuras delineatas applicantur: id quod ἔκθεσιν, ſive expoſitionem appellarunt veteres, quam propoſitionibus ſubjecerunt. Sit ex. gr. Theorema 21 Arithmeticæ (§. 181.) exponendum, quod ita ſeſe habet. Si quantitates quaſcunque per eandem tertiam dividas; quoti ſunt inter ſe ut quantitates, quæ dividuntur. Theorematis hujus expoſitio hæc eſt: ſint duo numeri 24 & qui dividuntur per eundem tertium 3; erunt quoti 8 & 4. Dico eſſe 8 ad 4 ut 24. ad 12, Continet enim 8 bis 4, & 24 itidem bis 12, adeoque numeri proportionales ſunt (§. 155. *Arithm.*). Similiter ſit pars prima theorematis 37 in Geometria (§. 233) exponenda, quæ ita ſe habet: Si duas lineas parallelas ſecet transverſa, erunt anguli alterni æquales.
Expoſitio talis eſt: ſint AB & Tab.
CD duæ lineæ rectæ, ſitque AB I.
parallela ipſi CD; erunt angu- Fig.
li *y* & *u* alterni (§. 68. *Geom.*). 4.
Dico angulum *y* eſſe æqualem angulo *u*. Eodem modo exponuntur problemata. Sit ex. gr. problema 20 Geometriæ (§. 258) cujus hic eſt tenor: Per datum punctum parallelam rectæ datæ
ducere. Expoſitio hæc erit: ſit Tab.
data linea recta RS, ſitque da- I.
tum punctum V ubicunque ex- Fig.
tra eandem lineam. Ducenda 5.
eſt recta quædam alia, quæ tranſit per punctum V, ſitque rectæ alteri RS parallela.

§. 18. Nos brevitatis gratia in Arithmetica theoremata ita enunciavimus, ut expoſitionem una contineant, dum quantitates deſignavimus literis majoribus, tanquam numeros indeterminatos (§. 13. *Arithm.*), in quorum locum facile ſurrogantur numeri determinati notis numericis expreſſi, quales etiam hinc inde exhibemus ad latus demonſtrationis. Ita theorema

21, de quo modo diximus (§. 17.), hoc modo proponitur (§. 181. *Arithm*). Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas, quoti F & G sunt inter se ut A & B. Constat ex paragrapho præcedente theorema hoc pure sic enunciari: si duas quantitates quascunque per eandem tertiam dividas, quoti per divisionem prodeuntes erunt inter se, ut quantitates, quæ dividuntur. Atque adeo liquet, literas majores A, B, C, F, G nonnisi expositionis gratia esse adjectas, quæ ita sese habet: Sint duæ quantitates quæcunque A & B, dividatur quantitas A per quantitatem C, & prodeat quotus F. Dividatur etiam quantitas B per eandem quantitatem C, & prodeat quotus G. Dico esse quotum F ad quotum G ut quantitatem A ad quantitatem B. Quodsi jam pro literis substituantur numeri; nimirum 24 pro A, 12 pro B, 3 pro C, 8 pro F & denique 4 pro G; habebis expositionem in numeris, quam ante dedimus (§. 17).

§. 19. Similiter in Geometria propositiones retulimus ad figuras æri incisas, ut expositionem una contineant. Ita theorematis 37 pars prima, quam exempli loco adduximus (§. 17), hoc modo proponitur in Geometria (§. 233.). Si duas parallelas AB & CD secet transversa EF in G & H, erunt anguli alterni *y* & *u* æquales. Tab. I. Fig. 1. Quodsi literas omittas, habebis theorema pure enunciatum. Ubi vero oculis in figuram iisdem subjectam convertens idem ad eandem applices, adhibitis literis, quibus lineæ & anguli in schemate designantur, quemadmodum paulo ante factum est (§. 17); habebis expositionem. Similiter problema 20 (§. 258. *Geom.*) ita enunciatur: Per datum punctum V parallelam rectæ RS ducere. Omissis literis V & RS prodit propositio pure enunciata; quæ ad schema applicata, ut ante fecimus (§. 17), dat expositionem.

§. 20. Veteres Geometræ propositionem ab expositione tanquam duo diversa a se invicem distinxerunt, atque adeo illam pure enunciarunt, hanc eidem subjecerunt. Hunc morem secutus est *Clavius* in Elementis *Euclidis*. Nos expositionem cum propositione conjunximus, non

non quod in unum confundi velimus, quæ diverſa ſunt; quam ut brevitatis gratia, quemadmodum jam monuimus (§. 18. 19.), una exhiberemus, quæ a lectore ſeparanda ſunt, ne in nimiam molem excreſceret opus ac præter neceſſitatem evaderet ſumtuoſius.

§. 21. Neceſſe autem eſt propoſitionem pure enunciari, remotis iis, quæ ad expoſitionem ſpectant, cum pure enunciata in uſum futurum memoriæ ſit mandanda, expoſitio autem adhibenda, ut claritas affundatur notioni complexæ, quæ propoſitioni reſpondet, ſine qua intelligi nequit, aut ſaltem non ſatis intelligitur, quemadmodum nil videmus absque lumine, aut absque lumine ſufficiente non ſatis clare videmus viſibile. Non tamen opus eſt expoſitionem una memoriæ mandari, cum in applicatione ratiocinando facta ejus nullam habeamus rationem, ſed ſufficiat propoſitioni per expoſitionem ſatis intellectæ adhærere per naturam animæ ſenſum claritatis, quatenus fieri poteſt, ut expoſitionem addamus, quando exigitur, vel e re eſſe videtur, qua actu affunditur claritas, cujus dum nunc obſcure percipitur, antea clare perceptæ memoriam habemus.

§. 22 Reſolutiones problematum arithmeticæ ad exempla, geometricæ ad figurarum conſtructiones ſtatim ſunt transferendæ. Singula, quæ fieri præcipiuntur, ſuis numeris diſtinximus. Numerantur autem eo ordine ſingula, quo fieri debent. Quamobrem cum quælibet reſolutio tot contineat regulas, quot ſunt numeri; lecta prima ſtatim faciendum, quod eadem præcipitur, & progreſſus ordine fieri debet ad ſequentes. Ita nimirum absque ullo negotio facies, quod fuerat faciendum, & dum hoc facis regulis affundetur claritas, quæ ad totam reſolutionem intelligendam ſufficit. Quoniam vero in reſolutionibus problematum ſequentium præcipiuntur, quæ quomodo fieri debeant, docetur in anterioribus; igitur neceſſe eſt, ut eo ordine problematum reſolutiones tibi familiares reddas, quo numerantur, ne facturus ea, quæ præcipiuntur, incidas in talia, quæ modo fieri debeant nondum noſti, nec unquam antea feciſti.

Non

Non eſt, quod excipias, citari in reſolutionibus ea, quæ ex anterioribus præſupponuntur, veluti in reſolutione problematis de linea alteri parallela per datum punctum ducenda prima, quod paulo ante exempli loco adduximus (§. 19), problema 17 (§. 216. *Geom.*) de linea perpendiculari ex dato puncto in eam demittenda & problema 16 (§. 212. *Geom.*) de linea perpendiculari ex dato in linea data puncto ad eandem erigenda: ita enim labor multiplicatus difficilis redditur & moleſtiam parit, quæ ſublata difficultate prorſus nulla eſt, ubi jam noveris, quomodo ex puncto dato ad lineam datam perpendicularis ſit demittenda & ex puncto in eadem dato perpendicularis excitanda, ac utrumque facere valeas.

§. 23. Quoniam vero non ſufficit problematum reſolutiones intelligere, verum etiam habitus comparandus eſt ea faciendi, quæ fieri debent, habitus autem omnis nonniſi exercitio, adeoque idem iterato agendo comporatur; a problemate uno non progrediendum ad alterum, niſi ubi ea, quæ in reſolutione præcipiuntur, prompte facere potueris. Hoc enim pacto nullam ſenties in difficilioribus difficultatem, nec verendum eſt, ne moleſtia faſtidium creet, nec progreſſus deſtituetur voluptate individua comite, quæ ardorem continuo progrediendi ulterius accendit, alit & auget. Merentur ea, quæ hic dicuntur, attentionem, hoc enim modo acquiruntur ſingulares animi dotes ad præclara nitenti mirifice profuturæ. Sed de his dicemus nonnulla in ſequentibus.

§. 24. Enimvero ſi quis omnem uſum Matheſeos facere velit, quem poteſt, eumque magis præclarum, quam qui in cognitione veritatum mathematicarum conſiſtit, in iis perſiſtere non debet, quæ hactenus docuimus. Superſunt alia adhuc obſervanda, de quibus ut dicamus, inſtituti noſtri ratio poſtulat. Nimirum primum in ſymbolica repræſentatione theorematis, ſicuti in repræſentatione definitionum (§. 11.), non perinde eſt, quocunque modo id fiat, ſed id omnino agendum eſt,

est, ut sensui tanquam diversa exhibeantur, quæ intellectus a se invicem distinguere tenetur, & ut singula ipsa scriptione a se invicem distinguantur, quæ in notione propositioni respondente distinguenda veniunt. Omne theorema in duas resolvitur partes, hypothesin atque thesin, quarum ista exhibentur, quæ de subjecto sumuntur, hac vero exhibetur prædicatum, quod vi illorum, quæ sumuntur, de eodem enunciandum, seu propter ea, quæ sumuntur, ponendum. In symbolica igitur repræsentatione theorematis hypothesis scribenda est a sinistra, thesis vero a dextra. Quodsi hypothesis plura continet, singula, quæ sumuntur, sigillatim scribi, & eo, quo sequuntur, ordine sibi invicem subscribi debent, ita ut ipsa scriptione exprimantur eorum ad se invicem relationes, quæ supponuntur. Et idem observandum est in thesi, siquidem plura continet. Exemplis manifestum reddetur, quod obscurius dictum videri poterat, deficiente idea, a qua claritatem suam haurit notio. Sit exempli loco theorema, ad quod ante provocavimus (§.18). Si duæ quantitates quæcunque per eandem tertiam dividas; quoti sunt inter se ut quantitates divisæ. Hypothesis theorematis est, quod duæ dentur quantitates, quod eædem dividantur per eandem tertiam, quo facto prodeunt duo Quoti; thesis vero, quod hi ipsi quoti eam inter se habeant rationem, quam habent quantitates divisæ. Quodsi (quemadmodum supra fecimus) quantitates dividendæ exponantur per A & B, dividens per C, quoti vero per F & G, theorema ita repræsentabitur.

| Hypothesis | Thesis |
|---|---|
| A & B quantitates dividendæ | F : G = A : B. |
| C dividens communis. | |
| F & G quoti ex divis. prodeuntes | |

Idem observandum est in numeris, per quos theorema exponitur.

| | |
|---|---|
| 24 & 12 Num. divid. | 8 : 4 = 24 : 12 |
| 3 Divisor commun. | |
| 8 & 4 Quoti ex div. prodeuntes. | |

Immo

Immo ſi ab expreſſione generali obſcuritatem arcere volueris, quæ per naturam ſuam eidem inhæret, non tollendam niſi claritate, quam affundunt ſingularia; numeros literis, quibus quantitates, numeri indeterminati (§. 13 *Arithm.*), deſignantur, ſubſcribi oportet eo, quo hic factum eſſe vides, modo.

A & B Quant. F:G=A:B
24 12 divid. 8:4=24:12
C Dividens
3 comm.
F & G Quoti ex
8 4 div. prod.

Quodſi meris ſignis repræſentatio ſymbolica theorematis conſtare debeat; hoc modo quod intendis aſſequeris.

$\frac{A}{C}(F$ $\frac{24}{3}(8$ F:G=A:B

$\frac{B}{C}(G$ $\frac{12}{3}(4$ 8:4=24:12

Idem fiet hoc modo:

$\frac{A}{C}=F$ $\frac{24}{3}=8$ F:G=A:B

$\frac{B}{C}=G$ $\frac{12}{3}=4$ 8:4=24:12

§. 25. Demus etiam exemplum unum alterumve geometricum. Theorema 37 (§. 233. *Geom.*) hoc eſt: Si duas parallelas ſecet transverſa, qui prodeunt 1. anguli alterni æquales ſunt, 2. angulus externus æquatur interno oppoſito, 3. duo interni oppoſiti ſunt æquales duobus rectis. Hypotheſis hæc eſt, quod duæ lineæ ſint parallelæ, & quod eædem ſecentur linea alia transverſa: Theſis autem, quod anguli alterni ſint æquales, quod angulus oppoſitus externus æquetur interno oppoſito, quod denique duo oppoſiti interni ſint æquales duobus rectis. Illa adeo duas habet partes, quæ junctim ſumtæ eandem conſtituunt; hæc autem tria membra, quæ ſingula ex eadem hypotheſi ſequuntur, ita ut propoſitio ſit compoſita ex tribus eandem hypotheſin habentibus, & ad tres haſce categoricas revocetur: 1. Anguli alterni intra lineas parallelas ſunt æquales; 2. Angulus externus ex lineis parallelis per transverſam ſectis ortus æqualis eſt oppoſito interno; 3. Duo anguli intra lineas parallelas transverſa ſectas orti ſunt æquales duobus rectis. Quodſi hoc theorema eo, quem ſupra diximus (§. 19), modo explices; ſymbolice diſtincte ita repræſentatur:

Tab. I. Fig. 4

| Hypothesis | Thesis. |
|---|---|
| AB parall. CD | 1. $y = u$ |
| EF sec. AB & CD | 2. $x = u$ |
| in G & H | 3. $o + u = 2R$. |

Theorema 18. (§. 179.) pure ita enunciatur: Si in duobus triangulis fuerit angulus unus unius æqualis angulo uni alterius, & duo latera comprehendentia angulum in uno triangulo fuerint sigillatim æqualia duobus lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo; erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, & duo ad idem anguli reliqui in uno erunt sigillatim æquales duobus ad idem angulis reliquis in altero triangulo, tota triangula æqualia & similia erunt. Hypothesis hæc est, accedente expositione, quod in duobus triangulis ACB & *acb* angulus unus unius A sit æqualis angulo uni alterius *a*, quod duo latera AC & AB comprehendentia angulum A in uno triangulo sint sigillatim æqualia duobus lateribus *ac* & *ab* comprehendentibus angulum *a* in altero triangulo; thesis vero, quod 1 latus tertium BC unius sit æquale lateri tertio *bc* alterius, 2. quod angulus C in uno sit æqualis angulo *c* in altero, 3. quod angulus B in uno sit æqualis angulo *b* in altero, 4. quod triangulum ACB sit æquale & simile triangulo *acb*. Propositio adeo denuo composita est, in qua eidem subjecto sub eadem conditione tribuitur multiplex prædicatum. Quodsi theorema hoc symbolice repræsentare volueris, ita distincte exhibetur scriptum:

Tab. I. Fig. 6.

| Hypothesis | Thesis. |
|---|---|
| ang. A = a | 1. BC = bc |
| AB = ab | 2. ang. C = c |
| AC = ac | 3. B = b |
| | 4. △ ACB ≅ △ acb |

Hoc nimirum pacto distincte exhibentur singula, quæ in hypothesi sumuntur, ut sensus præsto sit in formanda notione distincta intellectui, quæ eidem respondet, nec minus distincte in sensum incurrunt singula, quæ istis positis una ponuntur: id quod egregium habet usum, sive in primo gradu cognitionis subsistere, sive ad secundum progredi volueris, quemadmodum ex deinceps dicendis plenius constabit. Quodsi ars characteristica foret satis exculta, ab omnibus vocabulis in symbolica re-

præ-

præſentatione theorematum ab ſtinere poteramus. Quoniam tamen ſignorum numerus multiplicaretur, quorum uſus tyronibus moleſtior; conſultius eſt ut paucis ſimus contenti & ſubinde vocabulis nonnullis abbreviata ſcriptione locum concedamus.

Tab. I. Fig. 5. §. 26. In problematis quædam dantur, quædam fieri vel inveniri jubentur. Ita in problemate 20 (§. 258. *Geom.*), ad quod ſupra provocavimus (§. 19), datur recta RS, & punctum extra eam V, jubemur autem per punctum V ducere lineam rectam, quæ ſit ipſi R S parallela. Quodſi ergo problema diſtincte concipere volueris, quæ dantur ab eo, quod quæritur, hoc eſt, quod vel fieri, vel inveniri jubetur diſtinguenda conſequenter ubi problema ſenſui diſtincte repræſentare volueris, verſus ſiniſtram ſcribenda ſunt data eo modo, quo ſingulæ determinationes in hypotheſi theorematis exprimuntur, verſus dextram vero quæſitum, quemadmodum hic factum eſſe apparet:

| *Data* | *Quæſitum* |
|---|---|
| Recta AB, punctum V extra eam | Recta tranſiens per V & paral. ipſi AB. |

Ita nimirum non modo quæſitum a datis ſeparatur; verum etiam data ſingula diſtincte exhibentur non minus, quam ſingulæ determinationes quæſiti, conſequenter ſi hæc figuræ ſubſcribantur, idea ſingula a ſe invicem ſeparata exhibet, quæ in notione problemati reſpondente totidem operationibus intellectus diſcernenda ſunt, ut notio evadat diſtincta.

§. 27. Simile quid imitari licet in ipſa reſolutione: id quod inprimis uſui eſt, ubi ad ad gradum ſecundum cognitionis progredi, nec in primo acquieſcere volueris. Exempli loco ſit reſolutio prima problematis 20. Geometriæ, cum quo nobis jam negotium eſt (§. 26). Ea nimirum ita repræſentatur:

VK perpendicularis ad RS.
T punctum pro arbitrio aſſumtum.
TA perpendicularis ad RS.
TA = VK
MN per V & A tranſiens.

---

MN parallela RS.

Notandum vero in denominandis rectis præponi literam, quæ deſignat terminum a quo, unde ducenda eſt recta, quam ducere jubet reſolutio, & ſingula fieri debe-

debere eo ordine, quo sibi invicem subscribuntur. Ita VK indigitat, perpendicularem VK ad RS duci ex puncto V, consequenter ad rectam RS ex puncto V demitti, TA vero indicat, perpendicularem TA ad RS ducendam esse ex puncto T tanquam termino a quo. TA=VK significat, perpendicularem TA æqualem fieri debere antea ductæ VK. Denique MN per VA indicat, rectam MN ducendam esse per puncta V & A, quibus datis determinatur situs rectæ MN per superius in Geometria ostensa. Linea recta separat ea, quæ fieri præcipiuntur, ab iis determinationibus, quas quæsitum habere debet, & quæ infra lineam exhibentur, scilicet quod hic linea MN sit datæ RS parallela. Quod enim transeat per punctum V, per se manifestum est, aut si mavis per ea, quæ vi resolutionis facta sunt, attenta mente considerata. Ubi nimirum ad secundum cognitionis gradum progredi libuerit, ea, quæ ex resolutione problematis per se manifesta sunt quoad quæsitum, probe distinguenda ab iis, quæ esse dicuntur.

§. 28. Non nego, si quis idem facere velit in aliis problematis, quod hic præstitimus in uno eorum eoque haud difficili, ut facilius intelligeretur; eidem plura notanda esse, quam quæ hic docemus: sed instituti nostri ratio non fert, ut simus prolixiores. Sufficit generalem quandam ideam eorum, quæ facienda sunt, insinuasse animo lectoris. Quodsi enim hæc probe perpenderit, quæ hic inculcantur; plura suo Marte assequetur, quæ hinc inde præterea requiruntur. Et sicubi subinde cespitat, in progressu ipsemet errores a se admissos, & quæ melius fieri poterant, animadvertet. Quamobrem diutius hisce non immoramur.

§. 29. In resolutionibus numericis problematum typus calculi ad figuram relatus exhibendus est, qui problema cum resolutione distincte repræsentat & ideam operatricem animo insinuat, quæ firmior eidem inhæret, quam resolutio memoriæ mandata, ita ut hæc non tam facile te fallat. Imm si hæc eidem nondum fuerit infixa, ubi ad librum recurrendum, quando resolutione

ista

ista in praxi opus habes, in typum solum exempli oculos convertere sufficit, quod vi ideæ operatricis, quam repræsentat, totam operationem docet ac dirigit. Quoniam in ipsis Elementis nostris exempla hoc modo exhibuimus, non opus est, nisi ut unum lucis affundendæ gratia huc transcribamus. Sistimus adeo illud, quod ad illustrandum problema 13 Trigonometriæ planæ (§. 36. *Trigon.*) in medium adduximus. Problema hoc est: Datis duobus angulis una cum latere uni eorum opposito invenire latus alteri oppositum. Typus vero exempli problema cum resolutione repræsentans talis est:

Tab. I. Fig. 6.

| *Data* | *Quæsitum.* |
|---|---|
| C = 48° 35′ | BC |
| A = 57° 28′ | |
| AB = 74′ | |

*calculus.*

| | |
|---|---|
| Log. sin. C | 9.8750142 |
| Log. AB | 1.8692317 |
| Log. sin. A | 9.9258681 |
| Log. AB + Log. sin. A | 11 7950998 |
| Log. BC = Log. AB + Log. sin. A − Log. sin. C | 1.9200856 |

Quodsi enim oculos in exemplum hoc modo repræsentatum convertas, statim liquet dari duos angulos A & C una cum latere AB uni eorum C opposito & quæri latus BC, quod opponitur alteri A. Typus calculi ostendit, ex tabulis excerpendos esse logarithmos sinus anguli C, lateris AB & sinus anguli A. Logarithmos lateris AB & sinus anguli A addendos & a summa subtrahendum esse logarithmum sinus anguli C, ut relinquatur logarithmus lateris quæsiti BC in Canone Logarithmorum evolvendus, ut pateat numerus lateri quæsito respondens.

§. 30. Abunde hactenus docuimus, quomodo ad gradum primum cognitionis perveniatur, ut nihil supersit in notionibus obscuri, sed omnia penitus intelligantur. Agedum itaque! progrediamur ad secundum, cui acquirendo inserviunt demonstrationes. Quoniam ad demonstrationem accedere non licet, nisi propositione rite intellecta, gradus secundus primum supponit, consequenter quæ in antecedentibus præcepimus, ea ante fieri debent, quam

quam ad demonstrationem distincte percipiendam animum appellas. Quamobrem qui utrumque gradum una eademque opera acquirere studet, & ea observare tenetur, quæ de primo inculcavimus, & facere ea, quæ de secundo jam addemus,

§. 31. Demonstrationes ex ratiociniis contextæ sunt eo modo inter se concatenatis, quem in Logica (§. 551. & seqq.) satis perspicue explicavimus & mox uberius dicenda reddent manifestum. Ratiocinatio, tertia mentis seu intellectus operatio, involvit duas priores, primam atque secundam, notionem scilicet atque judicium, una cum usu facultatum inferiorum, sensus scilicet, imaginationis atque memoriæ, & iis animæ actibus, per quos fit transitus ab usu facultatum inferiorum ad usum superiorum, attentione nimirum atque reflexione: quæ denuo parumper attentis ad sequentia manifesta evadent, modo facultatum animæ notiones ex Psychologia habuerint perspectas. Quodsi ergo a primo cognitionis gradu ad secundum per saltum ascendere nolueris; demonstrationibus ante utendum est mechanicis, quam ad eas progrediaris, quæ vi intellectus concipiuntur, seu ejus operationibus absolvuntur.

§. 32. Quid sit demonstratio mechanica, in Lexico Mathematica docuimus. Nimirum juxta hypothesin theorematis construuntur figuræ, quo facto ea una determinantur, quæ in thesi continentur, seu vi illorum, quæ in hypothesi sumuntur de subjecto, eidem attribuuntur. Quamobrem num ea, quæ una determinantur, talia sint, ope instrumentorum examinanda. Sit exempli loco theorema 18. Geometriæ (§. 179. *Geom.*), ad quod supra provocavimus (§. 25.), scilicet si angulus unus trianguli unius sit æqualis angulo uni trianguli alterius & latera comprehendentia angulum istum in uno triangulo sint sigillatim æqualia lateribus comprehendentibus angulum in altero triangulo, quod etiam latus tertium unius trianguli sit æquale lateri tertio alterius, quod duo anguli reliqui unius sint sigillatim æquales duobus angulis alterius, quod tota triangula æqua-

æqualia & denique ſimilia ſint. Conſtrue triangulum ABC, prout viſum fuerit, deinde ducatur recta *ab*, & ex *a* in *b* transferatur intervallum AB, in *a* excitetur angulus ipſi A æqualis, & in crus *ac* transferatur intervallum AC. Quodſi jam puncta *c* & *b* connectantur recta *bc*, prodit triangulum alterum *abc*. Jam ubi circino capis intervallum BC, & circini crus unum colloces in *b*, crus alterum attinget punctum *c*. Vides itaque latus trianguli *abc* tertium *bc* eſſe æquale lateri tertio BC alterius trianguli ABC. Ex punctis C, B, *c* & *b* arbitraria circini apertura, ſed eadem deſcribantur arcus, angulorum iſtorum menſuræ (§. 57. *Geom.*). Quodſi ope circini examines arcus ex centris C & *c*, itemque ex centris B & *b* deſcriptos; bini ſinguli deprehenduntur æquales (289 *Geom.*), atque hinc angulorum C & *c*, itemque B & *b* æqualitas colligitur (§. 141 *Geom.*). Exſcindantur ex charta, in qua delineata ſunt, triangula ACB & *acb*, & triangulum *acb* ponatur ſuper altero ACB, ea quidem lege, ut punctum *a* in A & recta *ab* ſuper

Tab. I. Fig. 6.

AB cadat; videbis triangulum *acb* coincidere cum triangulo ACB, ſeu illud huic congruere (§. 3. *Geom.*). Atque ex congruentia triangula ACB & *acb* æqualia eſſe intelliguntur (§. 161 *Geom.*), vi notionis etiam communis: communiter enim ex congruentia æqualitatem æſtimant omnes. Immo quia non minus laterum *bc* & BC, itemque angulorum *b* & B, *c* & C congruentia oculis obvia eſt, vi notionis etiam communis colligitur eorundem æqualitas, nempe quod ſit *bc* = BC, *b* = B & *c* = C, ita ut examinibus anterioribus ope circini factis non ſit opus. Denique ubi ad animum revocas, eſſe *a* = A, *ab* = AB & *ac* = AC per hypotheſin, aſt *b* = B, *c* = C & *bc* = BC per examen, quod inſtituiſti, cum præter angulos & latera nihil reperias in triangulis iſtis, per quæ a ſe invicem diſcerni poſſint, eadem quoque triangula *acb* & ACB ſimilia deprehendis (§. 24. *Arithm.*). Similiter ubi theorema 37 (§. 233 *Geom.*) demonſtrare volueris: Si duas parallelas ſecet transverſa, erunt anguli alterni æquales, angulus externus æquatur interno oppo-

Tab. I. Fig. 8.

sito & duo interni oppositi sunt æquales duobus rectis; ducenda est 1. linea CD, deinde 2. altera AB eidem parallela, ad quamcunque distantiam, cum ea non determinetur in hypothesi, & 3. pro arbitrio recta EF, quæ oblique secat parallelam utramque in G & H. 4. Ex puncto intersectionis G ducatum arcus intra crura ipsius anguli *y* & eodem radio ex puncto intersectionis altero arcus intra crura anguli *u*, quo facto ut ante ex æqualitate mensurarum colligis æqualitatem angulorum. Quodsi 5. ex centro G eodem radio ducas arcum intra crura anguli *x*, ex æqualitate mensurarum anguli *x* & *u* colligis æqualitatem horum angulorum. Denique 6. duc etiam ex centro G eodem adhuc radio anguli *o* mensuram, videbisque mensuras angulorum *o* & *u*, quarum hæc eadem deprehenditur cum mensura anguli *x*, semicirculum complere: unde colligis eos esse duobus rectis æquales.

§. 33. Absit autem, ut tibi persuadeas, demonstrationes hasce mechanicas in locum ceterarum surrogari posse, quas scientificas appellare libet in oppositione ad mechanicas. Etenim quod per mechanicas patet, nonnisi verum esse intelligitur de figura, quam descripsisti & præ manibus habes, adeoque theorematis veritas perspicitur nonnisi in casu singulari. Enimvero demonstratio ex hypothesi theorematis ratiocinando veritatem theorematis manifestat universaliter. Demonstratio tamen mechanica universalitatem loquitur, quatenus patet, ea, quæ ex assumtis inferuntur in theoremate, per constructionem semper talia determinari debere. Nolo tamen de his dicere disertius, propterea quod vix conveniunt illorum captui, quibus demonstrationes mechanicæ satisfaciunt. Consultum etiam est, ut demonstrationes mechanicæ ad formam scientificarum reducantur, quantum datur, ut ad hasce quasi manuducant. Sed talia relinquenda sunt circumspectioni illorum, qui erudiendis aliis præficiuntur. Ceterum exemplum præbet demonstratio theorematis geometrici mechanica de congruentia triangulorum, quam modo dedimus (§. 31), ubi ex congruentia laterum *bc* & BC, angulorum *b* & B, itemque *c* & C, atque triangulorum *acb* & ACB col-

colligitur eorundem æqualitas, quemadmodum in demonſtratione ſcientifica.

§. 34 Demonſtrationes mechanicæ æquipollent exemplis numericis, quæ veritatem theorematum & problematum in caſu ſingulari perſpiciendam præbent. Atque adeo facile patet, quid fieri debeat, ſi ſimile quid circa theoremata arithmetica tentes. Quod vero etiam hic formæ demonſtrationis ſcientificæ ratio haberi poſſit, manifeſtis ſpeciminibus docuimus in Arithmetica de geneſi numerorum quadratorum (§. 262. *Arithm.*), de geneſi numerorum cubicorum (§. 277. 280. *Arithmet.*), de numeris æqui differentibus ((§. 327. 329. *Arithm.*). Quoniam vero hiſce ſpeciminibus profundiora inſunt, quæ ad tertium cognitionis gradum viam ſternunt; de iis plura nobis dicenda ſunt in ſequentibus. Diximus iſtiusmodi demonſtrationes in Arithmetica oculares, quia oculis conſpicienda ſiſtunt, quæ in ſcientifica intellectus concipere debet. Et loquuntur univerſalitatem ex eadem ratione, quam modo dedimus de mechanicis theorematum geometricorum demonſtrationibus (§. 32). Vix tamen ratio ſatis manifeſta erit iis, qui in Ontologia nondum verſati non capiunt, quomodo poſitis determinantibus ponatur determinatum. Sane memini, Mathematicos primi ordinis hæſitaſſe in talibus, quæ principio iſti ſuperſtruuntur. Nec mirum: ignoratis enim, vel ſaltem non diſtincte expenſis principiis, a quibus principiata pendent, horum veritas non perſpicitur.

§. 35. Exempla, quibus veritas propoſitionis perſpicitur in numeris, qualia ſunt, quæ in Arithmetica ſubinde adduximus, & quibus propoſitiones illuſtrari debere ſupra præcepimus (§. 17), ſi coacerventur, pluribus in medium allatis, parere inductionem, quam dicunt Logici (§. 478 *Log.*), nemo eſt qui neſciat. Quoniam figuræ in charta delineatæ non minus ſingularia repræſentant, quam notæ numericæ; quilibet concedere tenetur, ſi demonſtratio mechanica in pluribus figuris inſtituatur, ſimiliter prodire inductionem In utroque igitur caſu certitudo major non eſt,

quam quæ ab inductione expectari potest. Non est quod excipias, hoc pacto etiam in demonstrationibus scientificis, a singulari ad universale argumentari, cum eædem ad figuras in charta delneatas referantur. Etenim quod demonstratur, non de figura in charta delineata demonstratur; sed ex assumtis universaliter ratiocinando colligitur, quod erat demonstrandum: demonstratio autem refertur ad figuram in charta delineatam, ut notionibus affundatur claritas, ne in demonstratione intelligenda hæsitemus. Inde est, quod schematismorum in Geometria non requiratur veritas, quæ in usum demonstrationum delineantur: sufficit enim talia supponi, qualia in hypothesi sumuntur, neque enim ex iis, quæ figuræ delineatæ revera insunt, sed potius ex illis, quæ in hypothesi sumuntur & figuræ inesse supponuntur, procedit ratiocinatio.

§. 36. Demonstrationes istæ mechanicæ satisfaciunt iis, qui in primo cognitionis gradu acquiescunt. Faciunt enim ad perspiciendum veritatem in singulari. Eo autem contenti sunt, qui ulterius progredi nolunt, utpote nullum habentes sensum ejus convictionis, qui per demonstrationes genuinas, quas scientificas dicere libuit, demum producitur. Non tamen nullius prorsus usus sunt ceteris. Quoniam enim veritatem in singulari perspiciendam præbent, ad nexum prædicati cum subjecto, seu ejus, quod ex assumtis in hypothesi colligendum, cum iisdem pervidendum conducunt, ut clarius intelligatur, quid demonstrari debeat, seu quomodo thesis ab hypothesi pendeat. Immo cum veritas, quamprimum perspicitur, delectet; voluptate quadam perfunditur animus tyronis, ubi videt posita hypothesi poni thesin, seu per assumta determinari, quæ de subjecto prædicanda sunt. Hac voluptate non modo tollitur tædium ex prævisa difficultate percipiendæ demonstrationis sive vera, sive imaginaria oriundum; verum etiam ardor accenditur demonstrationis percipiendæ, & ad eam percipiendam animus redditur attentus. Novi equidem exercitatioribus molestum accidere, ubi animum ante ad demonstrationem

nem

nem mechanicam advertere jubentur, quam ad ſcientificam accedant, & hac moleſtia effici impatientes, quod per inutiles ambages incedere debeant: id quod inprimis accidit iis, qui animum ſciendi cupidum poſſident. Enimvero quæ initio ſtudii mathematici commendantur, ea in progreſſu prætermittuntur, quando iisdem non amplius opus habemus. A ſyllabizatione incipimus, quando legere diſcimus: ab ea abſtinemus, quamprimum eadem non amplius habemus opus. Ecquis vero damnet ſyllabizationem, quod exercitatiores eadem in legendo non habent opus? Quamobrem velim ut de iis, quæ hic inculcantur, non feratur judicium, niſi ſingulis rite expenſis. Notandum quoque non omnia ingenia eſſe velocia; ſed dari etiam tarda & tarda effici ſtudii utiliſſimi deſertores, niſi moleſtiæ, qua deterrentur, tempeſtive afferatur medela. Sunt vero ſubinde tarda ingenia optima, quando nimirum naturali quodam veritatis intime perſpiciendæ impetu feruntur, ut alia taceamus.

§. 37. Demonſtrationes continua ratiocinatione abſolvuntur & ex aſſumtis procedunt. Aſſumta continentur in hypotheſi, quæ ſingula demonſtrationem ingredi debent. Ab his igitur exordinendum, redigendo in propoſitiones aſſumta, & ex anterioribus ſumendo principia, quæ vel in definitionum, vel axiomatum & poſtulatorum, vel propoſitionum jam demonſtratarum numero ſunt terminum communem cum iſtis habentia, qui ipſe principium iſtud veluti ſponte ſua in memoriam revocat, ubi anteriora eidem firmiter infixa tenueris. Quæ prodeunt concluſiones ſumuntur deinceps eodem modo, quo ea, quæ hypotheſis continebat, eodemque modo ratiocinando progrediendum, donec inferantur ea, quæ theſis ſiſtit. Unde facile apparet, apprime opus eſſe, ut concluſiones per ſingula ratiocinia elicitæ probe notentur & ad tollendam omnem moleſtiam oculis ſubjiciantur: id quod ope ſymbolicæ repræſentationis fieri poſſe dudum docuimus non minus in Ratione Prælectionum Sect. 1. c. 2. §. 38. 50, quam in Logica tam minori c. §. quam majori ( *not.* §. 551. *& ſeqq.* ). Conſultum

vero eſt, ut hic exemplo uno alteroque illuſtrentur, quæ modo diximus, cum ampliſſimum habeant uſum deinceps diſertius exponendum. Hic tantum modo obſervamus, quod neglecta hac demonſtrationum reſolutione & ſymbolica earundem repræſentatione ſtudium mathematicum reddatur difficile & plurimis idem deſerendi cauſa detur.

§. 38. Exemplum facillimum præbet theorema ſextum Geometriæ (§. 156. *Geom.*), cujus hic eſt tenor: Si recta quædam ſecet rectam aliam, anguli verticales ad punctum interſectionis æquales ſunt. Theorema hoc ſymbolice ita repræſentatur:

Tab. I. Fig. 9.

| *Hypotheſis.* | *Theſis.* |
|---|---|
| CD recta data | $o = x$ |
| AB recta eam ſecans | |
| E punctum interſectionis, adeoque | |
| $o$ & $x$ anguli verticales (§. 67. *Geom.*). | |

Patet itaque æqualitatem angulorum verticalium $o$ & $x$ demonſtrandam eſſe ex eo, quod oriantur interſectione rectarum CD & AB ad punctum interſectionis E. Quodſi ergo omnia minutiſſime perſequi volueris, convenienter definitionibus, quæ in Elementis noſtris præmiſimus, ut in tota demonſtratione nihil admittatur, quod confuſe ſaltem percipitur, ratiocinatio ita inſtituenda. In hypotheſin ad figuram oculis præſentem relatam, qualem exhibet ſymbolica ejus repræſentatio eidem ſubjicienda, non minus oculos conjicens, quam animum advertens vides CD eſſe rectam, quam in E ſecat recta alia AB, adeoque angulos $o$ & $y$ habere crus unum AE commune & crus alterum CE anguli $o$ in directum ſitum eſſe cruri alteri ED anguli $y$, adeoque definitio nominalis angulorum deinceps poſitorum, quam ex reali inſtar corollarii deduximus (§. 63. *Geom.*), tibi ſuggerit hoc principium: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum duo crura reliqua in directum jacent, ſunt anguli deinceps poſiti. Unde infertur: Angulos $o$ & $y$ eſſe deinceps poſitos. Quodſi primam hanc concluſionem ſumas tanquam præmiſſam ſyllogismi, & tam ſubjectum, quam prædicatum per-

pen-

pendis, memoriam ſubit theorema Geometriæ quintum (§. 147. *Geom.*). Duo anguli deinceps poſiti ſunt æquales duobus rectis, quod præbet majorem novi ſyllogismi. Ex his præmiſſis colligis concluſionem: Ergo anguli *o* & *y* ſunt æquales duobus rectis, quæ probe notanda in uſum ſequentem. Quodſi jam porro oculos in hypotheſin ad figuram oculis præſentem conjicis & animum ad eandem advertis; denuo vides, AB eſſe rectam, quæ ſecat alteram CD, adeoque angulos *y* & *x* habere crus commune ED & crura reliqua AE & EB in directum ſita eſſe, atque hoc formas judicium intuitivum: Anguli *y* & *x* habent crus commune & eorum crura reliqua in directum jacent. Ad hoc ſi animum attendis, memoria ſuggerit denuo definitionem nominalem angulorum deinceps poſitorum, quam corollarii inſtar ex reali deduximus (§. 63. *Geom.*) & hoc ſuppeditat principium, quod ad concluſionem modo elicitam tanquam præmiſſam novi ſyllogismi aſſumtum vicem alterius præmiſſæ tuetur: Anguli, qui crus unum commune habent & quorum crura reliqua in directum jacent, ſunt anguli deinceps poſiti. Ex his igitur præmiſſis infers concluſionem: Anguli *y* & *x* ſunt anguli deinceps poſiti. Quodſi porro hanc concluſionem ſumas præmiſſam ſyllogismi novi, animum ad eam advertenti ſuccurrit theorema (§. 147 *Geom.*): Anguli deinceps poſiti ſunt æquales duobus rectis. Ex his itaque præmiſſis infers concluſionem: Ergo anguli *y* & *x* ſunt æquales duobus rectis. Quodſi jam in duas concluſiones, *o* & *y* ſunt æquales duobus rectis, *x* & *y* ſunt æquales duobus rectis, oculos conjicis & ſuper iisdem reflectis; attendenti manifeſtum eſt: angulos *y* & *x* atque angulos *o* & *y* eſſe duo æqualia eidem tertio, quod hic ſunt duo recti. Quamobrem ſi judicium hoc quaſi intuitivum ſumas inſtar præmiſſæ novi ſyllogismi; memoria ſuggerit principium, quod antea didiciſti (§. 87. *Arithm.*): Æqualia eidem tertio ſunt æqualia inter ſe. Ex his adeo præmiſſis infers: Anguli *o* & *y* ſimul ſumti ſunt æquales angulis *y* & *x* ſimul ſumtis. Enimvero theſis, ubi in eam oculos conjicis, attendenti

loqui-

loquitur demonstrandum esse, quod angulus *o* sit æqualis angulo *x*. Quamobrem vides angulum *y* utrinque esse auferendum, ut anguli *o* & *x* relinquantur: quod dum fieri supponitur, patet, quod idem ab æqualibus auferatur. Hoc igitur si sumis, succurrit denuo principium, quod in Arithmetica didicisti (§. 91 *Arith.*): si æqualia ab æqualibus auferas vel idem ab æqualibus, quæ relinquuntur æqualia sunt. Unde porro concludis: Anguli *o* & *x*, qui hic relinquuntur, æquales sunt. Atque sic patet, demonstratum esse, quod demonstrandum fuisse thesis insinuat.

§. 39. Distinctissime adeo docuimus, quomodo concipienda sit demonstratio, ut omnem consequatur evidentiam, quam habere potest. Quodsi jam eandem symbolice repræsentare volueris, ut omnem quoque consequatur claritatem, quam habere potest, omnisque in ea concipienda tollatur difficultas, hoc modo ipsum fieri debet:

I.

AE crus commune ang. *o* & *y*.
CE in directum situm ipsi ED

*o* & *y* anguli deinceps positi

1. $o + y = 2R$.

II.

ED crus commune ang. *y* & *x*
AE in directum situm ipsi EB

*y* & *x* anguli deinceps positi

2. $y + x = 2R$.

III.

$o + y = 2R$. *vi num.* 1.
$y + x = 2R$. *vi num.* 2.

$y + o = y + x$

$o = x$ *Q. e. d.*

Notandum hic, lineam a se invicem separare, quæ sumuntur & quod ex iis concluditur. Illa supra lineam collocantur, hoc infra eandem constituitur. Quod intra duas lineas deprehenditur, duplici modo considerari, nimirum 1. tanquam conclusionem, quæ ex assumtis colligitur, & 2. tanquam assumtum, unde ulterius infertur, quod infra lineam alteram scribitur. Vides autem porro, primo loco *num. I.* & *num. II.* assumta ex hypothesi peti, ac inde duplici ratiocinio elici conclusionem *num.* 1. & alteram *num.* 2. Ex hausta sic hypothesi *num. III.* summuntur conclusiones *num.* 1. & 2 ex hypothesi elicitæ, ac inde

inde porro duplici ratiocinio tandem elicitur, quod in thesi continetur, esse $o = x$, seu angulos verticales esse æquales. Repræsentatio hæc demonstrationis symbolica tantummodo propositionem minorem & conclusionem uniuscujusque syllogismi exhibet, qui demonstrationem ingreditur, adeoque syllogismos ad enthymemata reducit, omissis principiis, quæ unicuique syllogismo majorem præbent, ac facile supplentur ex regulis logicis, immo sua veluti sponte memoriam subeunt, ubi ea familiaria experiris, vel per citationem in contextu positam reperiri possunt, ubi memoriæ nondum fuerint infixa. Atque adeo abunde patet, nihil hic desiderari, quod ad demonstrationem distincte concipiendam requiritur & non minus ad evidentiam quoad illationem demonstrationi conciliandam, quam ad claritatem omnem eidem affundendam, ne quicquam obscuri supersit, sed ut penitus intelligatur, desideratur.

§. 40. Demus adhuc exemplum aliud. Sit demonstrandum theorema 18. Geometriæ, de quo diximus superius (§. 25). Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem & latera eundem comprehendentia sigillatim æqualia, erit etiam latus tertium unius æquale lateri tertio alterius, duo anguli reliqui erunt sigillatim æquales & tota triangula æqualia atque similia. Quoniam ex hypothesi ratiocinatio nondum procedit, quemadmodum in casu anteriore (§. 38. 39.); præterea in usum demonstrationis quædam adhuc alia sumuntur, quæ sumi posse patet. Ubi vero hoc fieri solet, tum quæ ulterius supponuntur, præparationem constituere dicuntur. Est itaque hoc in casu, ubi æqualitatem & similitudinem ex principio congruentiæ demonstraturi sumus, præparatio hæc (§. 3. *Geom.*). Triangulum unum ponatur super altero, ita ut vertex angulorum æqualium unius ponatur super vertice alterius & crus illius unum cadat super crure uno alterius. Quæ in præparatione sumuntur, ea tanquam ad hypothesin spectantia considerantur, nullo inter hypothesin & præparationem quoad usum as-

ſumtorum in demonſtrando facto diſcrimine. Dico quoad uſum aſſumtorum in demonſtrando: alias enim manifeſtum eſt diſcrimen inter ea, quæ in hypotheſi, & ea, quæ in præparatione ſumuntur. Etenim per ea ſola, quæ in hypotheſi ſumuntur, determinantur ea, quæ ſubjecto tribuenda & de eodem adeo demonſtranda veniunt: quæ vero in præparatione ſumuntur, non alium habent uſum, quam ut ex ſumtis in hypotheſi procedat ratiocinatio. Nimirum quæ in præparatione ſumuntur, per ea, quæ ſumuntur, in hypotheſi non determinantur, alias enim ratiocinando ex iisdem colligi poterant, nec ulla foret ratio, cur ſumerentur. Sumi autem poſſunt non invito principio contradictionis, quatenus hypotheſi non repugnant, ſed cum iis, quæ in eadem continentur, una conſiſtunt. Abſoluta itaque præparatione demonſtratio ordine naturali, qualem requirit uſus facultatum animæ, ita procedit.

Tab. I. §. 41. Vertex anguli *a* cadit in verticem anguli A & crus illius *ab* in crus alterius AB *per præparationem*, eſtque angulus *a* æqualis ipſi *A per hypotheſin*. Fig. 6. Hæc ubi perpendis, ſuccurrit *theorema* 12 (§. 166. *Geom.*). Si fuerint duo anguli æquales & vertex unius ponatur ſuper verticem alterius ac præterea crus unum illius ſuper crure uno hujus, etiam crus alterum illius ſuper crus alterum hujus cadit. Unde infertur: 1. crus *ac* anguli *a* ſuper crure AC anguli A cadit. Jam porro *a* cadit in A & *ab* ſuper AB *per præparationem* & *ab* = AB *hypotheſin*. Ad hæc animum mum advertenti ſuccurrit: Si recta quædam alteri æqualis ita applicetur, ut terminus ejus unus cadat ſuper terminum unum alterius ac ipſa cadat in alteram, etiam alter ejus terminus in terminum alterum alterius cadit (§. 169. *Geom.*). Unde infertur 2. rectæ *ab* punctum *b* cadere in punctum B rectæ alterius AB. Similiter punctum *a* cadit in A *per præparationem* & *ac* ſuper AC per *demonſtrata num.* 1. eſtque *ac* = AC *per hypotheſin*. Succurrit igitur denuo principium modo commemoratum, indeque

que infertur: 3. punctum *c* cadere in C. Atque hæc ſunt, quæ ex hypotheſi accedente præparatione ratiocinando colliguntur. Enimvero quoniam in hiſce concluſionibus nondum continentur, quæ demonſtranda loquitur theſis; hæc ex illis continuata ratiocinatione colligenda. Ad concluſiones modo elicitas perſpicienti manifeſtum eſt, quod punctum *c* in C *per demonſtrata num.* 3. & punctum *b* in B *per demonſtrata num.* 2. cadere, unde formatur hoc judicium quaſi intiuitivum: Rectæ *b c* & BC intra eosdem terminos continentur (§. 11. *Geom.*). Vi definitionis congruentiæ (§. 3. *Geom.*), memoria ſuggerit hoc principium: Quæ intra eosdem terminos continentur, ea ſibi mutuo congruunt. Hinc infertur concluſio: Recta *b c* congruit rectæ BC. Hanc concluſionem ſi ſumas inſtar præmiſſæ novi ſyllogismi, memoria ſuggerit hoc principium (§. 161 *Geom.*): Quæ ſibi mutuo congruunt, ea ſunt æqualia. Unde infertur: I. recta *b c* æqualis eſt rectæ BC, quod erat primum, eorum ſcilicet, quæ vi theſeos demonſtranda. Porro *b* cadit in B *per demonſtrata num.* 2. *b a* in BA, *per præparationem*, & *b c* in BC *per demonſtrata num.* 2. *& n.* 3. *atque* §. 170. *Geom.* Habemus adeo duos angulos *b* & B, quorum vertices *b* & B atque crura *b c* & BC, itemque *b a* & BA coincidunt. Enimvero ſi vertex & crura angulorum duorum conincidunt, anguli æquales ſunt (§. 167 *Geom.*). Ergo II. angulus *b* æqualis eſt ipſi B, quod erat ſecundum, eorum ſcilicet, quæ vi theſeos demonſtranda. Similiter punctum *c* in C cadit *per demonſtrata n.* 3. & *c a* in CA *per demonſtrata num.* 1. item *c b* in CB *per demonſtrata num.* 2. *& num.* 3. *atque* §. 170. *Geom.* Habemus igitur denuo duos angulos *c* & C, quorum vertices & crura coincidunt. Denuo ad hoc animum advertenti ſuccurrit principium: ſi duorum angulorum vertices & crura coincidunt, anguli æquales ſunt. Unde infertur concluſio III. anguli *c* & C æquales ſunt, quod erat tertium. Denique *a* cadit in A, *per præparationem*, *b* in B *per demonſtrata num.* 2 & *c* in C *per demonſtrata* num. 3, adeoque patet triangula *a c b* & ACB

intra eosdem terminos contineri (§. 11. 170. *Geom.*). Hoc ipſum perpendenti ſuccurrit; quæ intra eosdem terminos continentur, ea ſibi mutuo congruunt (§. 3. *Geom.*). Unde colligitur: Triangula *acb* & ACB ſibi muto congruunt. Quodſi hanc concluſionem ſumas tanquam præmiſſam novi ſyllogismi, memoriam ſubit principium (§. 161. *Geom.*): Quæ ſibi muto congruunt, ea & æqualia, & ſimilia ſunt. Unde infertur IV. triangula *acb* & ACB æqualia & ſimilia ſunt: quod erat quartum. Integram adeo demonſtrationem abſolvimus, cnm vi theſeos nihil amplius demonſtrandum reſtet.

§. 42. Quodſi ſymbolicam demonſtrationis hujus repræſentationem deſideres, qua ſingula veluti oculis conſpicienda exhibentur; ea ita ſeſe habet:

Tab. I. Fig. 6.

| *Hypotheſis* | *Theſis.* |
|---|---|
| ang. *a*=A | I. *bc* = BC |
| *ab*=AB | II. ang. *b*=B |
| *ac*=AC | III. *c*=C |
| | IV. △ *acb* ≅ △ ACB |

*Præparatio.*

*a* cadit in A
*ab* cadit in AB

*Demonſtratio.*

I.

*a* cadit in A *per præparat.*
*ab* cadit in AB *per eandem.*
*a* = A *per hypoth.*

1. *ac* cadit in AC

II.

*ab* = AB *per hypoth.*
*a* cadit in A *per præparat.*
*ab* cadit in AB *per eandem.*

2. *b* cadit in B

III.

*a* cadit in A *per præparat.*
*ac* cadit in AC *per demonſtr. n.* 1.
*ac* = AC *per hypoth.*

3. *c* cadit in C

IV.

*c* cadit in C *per demonſtr. n.* 3.
*b* cadit in B *per demonſtr. n.* 2.
adeoque
*bc* & BC intra eosdem terminos continentur.

Recta *bc* congruit ipſi BC

I. *bc* = BC

V.

*b* cadit in B *per demonſtr. n.* 2.
*ba* cadit in BA *per præparat.*
*bc* cadit in BC *per demonſtr. n.* 2. *& n.* 3 *&* §. 170. *Geom.*

II. angulus *b* = B

VI.

VI.

*c* cadit in C *per demonstr. n.* 3.

*c a* cadit in CA *per demonstr. n.* 1.

*c b* cadit in CB *per demonstr. n.* 2. *& n.* 3. *&* §. 170. *Geom.*

III. angulus *c* = C.

VII.

*a* cadit in A *per præparat.*

*b* cadit in B *per demonstr. n.* 2.

*c* cadit in C *per demonstr. n.* 3.

adeoque

△△*acb* & ACB intra eosdem terminos continentur (§. 11. 170. *Geom.*)

△*acb* congruit △ACB

IV. △ *acb* ≌ △ ACB.

§. 43. Atque ita totam demonstrationem in sua prima principia resolvimus, ex quibus facultatum nostrarum usu deducitur, non admissis notionibus confusis, quæ obscuritatem quandam relinquere poterant, & ratiociniis distincte atque naturali ordine expressis, ac inter se concatenatis, ut nihil desit evidentiæ (§. 41). Singula hæc ipsis oculis spectanda exhibet repræsentatio demonstrationis resolutæ symbolica (§. 42.). Etenim conspicitur, quomodo demonstratio ex hypothesi & præparatione tanquam ex assumtis procedat, quemnam utriusque usum faciamus in demonstrando & cur præparatione opus sit, nec non quomodo sese habeant ea, quæ præparatio superaddit, ad ea quæ in hypothesi continentur. Videmus porro, quomodo omnes determinationes in hypothesi contentæ invehantur in demonstrationem, ut tandem ex omnibus simul sumtis concludatur unumquodque eorum, quod in thesi continetur, tanquam determinatum ex determinantibus. Videmus quoque, quomodo ratiocinia concatenentur, introductis conclusionibus præcedentium in sequentia. Videmus denique, quomodo ratiocinia ultima terminentur in iis, quæ demonstranda loquitur thesis, ut manifestum sit demonstrationem esse absolutam.

§. 44. Habet autem repræsentatio demonstrationis symbolica hunc usum, ut eandem facilitet & omnem difficultatem arceat. Oritur difficultas ex ratiociniorum continuandorum longa serie, & conclusiones, quæ in præcedentibus ratiociniis

niis fuerant elicitæ, memoria retinendæ, ut eas introducere liceat in ſequentes per modum præmiſſarum, ubi non ſtatim, quando illatæ fuerunt, in locum præmiſſæ aſſumuntur in ſyllogismo proxime ſequente, quemadmodum in exemplo primo factum eſſe apparet *num.* I. & II. (§. 39.) & in præſenti *num.* IV. & VII. Enimvero ſi demonſtratio ſymbolice repræſentetur, gradum ſiſtere licet in ſingulis, quæ ſigillatim expreſſa exhibentur, & quacunque mora interpoſita redeunti progredi datur, ac ſi nulla interpoſita fuiſſet. Quantacunque igitur fuerit ratiociniorum eo usque continuandorum ſeries, donec perveniatur ad ea, quæ demonſtranda fuerant; non tamen defatigabitur animus ratiocinationi in longa ſerie continuandæ minus adſuetus. Nec diſtrahitur animus, quocunque durante illa, quam interponere viſum eſt, mora cogitationes tuas convertas. Non interrumpitur eadem attentio, quæ ad demonſtrationem afferenda, ne deſit ſenſus evidentiæ ad convictionem plenariam requiſitus. Immo dum omnia, ad quæ animus advertendus, oculis ſpectanda ſubjicit, attentionem mirifice juvat, ſive ea excitanda, ſive conſervanda fuerit. Neque defatigatur imaginatio atque memoria, quatenus concluſiones ſyllogismorum anteriorum retinendæ, ut earum prompte meminerimus, dum in ſyllogismos ſequentes introducendæ, cum oculis in ea, quæ diſtincte ſcripta cernuntur, converſis ſua ſeſe ſponte ſiſtant, quamprimum earundem meminiſſe debemus. Neque etiam hæſitas in eo, quomodo progrediendum ſit in demonſtratione, donec abſolvatur. Etenim clariſſime vides, primum formari propoſitiones ex iis, quæ in hypotheſi &, ubi ea non ſufficit ſola, in præparatione ſumuntur, ut adſcitis principiis ex anterioribus inferantur concluſiones, donec hypotheſis & præparatio fuerit exhauſta. In locum hypotheſeos & præparationis deinde ſuccedunt concluſiones hoc pacto elicitæ, & quomodo introducendæ ſint in novos ſyllogismos, tum theſis, quæ demonſtranda oculis objicit, tum memoria principiorum, quæ conſpectus concluſionum & in theſi conten-

tentorum offert, oſtendit. Quodſi adeo principia anteriora familiaria experiris, in diſtincte concipienda demonſtratione nihil prorſus difficultatis percipitur. Redduntur autem familiaria, ſi eo, quem præſcripſimus, modo expendantur, & ſymbolicæ repræſentationes, quas explicavimus, aliquoties animo recolantur.

§. 45. Qui principia, quibus opus habet, nondum adeo familiaria experitur, ut ſponte ſua memoriam ſubeant, quoties iisdem opus eſt; ei inſerviunt citationes demonſtrationibus in contextu inſertæ. Hæ enim oſtendunt paragraphum, in quo principium continetur, quod ad propoſitionem vel ex hypotheſi ac præparatione formatam, vel ex concluſionibus jam elicitis aſſumtam aut derivatam applicatum concluſioni eliciendæ inſervit. Patebit hoc demonſtrationis ſymbolicam repræſentationem cum contextu conferenti, ut adeo opus non ſit plura in hanc rem afferri.

§. 46. Notandum nimirum, in contextu demonſtrationem conciſius proponi, quantum ſufficit, ut ſingula ſuggerantur, quæ animum ſubire debent, ubi illam diſtincte concipere volueris. Quodſi tamen contextum cum reſolutione, qualem hic præcepimus, & repræſentatione ſymbolica, qualem exhibuimus, conferre volueris; facile obſervabis, demonſtrationem in contextu poſitam eſſe utriusque directorium, ne hæſites in eo, quid fieri debeat. Facile adeo animadvertes, demonſtrationes ita a nobis fuiſſe expreſſas, ut huic inſtituto maxime conveniant. Diſces etiam, reſolvendo demonſtrationes eo, quem præcepimus, modo, & ſymbolice repræſentando easdem minime effici prolixiores: cum ſupplendo ea, quæ conſpectus ſchematiſmi ſuggerit & quæ citationes inſinuant, eodem prorſus ordine prodeant ſingula ratiocinia, quo eadem poſuimus. Immo ſi ſufficiente attentione uti volueris, in te ipſo experieris, deeſſe adhuc aliquid ſenſui evidentiæ, quamdiu ſingula ratiocinia non formaveris, præſertim ubi uno vel altero exemplo eundem acquiſiveris, ut ne ignores differentiam, quæ inter diſtinctam & confuſam perceptionem intercedit.

dit. Abſit itaque ut tibi perſuadeas, hic a nobis præcipi, quæ a contextu abhorrent, ac per inutiles ambages ad ſcopum tendi.

§. 47. Enimvero non inconſultum eſſe videtur, ut exemplum quoque demonſtrationis theorematis arithmetici in medium afferamus. Sumamus itaque theorema 21. (§. 181. *Arithm.*), quo ſuperius uſi ſumus (§. 24.) & quod ita habet: Si duas quaſcunque quantitates per eandem tertiam dividas; quoti ſunt inter ſe ut quantitates diviſæ. Theorema hoc ſymbolice ita repræſentatur:

| *Hypotheſis.* | *Theſis.* |
| --- | --- |
| A & B quantiates dividendæ | F:G=A:B. |
| C dividens comunis | |
| F & G quoti ex divis. prodeuntes | |

Patet itaque demonſtrandum eſſe, quotos F & G eſſe quantitatibus A & B proportionales, ex eo, quod prodeant ex diviſione quantitatum A & B per eandem tertiam C. Quodſi ergo ex hypotheſi ſumis: Quotus F prodit ex diviſione quantitatis A per quantitatem C; ex anterioribus (§. 174. *Arithm.*) ſuccurrit principium. In diviſione unitas eſt ad diviſorem, ut quotus ad dividendum. Unde infertur: 1. ſive unitas eſt ad C ut F ad A. Quodſi porro ex hypotheſi ſumis: Quotus G prodit ex diviſione quantitatis B per quantitatem C; vi ejusdem principii infertur: unitas ſive 1 eſt ad C ut G ad B. Exhauſta hypotheſi, ut inde nihil amplius concludi poſſit, ubi concluſiones modo elicitas inter ſe confers, patebit rationem F ad A & G ad B eſſe duas rationes eidem tertiæ 1 ad C æquales. Succurrit itaque theorema (§.167. *Arithm.*): Rationes æquales eidem tertiæ ſunt æquales inter ſe. Atque hinc infertur: Rationes F ad A & G ad B eſſe æquales, ſeu eſſe F : A=G : B. Enimvero theſis oſtendit, quæri quomodo ſeſe habeat A ad B. Huc ſi animum advertas, ſuccurrit theorema 18. (§. 173 *Arithm.*): Quantitates proportionales etiam alternando proportionales ſunt. Atque adeo tandem infertur, eſſe F : G=A : B, quod erat emonſtrandum.

§. 48. Symbolica demonſtrationis hujus repræſentatio hæc eſt:

Hy-

*Hypothesis.* *Thesis.*

$\frac{A}{C} = F$ $F : G = A : B$

$\frac{B}{C} = G$

***Demonstratio.***

I.

$\frac{A}{C} = F$ *per hypothesin.*

1) $1 : C = F : A$

II.

$\frac{B}{C} = G$ *per hypothesin.*

2) $1 : C = G : B$

III.

$1 : C = F : A$ *per demonstrata n.* 1

$1 : C = G : B$ *per demonstrata n.* 2

$F : A = G : B$

$F : G = A : B$ *q. e. d.*

Nulla hic opus est præparatione, cum sola hypothesis ea contineat, unde vi principiorum anteriorum tandem infertur conclusio, quæ vi theseos inde elicienda. Quodsi majoris perspicuitatis gratia in numeris demonstrationem repræsentare volueris, non alia re opus est, quam ut literis substituantur numeri eo modo, quo hic factum esse vides:

*Hypothesis.* *Thesis.*

$\frac{24}{3} = 8$ $8 : 4 = 24 : 12$

$\frac{12}{3} = 4$

***Demonstratio.***

I.

$\frac{24}{3} = 8$ *per hypothesin.*

1. $1 : 3 = 8 : 24$

II.

$\frac{12}{3} = 4$ *per hypothesin.*

2. $1 : 3 = 4 : 12$

III.

$1 : 3 = 8 : 24$ *per demonstrata n.* 1

$1 : 3 = 4 : 12$ *per demonstrata n.* 2

$8 : 24 = 4 : 12$

$8 : 4 = 24 : 12$ *q.e.d.*

Possunt etiam numeri quantitatibus per literas designatis subscribi, vel ad latus adjici, prout supra factum esse apparet (§. 24.), ut claritate sua dispellant obscuritatem, quæ signis istis uni-

verſalibus adhærere videtur, quamdiu iisdem nondum ſatis fueris adſuetus. Ceterum ſi demonſtrationem in numeris exhibere volueris, eadem demonſtratione ad plura exempla applicata absque ulla moleſtia fit repetitio, quod idem agendo ſemper aliud agere tibi videris, quatenus numerorum diverſitas varietatem quandam inducit.

§. 49. Cum repræſentatio demonſtrationis in numeris non ſit niſi ipſa demonſtratio ſcientifica, ſeu generalis ad exmplum aliquod majoris perſpicuitatis gratia applicata, quemadmodum in Geometria demonſtratio applicatur ad figuram in charta delineatam, quæ ſingulare exemplum præbet; ideo in eadem acquieſcere licet, nec opus eſt, ut iisdem ſigna univerſalia ſubſtituas, modo tibi caveas ne in ratiocinia tacite invehas determinationes nonnullas, quæ inſunt numeris aſſumtis, non vero hypotheſi. Etenim tum demonſtratio non ſuccedit niſi in eo caſu, ubi iſtæ determinationes adſunt, conſequenter tantummodo caſum quendam particularem attingit, nec univerſaliter demonſtratur, quod erat demonſtrandum. Atque adeo contingere poteſt, ut, dum concluſio in caſu particulari elicita habetur pro univerſali, in errorem incidas. Enimvero error hic præcavetur, modo probe conſideres, num quod aſſumis concluſionis inferendæ gratia, totum in hypotheſi contineatur, aut per præparationem ſuperaccedat, ſi præterea aliud quid ſumitur, nulla habita ratione eorum, quæ numeris qua talibus inſunt. Ita enim certum eſt, in omni exemplo alio ratiocinationem eodem modo procedere, nec argumentationem fieri ab eo, quod huic exemplo ineſt ſingulare, ſed ab eo, quod cum omnibus aliis ſub hypotheſi contentis commune habet. E. gr. in exemplo noſtro (§. 48), quoti 8 & 4. *num. I & II.* ſunt numeri integri rationales. Aſt principium, quo mediante hinc inferimus concluſiones, ſcilicet quod in omni diviſione ſit ut unitas ad diviſorem, ita quotus ad dividendum, ſatis oſtendit, concluſionem inferri ex eo, quod 8 & 4. ſint quoti per diviſionem duorum numerorum 24 & 12. per eundem tertium 3

pro-

prodeuntes, nec ſupponi quotum eſſe numerum integrum rationalem, conſequenter nihil hypotheſi ſuperaddi, dum demonſtratio ad exemplum aliquod ſingulare applicatur. Ceterum quæ hic dicuntur probe notanda ſunt, cum uſum habeant etiam extra Matheſin, atque in partibus Matheſeos mixtis & in cognitione Naturæ mathematica, ubi majore circumſpectione opus eſt, quam in Arithmetica, præſertim ſi theoria accurata nondum proſtat, unde haurianda ſunt principia demonſtrandi, nec diſtinctis ratiociniis in demonſtrando fueris adſuetus, qualia requirit noſtra demonſtrationum reſolutio earundemque ſymbolica repræſentatio, ſecundum leges animæ naturali ordine ex hypotheſi &, quæ ſubinde eidem ſuperaccedere debet, præparatione tanquam ex fonte ſuo profluentia, quemadmodum ex principiis Pſychologiæ empiricæ demonſtrari poteſt nullo negotio, modo ea habueris perſpecta.

§. 50. Quoniam demonſtrationis univerſalitati nil quicquam decedit, dum ad exemplum aliquod applicatur (§. 49): ab ejus repræſentatione in numeris facile abſtrahitur demonſtratio, qualem libro inſeri convenit, ſi quæ aſſumuntur & concluſiones, quæ hinc inferuntur, verbis enuncientur, & concluſionibus adjiciantur citationes principiorum, quorum vi hæ inferuntur. Ita in caſu dato (§. 48) talis prodit demonſtratio: Quoniam quoti ex diviſione duarum quantitatum per eandem tertiam reſultant *per hypotheſin* quilibet eorum eſt ad quantitatem diviſam ut unitas ad tertiam, quæ utramque dividit (§. 174. *Arithm.*), conſequenter quoti ad quantitates diviſas eandem habent rationem (§. 167 *Arithm.*). Sunt igitur inter ſe ut quantitates diviſæ (§. 173. *Arithm.*). *Q. e. d.*

§. 51. Quodſi problema aliquod demonſtrandum eſt, notandum idem converti in theorema ſumta reſolutione cum datis tanquam hypotheſi & eo, quod fieri debet, tanquam theſi. E. gr. Problema de ducenda linea alteri parallela, per punctum extra ipſam datum, adhibita reſolutione prima, quam ſuperius exem-

exempli loco produximus (§. 27), in hoc theorema convertitur: Si ex puncto extra lineam dato demittatur ad lineam datam perpendicularis & ex puncto alio intra eandem pro arbitrio assumto erigatur perpendicularis altera eidem æqualis, recta per punctum datum & extrenum perpendicularis alterius transiens est lineæ datæ parallela.

§. 52. Ubi problema in theorema fuerit conversum, resolutio demonstrationis eodem modu absolvitur, quo in demonstrationibus theorematum resolvendis usi sumus (§. 38. 41 & 47). Sit ex. gr. resolvenda demonstratio problematis, quod modo ad theorema revocavimus (§. 51); demonstratio ita procedit. Recta VK ex puncto V extra lineam RS dato ducta est ad eandem perpendicularis, recta TA ex puncto T intra rectam RS pro arbitrio assumta est itidem ad eandem perpendicularis alterique perpendiculari VK æqualis, *per constructionem* seu *resolutionem*, adeoque perpendicula inter rectam datam RS & rectam per punctum V & A ductam intercepta VK & TA æqualia sunt. Enimvero si perpendicula inter duas lineas intercepta æqualia sunt, lineæ istæ sunt parallelæ (§. 226. *Geom.*). Linea igitur ducta per punctum datum V & extremum A alterius perpendicularis TA est parallela lineæ datæ RS. *Q. e. d.* Videmus adeo ex iis, quæ constructio, juxta resolutionem problematis facta, suggerit, unico syllogismo inferri, quod demonstrandum erat: quæ ratio est, cur nullam in contextu demonstrationem adjecerimus, sed tantummodo citationem principii, vi cujus ex constructione infertur, quod erat demonstrandum, nempe parallelismus linearum RS & MN.

Tab. I. Fig. 5.

§. 53. Symbolica demonstrationis hujus repræsentatio nihil prorsus difficultatis habet. Etenim non alia re opus est, quam ut repræsentationi symbolicæ resolutionis supra datæ (§. 27.) adscribas data ex repræsentatione problematis symbolica, & ad summum adjicias propositionem ex iisdem formatam, prouti hic factum esse vides:

*Hypo-*

| *Hypothesis.* | *Thesis.* |
| --- | --- |
| Recta RS data | MN paral. RS. |
| punctum V extra eam datum | |
| VK perpendicularis ad RS | |
| T punctum pro arbitrio assumtum | |
| TA=VK | |
| MN transiens per V & A | |

*Demonstratio.*

VK & TA perpendicula inter MN & RS atque VK=TA

MN paralla ipsi RS *Q. e. d.*

§. 54. Quoniam demonstratio problematis, quod exempli loco in medium protulimus (§. 51. & seqq.), perbrevis est, utpote quæ nonnisi unico syllogismo constat; non inconsultum videtur addere exemplum adhuc aliud. Sumamus itaque problema 33 Geometriæ de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Sunt itaque data rectæ duæ AB & BE, quæsitum est recta BD media proportionalis inter AB & BE. Resolutio jubet rectas AB & BE jungi in directum, ut prodeat recta AE, super AE describi semicirculum ADE & ex B erigi perpendicularem BD semicirculo in D occurrentem, quæ esse dicitur media proportionalis inter AB & BE. Quodsi ergo problema demonstrare volueris, resolutione in hypothesin versa & propositione pro thesi sumta; sequens prodit theorema. Si super recta AE describatur semicirculus, & ex puncto quocunque diametri B erigatur perpendicularis BD semicirculo in D occurrens; erit ea inter segmenta diametri AB & BE media proportionalis.

Tab. I. Fig. 10.

§. 55. Quodsi jam hoc theorema demonstrare volueris, præparatio accedere debet. Ducantur itaque rectæ AD & DE, chordæ arcus semicirculi cognomines subtendentes, ut prodeant triangula ADB, BDE & ADE. Quo facto demonstratio ita resolvitur. Sumimus ex constructione: Recta BD perpendicularis est ad AE. Hoc ubi perpendis, definitio perpendicularis lineæ suggerit hoc principium (§. 78 *Geom.*): Si linea recta fuerit ad alteram perpendicularis, anguli, quos cum ea efficit, recti sunt & æquales (§. 79. *Geom*). Unde infertur angulos *m* & *n* esse rectos & æquales. Porro rectæ AD & DE se-

micirculum ſubtendunt *vi præparationis* & AE diameter circuli eſt *per conſtructionem.* Unde patet, quod ADE ſit angulus in ſemicirculo. Huc ſi animum advertis ſuccurrit theorema (§. 317. *Geom.*) Angulus in ſemicirculo rectus eſt. Unde infertur: angulus ADE ſeu $o+x$ rectus eſt. Eſt vero etiam angulus $m$ rectus *per demonſtrata.* Quamobrem ſi angulum $m$ ad angulum $o+x$, referas, ſuccurrit principium (§. 145. *Geom.*): omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt. Unde infertur: angulus $m$ trianguli ADB eſt æqualis angulo $o+x$ trianguli ADE. Enimvero angulus $y$ utrique triangulo ADB & ADE communis eſt, atque adeo duo in hiſce triangulis anguli æquales ſunt. Memoria ſuggerit, ſiquidem anteriora eidem mandaveris, quemadmodum fieri debet, adeoque hic ſupponitur: Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, etiam tertius unius æqualis eſt tertio alterius (§. 246. *Geom.*). Hinc itaque colligitur angulum $o$ in triangulo ADB eſſe æqualem angulo $z$ in triangulo ADE. Quodſi jam angulos in triangulis ADB & DBE inter ſe confers, tum patet duos angulos $m$ & $o$ trianguli ADB eſſe ſigillatim æquales duobus angulis $n$ & $z$ alterius trianguli DBE. Succurrit itaque ex anterioribus memoriæ probe infixis principium: ſi duo anguli unius trianguli fuerint ſigillatim æquales duobus angulis alterius, triangula latera æqualibus angulis oppoſita proportionalia habent (§. 267 *Geom.*). Hinc infertur latera AB & BD in triangulo ABD eſſe proportionalia lateribus BD & BE in triangulo DBE, quorum ſcilicet illa opponuntur angulis $o$ & $y$, hi vero angulis $z$ & $x$, angulo $o$ exiſtente æquali angulo $z$ & angulo $y$ æquali angulo $x$ *per demonſtrata.* Habemus adeo AB : BD = BD : BE. *Q. e. d.* Ita demonſtrationem reſolvimus, ut ſingula diſtincte enuncientur, quæ in notionibus continentur, quæ eandem abſolunt, & præſentes animo ejus eſſe debent, qui eadem convincitur.

§. 56. Demonſtratio problematis hujus ſymbolice ita repræſentatur. Tab. I. Fig. 9.

*Hypo-*

*Hypothesis.* — *Thesis.*

AB recta data — BD recta quæsita.
BE recta data — AB: BD = BD:BE
AE diameter semicirculi
ADE semicirculus
AB, BE } Segmenta diametri

*Præparatio.*

AD & DE chordæ semicirculum subtendentes.

*Demonstratio*

I.

BD perpendicularis ad AE *per construct.*

---

1. *m* & *n* anguli recti & $m = n$

II.

AD & DE semicirc. subtendunt *per præparat.*
AE diameter circuli *per construct.* adeoque
ADE angulus in semicirculo

---

2. angulus $o + x$ rectus.

III.

ang. $o + x$ rectus *per demonstr. num.* 2.
*m* rectus *per demonstr. n.* 1

---

3. $o + x = m$

IV.

in ΔΔ ADE & ABD
$o + x = m$ *per demonstr. n.* 3.
$y = y$

---

4. $z = o$.

V.

in ΔΔ ADB & DBE
$m = n$ *per demonstrat. n.* 1.
$o = z$ *per demonstrat. n.* 4.

---

5. $y = x$ &
AB : BD = BD : BE. *Q. e. d.*

§. 57. Atque adeo patet, inter demonstrationem theorematis & problematis nullam intercedere differentiam, modo problema in theorema convertatur, quemadmodum id fieri debere præcepimus (§. 51. 54.). Et hoc pacto docuimus omnia, quæ observanda sunt ei, qui ad secundum cognitionis humanæ gradum adspirat. Unicum adhuc moneri consultum ducimus, scilicet quod ex resolutione demonstrationum pateat, cur propositiones pure enunciare debeamus, quas brevitatis gratia in contextu statim ad figuras retulimus, expositione cum propositione in unum confusa. Etenim ubi distincte ratiocinari volueris, quemadmodum exigit resolutio demonstrationis; necesse

ceſſe eſt ut propoſitiones ſingulæ pure enuncientur. Quamobrem etiam pure enunciatæ memoriæ mandandæ, cum alias applicatio in caſu dato ob literarum figuris adſcriptarum diverſitatem confundat, ut difficilis ac moleſta evadat. In addiſcenda igitur Matheſi morem veterum ſequi tenemur, ut primum propoſitionem unamquamque pure enunciemus, ac deinde eandem exponamus, ſeparata expoſitione a propoſitione, quando eidem immixta

§. 58. Quodſi objicias, nos nihil dixiſſe de corollariis, quorum tamen bene multa in Elementis noſtris occurrunt: facilis eſt reſponſio. Corollaria enim ſunt propoſitiones, quarum veritas perſpicitur per definitionem, vel propoſitionem, cui ſubjiciuntur. Quoniam pleraque eorum demonſtratione indigent, quam per modum principii ingreditur definitio, vel propoſitio, cui ſubjiciuntur; quæ de reſolutione & ſymbolica repræſentatione propoſitionum diximus, ea quoque de corollariis tenenda. Nimirum propoſitio pure enuncianda, deinde exponenda, expoſita in hypotheſin & theſin reſolvenda, quarum utraque conſueto more ſymbolice repræſentata. Demonſtratio deinde, eodem modo reſolvenda, quo eandem in anterioribus reſolvimus, eodem etiam modo ſymbolice repræſentanda, quo eandem in anterioribus repræſentavimus. Nullis igitur peculiaribus præceptis hic opus.

§. 59. Ne quicquam in dictis ſuperſit obſcuri, exemplum aliquod ſuperaddere lubet. Sumamus itaque corollarium quartum theorematis 34. (§. 228 *Geom.*), quod revera eſt corollarium præcedentis tertii, cum non theorema ipſum, ſed ejus corollarium tertium ingrediatur demonſtrationem tanquam principium. Propoſitio in eodem contenta hæc eſt: Si in triangulo rectangulo cathetus unus ſumatur pro baſi, erit alter altitudo. Hæc propoſitio ita exponitur. Sit MKL triangulum rectangulum, MK & KL catheti ejus. Dico ſi KL ſumatur pro baſi, fore MK altitudinem ejus. Hypotheſis adeo eſt quod triangulum MKL ſit Tab. I. Fig. 11.

rectan-

rectangulum, MK & KL sint catheti, & KL sumatur pro basi; thesis autem, quod cathetus MK sit altitudo trianguli. Demonstratio ita resolvitur, si nihil perceptioni confusæ tribuere, sed singula ad notionem distinctam reducere volueris. Figura MKL triangulum rectangulum est *per hypothesin.* Succurrit definitio 52 (§. 91. *Geom.*): In triangulo rectangulo angulus unus rectus est. Unde concluditur: In figura MKL angulus unus rectus est: Porro latera MK & KL sunt catheti *per hypothesin.* Succurrit definitio 57 (§. 96 *Geom.*). Catheti trianguli rectanguli augulum rectum intercipiunt. Unde infertur. Angulus K rectus est. Studio utor syllogismo cryptico, quem a crypsi facile liberabit in Logica versatus, tum quia syllogismi cryptici frequentissime sua veluti sponte sese offerunt in demonstrationibus, manifesti autem studio quærendi; tum ut crypseos in ratiocinando idea animo sese insinuet profutura in Logica, ubi theoria syllogismorum crypticorum traditur. Ceterum hanc conclusionem, quam modo intulimus, unica etiam ratiocinatione colligere licet hoc modo: Angulum K in triangulo rectangulo MKL catheti intercipiunt *per hypothesin.* Angulus in triangulo rectangulo, quem catheti intercipiunt, rectus est. Ergo angulus K rectus est. Ex eo, quod angulus K rectus sit, per immediatam consequentiam infertur: Cathetum MK cum altero KL efficere rectum. Quodsi hanc conclusionem sumas tanquam præmissam novi syllogismi, vi definitionis lineæ perpendicularis (§. 78 *Geom.*) succurrit principium: Linea recta cum altera efficiens angulum rectum ad eandem perpendicularis est. Unde colligitur: Cathetus MK ad alterum KL perpendicularis est. Quodsi perpendas ex puncto M ad rectam KL ductam esse perpendicularem MK, succurrit vi definitionis 47 (§. 85 *Geom.*) principium: punctum, ex quo perpendicularis ad rectam duci potest, eidem rectæ opponitur, quod scilicet ex definitione, animo obversante per consequentiam immediatam elicitur. Unde infertur: Punctum M catheto trianguli KL opponitur. Jam re-

ctæ KM & LM in puncto M concurrunt ad formandum angulum KML, ut adeo M ſit vertex hujus anguli, quod per definitionem 26 (§. 54 *Geom.*) patet, nec demum per ratiocinia diſtincta elicere lubet. Hoc ubi perpendis, ac præterea ex hypotheſi ſumis quod KL ſit baſis trianguli, ſuccurrit definitio 74 (§. 114. *Geom.*): Vertex figuræ eſt vertex anguli baſi oppoſitus. Unde infertur: Punctum M eſt vertex figuræ ſeu trianguli MKL. Recordatus quod MK ſit ad KL perpendicularis *per demonſtrationem*, hoc formas judicium: Cathetus MK eſt perpendiculum ex vertice trianguli M in baſin KL demiſſum. Quodſi denique huc animum advertis, ſuccurrit principium (§. 227. *Geom.*): Perpendiculum ex vertice figuræ in baſin ejus demiſſum eſt altitudo figuræ. Atque hinc tandem concludis: Cathetum MK eſſe altitudinem trianguli rectanguli MKL.

§. 60. Quodſi hanc demonſtrationem ſymbolice repræſentare volueris, hoc modo id fieri debere, ex anterioribus abunde liquet.

| *Hypotheſis.* | *Theſis.* |
|---|---|
| MKL △ rectangulum.<br>MK & KL catheti<br>KL baſis | MK altitudo |

*Demonſtratio.*

I.

MKL △ rectangulum *per hypotheſin*

1. In △ MKL angulus unus rectus

II.

MK & KL catheti △ rectanguli MKL *per hypoth.*

2. Angulus K rectus.

III.

MK cum KL efficit rectum *per demonſtr. n.* 2.

3. MK ad KL perpendicularis.

IV.

MK ad KL perpendicularis *per demonſtr. n.* 3.

4. M opponitur ipſi KL.

V.

M vertex anguli KML, *quod patet intuitive.*

5. M vertex △ MKL

VI.

VI.

M vertex △ MKL *per demonstr. n.* 5.

MK perpendicularis ad KL *per demonstr. n.* 3.

KL basis *per hypothesin.*

adeoque

MK perpendiculum ex vertice M in basin KL demissum.

---

MK altitudo △ rectang. MKL.

§. 61. Insunt resolutioni demonstrationis præcedentis, quæ attentionem merentur. Nimirum quando per notiones confusas clara perspicimus, quæ distincte cognoscenda ratiociniis inferenda, saltum in ratiocinando committimus: qui quando admitti possit citra lapsus periculum, ex resolutione confuse perceptorum in ratiocinia patet. Quodsi integram Arithmeticam & Geometriam eo modo pertractare libuerit, quem præscripsimus & exemplis illustravimus, vix quicquam in theoria Logicæ occurret, cui non lux affundatur. Ipsa quoque resolutio demonstrationis corollarii, quam modo in medium attulimus, clarissime docet, cur in definiendo fuerimus prolixiores, quam vulgo fieri solet, & cur multa demonstravimus principia, quorum nullus in Elementis Geometriæ locus esse solet. Etenim omissis istis definitionibus atque principiis in demonstrationibus saltus in demonstrando committuntur, nec distinctam hujus notionem consequi datur, ubi nunquam quæ per notiones confusas clara putantur distinctis ratiociniis inferuntur. Equidem non nego tyronibus initio studii mathematici molestum esse hunc rigorem, immo superfluum videri, propterea quod demonstratione non indigere existimant ea, quæ absque demonstratione vera intelliguntur; non tamen hinc sequitur, rigorem istum sua carere utilitate. Quamvis adeo initio studii mathematici in gratiam tyronum ab eo tantisper sit recendendum, in progressu tamen non negligendus. Ea de causa in Elementis Germanicis multa non definivimus, quæ in Latinis definiuntur; multa sine demonstratione sumimus in illis, quæ in hisce demonstrantur. Nec hoc fecimus sine prægnantibus rationibns, quæ manifestæ evadent per ea, quæ capite sequente dicentur. Non

defuere, qui tantum definitionum & principiorum demonstratorum apparatum improbarunt, immo autores nobis fuere, ut in nova editione resecaremus, quæ ipsis superflua videbantur, propterea quod evidentes sint demonstrationes absque illis definitionibus & absque principiorum istorum demonstrationibus. Enimvero si nostram demonstrationum resolutionem viderint & ex sequentibus consilium intellexerint, quo id fecimus; non dubitamus fore, ut aliud sit ipsorum judicium.

§. 62. Probe autem notandum est, tum demum demonstrationes esse naturales, seu ordinatas, & completas, adeoque consummatas, quales in Logica requirimus (§. 799. 854. 855. *Log.*), si eo modo resolvantur, quem præscripsimus, ut plenaria oriatur convictio, nec quicquam quoad evidentiam desiderari possit. Et qui in Psychologia empirica satis fuerit versatus, ex principiis ibidem traditis demonstrabit, tum demum facultatum animæ in cognoscendo rectum fieri usum, ubi demonstrationes eo modo expenduntur, quo easdem resolvere docuimus. Nec minus patebit, in demonstrando tum eum fieri facultatum cognoscendi usum, quem in communi cogitationum sese mutuo excipientium serie observamus.

§. 63. Nos in Elementis nostris demonstrationes eo ordine digessimus, ut in ratiocinia ex hypothesi & superaccedente præparatione, si quando opus est, deducta & inter se concatenata facile resolvi possint. Etenim conclusiones eo ordine sese invicem excipiunt, quo in repræsentatione symbolica exhibentur, & iis adjiciuntur citationes, quibus insinuantur principia, quæ in resolutione commemorantur. Sumuntur etiam ex hypothesi & in demonstrationibus problematum ex constructione, unde infertur conclusio, immo etiam ex demonstratis conclusiones, nisi immediate ingrediantur ratiocinium proxime sequens, ut eandem bis poni inconsultum foret. Saltus si quos admittimus, quemadmodum in corollario, quod exempli loco modo adduximus, tales

sunt,

ſunt, ut, niſi acutior fueris in demonſtrando, eos non animadvertas, quod oculis in ſchema converſis per ſe clara videntur, veluti quod M ſit vertex trianguli, quod MK & KL intercipiant rectum K. Nullum vero in demonſtrationibus noſtris deprehendes hiatum, ut omitterentur quædam, quæ ad formanda ratiocinia ſunt neceſſaria, & ſine quibus ſingula, quæ ad demonſtrationem requiruntur, formari nequeunt: qui ipſe hiatus demonſtrationem reddit incompletam (§. 854. *Log.*). Enimvero exactam hanc formam logicam naturæ animæ convenientem, quemadmodum ex Pſychologia conſtat, demonſtrationibus vulgo non tribuunt autores: unde eadem facilitate non reſolvuntur in ratiocinia, ex quibus conſtant, nec ſymbolice eo modo absque difficultate repræſentantur, quo nos easdem exhibere docuimus. Quamobrem ex noſtris quoque Elementis Matheſis minore ſtudio atque minore temporis intervallo addiſci poteſt, quam ex aliorum ſcriptis, & ſi qua ſphalmata vel typographi incuria, vel feſtinante ſcribentis calamo irrepſere, ea attentione adhibita haud difficulter corriguntur.

§. 64. Vulgo demonſtrationes non eo modo expenduntur, quo nos eas reſolvere docuimus. Immo ipſe cum Matheſi addiſcendæ operam darem, aliam viam ingreſſus ſum, donec tandem ſtudium philoſophicum cum mathematico conjungens & in rationem evidentiæ anxius inquirens in veram inciderem. Nimirum vulgo animum primo convertimus in concluſionem, quam contextus ſuggerit, & deinde inquiritur in rationem, cur ea tanquam vera ſit admittenda, quæ vel ex hypotheſi, vel ex definitione aut propoſitione quadam anteriore petita & cum ſchemate oculis ſubjecto collata attento vim conſequentiæ confuſe percipiendam exhibet nullo ratiocinio diſtincte formato. Ex. gr. Si quis demonſtrationem theorematis 6 (§. 156. *Geom.*) expendere voluerit, is concluſiones $x+y$ & $y+o=180$ confert cum figura, ut intelligat, Tab. I. Fig. 9. quid affirmetur. Quærit deinde, cur hæc propoſitio ſit vera & §. 148. qui citatur, evolvens, ubi

ubi legit angulos deinceps poſitos junctim ſumtos conficere 180, recurrit ad figuram, ex qua ubi confuſe percipit, angulos *y* & *x*, itemque *o* & *y* eſſe deinceps poſitos, duas iſtas conclusiones admittit tanquam veras. Deinde recordatur, quod demonſtrandum ſit, angulos *o* & *x* eſſe æquales, hanc conclusionem cum illis confert, oculis in figuram conjectis. Et ubi videt, eos relinqui, ſi angulus communis *y* auferatur; theorematis veritatem admittit, cur hoc faciat quæſitus reſpondens, quia ab æqualibus idem aufertur, ſeu particulariter, quia angulus communis *y* aufertur, axioma iſtud, quod eodem ab æqualibus ablato æqualia relinquantur, nonniſi confuſe ſibi repræſentans. Unde audias alios reſpondentes, hoc per ſe patere. Solenne enim eſt hominibus, ut per ſe liquere dicant id, quod per confuſas perceptiones verum apparet, cur vero verum ſit rationem reddere nequeunt. Admittuntur hinc ſaltus & hiatus in demonſtrando, quæ initio ſtudii mathematici ſubinde haud parum obſtant evidentiæ ad plenariam convictionem requiſitæ, antequam confuſis iſtis ratiocinationibus adſueſcas, ut familiaritas ſuppleat defectum evidentiæ.

§. 65. Quid interſit diſcriminis inter noſtram demonſtrationum reſolutionem & communem eas expendendi morem, in ſeipſo experietur, qui initio ſtudii mathematici utramque viam ingreditur. Magis autem idem animadvertet ubi in philoſophia noſtra verſatus utrumque modum expendendi demonſtrationes inter ſe confert. Quam diverſi autem ſint fructus, quos hinc percipere datur, ex capite ſequente elucescet. Dicta igitur de ſecundo cognitionis gradu acquirendo ſufficiant.

§. 66. Reſtat ut dicamus de tertio cognitionis gradu, quomodo ad eum perveniatur, quantum hic datur. Tertius cognitionis gradus in eo conſiſtit, ut ex iis, quæ cognovimus, alia adhuc nobis incognita proprio Marte eruere valeamus (§. 1). Si quis demonſtrationes noſtra methodo reſolvit, is modum colligendi ex aſſumtis quæſitum continuo ratiociniorum nexu inde perſpicit (§. 38. 41. 47. 52.

54.

54. 59.). Quodsi ergo habitum resolvendi demonstrationes præscripto modo sibi comparaverit; habitu ratiocinandi pollet, quo in veritatibus sibi adhuc incognitis eruendis opus habet. Quamobrem ista demonstrationum resolutio maximopere quoque commendanda est in usum tertii cognitionis gradus, ita ut ad tertium appropinquemus, dum secundo acquirendo studemus. Et qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, is multus esse debet in demonstrationibus resolvendis, cum omnis habitus non modo acquiratur, verum etiam perficiatur, augeatur & conservetur continuo exercitio (§. 430. 431. *Psych. empir.*). Quamobrem cui tertius cognitionis gradus curæ cordique est, is acquiescere non debet in Elementis Arithmeticæ & Geometriæ, sed ad alias quoque Matheseos partes progredi tenetur.

§. 67. Si ex assumtis ratiocinando colligendum est, quod in thesi continetur, ipsa resolutio demonstrationis præscripto modo facta loquitur, non opus esse ut hoc tanquam cognitum præsupponatur. Quamobrem sub generali tantummodo determinatione supponi potest tanquam quærendum. Unde theoremata convertere licet in problemata, quæ sub data in hypothesi conditione investigari jubent, quod thesis continet. Ita theorema de æqualitate angulorum verticalium (§. 38.) in hoc convertitur problema: Invenire rationem angulorum verticalium ex intersectione duarum linearum rectarum prodeuntium. Similiter theorema de congruentia triangulorum angulum æqualem cruribus æqualibus comprehensum habentium (§. 40.) in sequens abit problema: Invenire rationem triangulorum angulum unum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentium & rationem, quam habent anguli duo reliqui unius ad duos reliquos alterius sigillatim, necnon latus tertium unius ad latus tertium alterius. Theorema arithmeticum de quotis ex divisione duarum quantitatum per eandem tertiam resultantibus quantitatibus divisis proportionalibus (§. 47.) in hoc problema transmutatur: Invenire rationem

nem quotorum, qui prodeunt, ſi duæ quantitates per eandem tertiam dividuntur. Denique corollarium, quod catheto uno trianguli rectanguli ſumto pro baſi cathetus alter ſit altitudo (§. 59.) ad problema redigitur hoc modo: ſumto catheto uno trianguli rectanguli pro baſi, invenire aut determinare altitudinem ipſius. Diſcere hinc licet, quomodo quod jam inventum eſt ſpectetur ut adhuc inveniendum, & inſtar problematis proponatur ad exercendam artem inveniendi. Sane omnia theoremata non modo in Arithmetica atque Geometria, verum etiam in omni Matheſi reliqua hoc modo ad problemata rediguntur, quæ tanquam inveniendum proponunt, quod jam cognitum eſt, dum exercitii gratia tanquam adhuc incognitum ſupponitur.

§. 68. Quodſi theoremata ad formam problematum fuerint reducta, quibus aliquid inveniendum proponitur; data a quæſitis ſunt diſtinguenda. Quoniam in hac converſione aut, ſi mavis reductione, quæ in hypotheſi continentur, ſumuntur tanquam data, quod vero in theſi continetur ſub determinatione quadam generali exhibet quæſitum; data & quæſita eodem prorſus modo a ſe invicem diſtinguuntur, quo ſuperius theſin ab hypotheſi ſeparavimus. Ita in exemplo primo angulorum verticalium dari ſupponimus duas lineas ſeſe mutuo interſecantes, ex quarum interſectione neceſſario oriuntur anguli verticales; quæritur autem, quænam ſit horum angulorum ratio ad ſe invicem. In theſi theorematis determinatur ratio, quæ inter eos intercedit, nimirum quod ſit ratio æqualitatis. Aſt hic qualis ea ſit, ignotum ſupponitur & inveſtigari jubetur. In exemplo ſecundo de congruentia triangulorum datur in duobus triangulis ratio, quam habet angulus unus unius *a* ad unum alterius A, ratio cruum *ab* ad AB & *ac* ad AC, nempe quod ubivis ſit ratio æqualitatis, ſeu $a = A$, $ab = AB$ & $ac = AC$: quæritur autem ratio lateris tertii *ab* ad AB, anguli *b* ad B, anguli *c* ad C & totius trianguli *acb* ad totum ACB. Immo quæri etiam poteſt, utrum triangulum *acb* ſit ſimile, an diſſi- Tab. I. Fig. 6.

dissimile triangulo ACB. In thesi theorematis denuo determinatur ratio horum omnium ad se invicem, qualis sit, scilicet quod sit ratio æqualitatis, seu $bc = BC$, $b = B$, $c = C$ & $\Delta\, acb = \Delta\, ACB$. Hic vero eadem tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. In exemplo tertio, quod arithmeticum est, dantur duæ quantitates, datur quantitas tertia, per quam istæ dividendæ, ut duo prodeant quoti; quæritur ratio, quam habent quoti hi ad se invicem. In thesi theorematis eadem determinatur, nimirum quod eadem sit cum ratione quantitatum divisarum; sed hic tanquam ignota supponitur & investigari jubetur. Denique in exemplo quarto datur species trianguli MKL, nimirum quod sit rectangulum, datur etiam basis, scilicet quod ea sit cathetus KL, determinari jubetur altitudo. In theoremate seu corollario, quod in problema conversum fuit, altitudo determinatur, nimirum quod ea sit cathetus alter MK. Hic vero demum quæritur. Videmus adeo, quomodo data a quæsitis distinguantur.

§. 69. Enimvero non sine ratione data a quæsitis discernuntur. Cum enim id, quod quæritur, per ea, quæ dantur, determinetur; ex datis ratiocinando colligendum est quæsitum. Facimus hoc, dum demonstrationem nostro more resolvimus, neque enim in omni ratiocinatione supponitur tanquam cognitum, quod inde tandem colligitur, quando ratiocinatio finitur. Quamobrem patet ad inveniendum, quod quæritur, non aliud requiri, quam ut modo præscripto ratiocinemur. Nostræ igitur resolutiones demonstrationum totæ analyticæ sunt, ostendentes modum, quo ex datis colligitur quæsitum, seu ratiocinando perveniatur ad id, quod investigandum erat. Eædem adeo non minus ad tertium cognitionis gradum ducunt, quam ad secundum: id quod non obtinet, ubi communi more demonstrationes expenduntur (§. 64.). Insigne hic patet discrimen, quod inter nostras demonstrationum resolutiones & communem eas expendendi modum intercedit, tanti æstimandum, quanto præstantior est gradus cognitionis tertius, quam secun-

ſecundus. Velim huc animum advertant illi, quibus noſtræ demonſtrationum reſolutiones ſuperfluæ, aut prorſus pueriles videntur. Quodſi exemplum Mathematicorum præclarorum obvertere volueris, qui ad artem eximia inveniendi pervenerunt absque iſta demonſtrationum reſolutione; hoc parum nos movebit. Objectionem enim eſſe nullam capite ſequente oſtendemus. Abſit itaque ut hoc exemplum ab iſta, quam commendavimus, demonſtrationum reſolutione te deterreri patiaris.

§. 70. Ex iis, quæ diximus & per anteriora ſatis manifeſta ſunt, liquet, quantum fallantur, qui ſibi aliisque perſuadere conantur, quod demonſtrationes ſyntheticæ, quales ſunt *Euclidis* atque Geometrarum veterum, non ſimul ſint analyticæ, conſequenter veritates eodem modo ab ipſis reperiri non potuerint, quo demonſtrantur. Etenim ſi ex aſſumtis legitime ratiocineris, quemadmodum fieri debere ex principiis Pſychologiæ empiricæ demonſtrari poteſt; eodem prorſus modo colligitur quod ignotum eſt, & ad inveſtigandum proponitur, quo, quod jam notum eſt, demonſtratur. Dedimus fidem oculatam, quæ in ſuſpicionem adduci minime poteſt. Memini me olim, cum in Academia Lipſienſi Matheſin atque philoſophiam docerem, antequam ad Profeſſionem Mathematum in Academia Halenſi vocarer, artem invenenendi juxta regulas Dn. *de Tſhirnhauſen* in Medicina mentis explicatam per exempla exerciturus Geometriam elementarem ea methodo pertractaſſe, ut theoremata ad problemata revocarem, & quomodo ex aſſumtis in hypotheſi tanquam datis eruatur quod in theſi continetur tanquam quæſitum oſtenderem, ipſaque problemata tanquam nondum ſoluta, ſed adhuc ſolvenda proponerem, idemque imitarer in Arithmetica. Unde contigit in Elementis Germanicis Arithmeticam practicam a me pertractari methodo vere analytica, ut ex unica notione numeri rationalis, qui juxta definitionem *Euclidis*, ſiſtitur tanquam unitatum multitudo, nimirum juxta methodum geneticam tanquam ortus ex continua unitatis additione, integram Arith-

rithmeticam practicam deduxerim, tyronum captui accomodato modo: quod tantisper attenti facile animadvertent, iis autem satis superque perspectum est, qui me eandem explicantem audiverunt. Dedimus etiam hinc inde specimina quædam in his ipsis Elementis Latinis, veluti ubi de extractione radicum & numeris æque differentibus agitur.

§. 71. Ex resolutione demonstrationum præscripto modo facta præterea videre est, singula ratiocinia, quibus colligitur quod demonstrandum erat, aut, ubi theorema in problema mutatur, quod investigandum fuerat, supponere aliquam definitionem vel propositionem jam cognitam, quæ vel ope ejus quod assumitur seu datur, vel auxilio conclusionum jam elicitarum in memoriam revocatur. Patet etiam ne unicum quidem ratiocinium abesse posse, siquidem ex assumtis inferendum, quod demonstrandum, vel ex datis deducendum, quod investigandum erat. Etsi enim non omnes ratiocinia distincte expendant, in confusis tamen ipsorum notionibus, quæ animo obversantur, actu continentur. Quælibet adeo veritas latens, ubi in apricum producenda, certas veritates cognitas supponit, quarum si vel una ignoratur, ut quæsitam invenias fieri nequit. Quo plures igitur veritates, hoc est, definitiones & propositiones tibi perspectæ fuerint, eo plures quoque invenire poteris, cum abundes principiis, quibus ad ratiocinandum indiges ex datis inventurus quæsitum. Quamobrem dum secundo cognitionis gradui acquirendo studes, ad tertium quoque acquirendum te præparas, immo aptum reddis. Qui inoffenso pede in detegenda veritate latente ex iis, quæ dantur, progredi voluerit, ei principia, quibus ad ratiocinandum opus habet, familiaria esse debent, ut ea veluti sponte sua memoriam subeant, quoties eorum usus requiritur. Definitiones itaque & propositiones, in quarum etiam numerum referuntur resolutiones problematum cum eo, quod fieri jubetur, in theorema conversæ, memoriæ firmiter infigendæ sunt ei, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat, ut multus esse

debeas in acquirendo gradu primo, antequam ad tertium properes, niſi quod expediat ea, quæ demonſtrationum vi tanquam vera aſſecutus es, tanquam invenienda tibi proponi (§. 67.): ita enim tanto facilius & absque ulla moleſtia, immo potius cum inſigni voluptate, memoriæ mandabis, quæ eidem firmiter inhærere debent, ac una cum gradu ſecundo tertium acquires.

§. 72. Demonſtrationes etiam mechanicæ ad tertium cognitionis gradum ducunt, quatenus tentando manifeſtant incognitum (§. 32): quibus cum æquipolleant exempla in numeris (§. 35.), horum etiam uſus eſt in tertio cognitionis gradu comparando. Quoniam tamen demonſtrationes mechanicæ, perinde ac exempla (§. *cit.*), veritatem conſpiciendam non præbent niſi in caſu ſingulari, aut ad ſummum in particulari (§. 33.); in iis non acquieſcendum, ne cum periculo errandi a ſingulari ad univerſale argumenteris. Quamobrem propoſitio in caſu ſingulari, vel particulari detecta ſumi debet tanquam univerſalis & in problema convertenda, ac deinde inquirendum, num ex datis legitime ratiocinando univerſaliter erui poſſit, quod in caſu ſingulari vel particulari verum cognoviſti. Ita conſtat olim *Pythagoram* animadvertiſſe, ſi quadratum numeri 3, quod eſt 9, addatur quadrato numeri 4, quod eſt 16, ſummam 25 exhibere quadratum numeri 5. Quamobrem cum perpenderet, ſi latus unum trianguli rectanguli fiat trium, alterum vero quatuor partium, hypothenuſam eſſe partium quinq; con ſeq uenter quadratum hypothenuſæ æquale eſſe quadratis reliquorum laterum; ſuſpicio ipſi enata eſt, num hæc ſit proprietas trianguli rectanguli, ut quadratum hypothenuſæ ſit æquale quadratis laterum ſimul ſumtis. Non diffiteor levem admodum hanc eſſe ſuſpicionem, ſi ſecundum regulas probabilitatis æſtimetur; ſed levis etiam ſuſpicio ad inveſtigandum verum invitat. Quamobrem ubi ſuper trianguli rectanguli lateribus fuere conſtructa quadrata, ſuperaccedente præparatione ad comparationem quadrati hypothenuſæ cum quadratis

tis reliquorum laterum requisita, eo modo detegi poterat veritas, quo theorema istud demonstravimus (§. 417. *Geom.*). Dico veritatem theorematis hoc modo detegi potuisse: cum enim constet, ipsum non uno modo demonstrari posse, & demonstrationem unamquamque nostro more resolutam monstrare modum ad veritatem liquidam perveniendi (§.70.), non una patebat ad eandem via. Demonstrationes itaque mechanicæ, si tanquam artificium heuristicum adhibeantur, haud raro faciunt, ut de problemate quodam cogites, cujus cogitatio alias animum non subiret.

§. 73. Exempla, quæ in superioribus dedimus, dicta confirmant. Ita si ducas lineas AB & CD se mutuo secantes in E, ut prodeant anguli verticales *o* & *x*, ac vi demonstrationis mechanicæ eorum æqualitatem deprehendas (§. 32), ubi porro sumis æqualitatem angulorum verticalium tanquam universaliter veram & hoc theorema in problema convertis (§. 67.), eodem modo eruetur veritas in omni casu, quo theorema hoc demonstrandum esse ostendimus (§. 38. 70.). Similiter si construas triangulum quodcunque ACB, & deinde alterum *acb* ea conditione, ut fiat *ab* = AB, angulus *a* = A & *ac* = AC, atque triangulo *acb* exciso ex charta, in qua delineatum fuerat, ita ponas super altero ACB, ut punctum *a* in A & latus *ab* in AB cadat, atque videas, triangulum *acb* esse alteri ACB æquale, & esse præterea *bc* = BC, *c* = C atque *b* = B; ubi hoc sumis tanquam universaliter verum, & theorema in problema convertis (§. 67.), eodem prorsus modo ratiocinando assequeris, quod quæritur, quo theorema demonstrandum esse supra præcepimus (§. 41. 70.). Me tacente patebit, quomodo eadem valeant de exemplo, quod in numeris exhibet theorema de quotis ex divisione duorum numerorum per eundem tertium resultantibus numeris divisis proportionalibus, ut plura eam in rem dici non sit opus. Obiter observo, demonstrationem mechanicam de congruentia triangulorum, ubi ad notionem congruentiæ animum advertis, simul insinuare principia, quibus

Tab. I. Fig. 9.

Tab. I. Fig. 6.

opus eſt ad ratiocinandum ſive in demonſtratione ſynthetica, ſive in inveſtigatione ejus, quod quæritur, ut adeo idea confuſa, quæ oculis obverſatur, integram demonſtrationem contineat ab ea abſtrahendam, ſi ad notionem diſtinctam revocetur. Immo notionem theorematí reſpondentem eſſe univerſalem agnoſcimus, ſi in rationem coincidentiæ eorum, quæ in triangulis diſcernuntur, inquirimus, quatenus patet eandem rationem redire in quolibet caſu. Coincidit hic demonſtratio mechanica cum exemplis, quibus univerſaliter repræſentavimus numerorum quadratorum & cubicorum geneſin (§. 262. 266. 277. 280. *Arithm.*). Ex. gr. in exemplo numerico 16 quadratum numeri 4, quæ eſt pars ſecunda radicis, prodit, quia 4 ducitur in ſeipſum (§. 246. *Arithm.*). Idem vero cum fiat in quocunque exemplo alio, eadem quoque ſemper adeſt ratio, cur quadratum partis ſecundæ prodire debeat. Similiter in exemplo geometrico punctum *b* cadit in B, quia *a* ponitur ſuper A & *ab* ſuper AB, eſtque *ab* = AB. Singula vero cum eodem modo ſeſe habeant in exemplo quocunque alio, eadem ſemper adeſt ratio, cur punctum *b* in B cadere debeat. Principium nimirum ontologicum eſt, quod poſita ratione ſufficiente ponatur etiam id, quod propter eam potius eſt quam non eſt (§. 118. *Ontol.*): quod principium in Arte inveniendi multum habet uſum.

§. 74. Conſtat ex ſuperioribus (§. 40), hypotheſin ſolam non ſemper ſufficere, ut inde colligatur, quod erat demonſtrandum, ſed præterea accedere debere præparationem, qua ſuperadduntur iis, quæ in hypotheſi ſumuntur, adhuc alia eadem non invita ſumenda, ut ex ſumtis colligi poſſit, quod theſis continet. Quoniam theorematis in problemata converſis, quibus inveſtigandum proponitur, quod theſis inſinuat (§. 67.), ratiocinatio ex aſſumtis tanquam datis eodem modo procedit ad colligendum quæſitum, quo in reſolutione demonſtrationis præſcripto modo facta colligitur quod demonſtrandum erat (§. 70.); facile intelligitur, præparatione eadem non minus opus

opus esse in veritate investiganda, quam in jam inventa demonstranda. Quando præparatione opus sit, quivis animadvertit, nimirum, quando animum advertens ad assumta deprehendit, deesse principia, quorum vi ex iis elicitur conclusio una, vel plures eliciuntur, prout casus tulerit. Hic itaque dispiciendum, num præter ea, quæ hypothesis continet tanquam determinantia id, quod thesi continetur, sumi adhuc possint alia istis minime repugnantia, quibus accedentibus hypothesis apta efficitur ad conclusiones vi principiorum anteriorum inde inferendas. In demonstrationibus præparatio ista non demum quærenda, sed Autor, qui theorema demonstrat, eam suppeditat. Ast ubi theorema per modum problematis proponitur, præparatio non tanquam cognita spectari potest, sed adhuc incognita supponitur; non tanquam jam inventa consideranda venit, sed tanquam quærenda spectatur. Ad tertium igitur cognitionis gradum adspirans inquirere tenetur, quomodo præparatio innotescere potuerit. In exemplo de triangulis, angulum æqualem æqualibus cruribus comprehensum habentibus constat, datis cruribus cum angulo intercepto construi posse triangulum, consequenter per crura data & angulum interceptum datum triangulum non minus integrum, quam latus ejus tertium eidemque adjacentes duos angulos reliquos determinari, adeoque in hypothesi nihil eorum deficere, quæ assumenda sunt, ut inde colligi queant, quæ per ea determinantur, Quoniam vero quæritur triangulorum ratio, ratio lateris tertii unius ad tertium alterius, & ratio angulorum ad idem adjacentium in uno ad angulos eidem adjacentes in altero sigillatim; ratio vero omnis vel æqualitatis vel inæqualitatis est (§. 130 *Arit.*); per modum hypotheseos tantisper sumitur, rationem æqualitatis hic obtineri. Hæc hypothesis cum examinanda sit, utrum veritati consentanea sit, nec ne, quæritur quomodo æqualitas innotescat. Quamobrem cum juxta notionem communem æqualitas æstimetur ex congruentia, notio congruentiæ insinuat triangulum unum super altero poni debere. Atque adeo in

in præparationem incidimus. Vides adeo, quomodo notiones communes inſinuare queant præparationem: id quod tamen non ſemper procedit, cum non omnia ex notionibus communibus immediate deduci poſſint.

§. 75. Quoniam tamen per naturam animæ impoſſibile eſt, ut quicquam nobis in mentem veniat, niſi quatenus antea cognita beneficio eorum, quæ nunc cogitamus, vel in memoriam revocantur, vel ratiocinationem ingrediuntur; quæ ex notionibus communibus immediate deduci nequeunt, ex aliis utique notionibus derivanda. Quamobrem ut hoc appareat, ſumamus exemplum alterum, quo uſi ſumus in ſuperioribus (§. 54) in demonſtratione problematis de invenienda media proportionali inter duas rectas datas in hoc theorema converſi: Si ex quocunque puncto diametri excitetur perpendicularis peripheriæ circuli occurrens, erit ea inter ſegmenta diametri perpendicularis. Patet hic demonſtrandam eſſe proportionem linearum AB, BD & BE ex eo, quod BD ſit ad AE perpendicularis & ADE ſemicirculus. Quamobrem cum

Tab. I. Fig. 10.

conſtet, triangula ſimilia habere latera æqualibus angulis oppoſita proportionalia, conſequenter linearum proportionem ex triangulorum ſimilitudine colligi poſſe; ideo liquet, diſpiciendum eſſe, annon lineis quibusdam ductis, ut prodeant triangula, obtineri poſſint triangula ſimilia. Ducuntur itaque ſubtenſæ arcuum AD & DE, quia ſic prodeunt triangula ADB, ADE & DBE, quæ per modum hypotheſeos ſumuntur tanquam ſimilia ab eo, qui veritatem demum inveſtigat, & deinde experimur, num eorum ſimilitudo demonſtrari poſſit, conſequenter num hæc bene ſumta fuerit. Quodſi modum, quo in hanc præparationem incidis, diſtincte perpendis, evidens eſt, id quod demonſtrandum eſt ad animum revocare ſimilitudinem triangulorum, cujus notionem antea tibi acquiſiviſti, & ex hypotheſi theorematis patet, ductis rectis AD & DE obtineri triangula, quæ utrum ſimilia ſint, nec ne, angulos eorum inter ſe conferenti innoteſcit, cum ex anterioribus conſtet, triangulorum ſimilitudinem ab æqualitate angulorum pendere, conſequen-

quenter per eandem probari. Nimirum in inveniendo conjecturis locus est, ubi ex iis, quæ dantur, vi principiorum tibi perspectorum ratiocinando colligi nequit, quod quæritur, quemadmodum in demonstranda æqualitate angulorum verticalium succedit (§. 38.). Cum vero conjectando nonnisi casu prima statim vice incidamus in veritatem; ideo haud raro variis modis tentanda est præparatio, antequam in eam incidas, quæ recta est: id quod satis experiuntur, qui veritati proprio Marte eruendæ operam navant. Enimvero de iis hic dicere disertius, quæ ad artem inveniendi spectant, nostri non est instituti, ubi tantummodo docemus, quomodo ad præparationem pervenire potuerint, qui bene positam retinuerunt. Bene autem positas esse eas, quæ in demonstrationibus adhibentur, ipse successus in demonstrando probat. Non tamen existimandum est, quasi earundem inventores prima statim vice in eas inciderint, quemadmodum exemplum modo datum insinuare videtur; sed potius tenendum, tentatis haud raro pluribus sine successu eam retentam fuisse, quam successus approbabat. Sed talia suo tempore demonstraturi sumus a priori ex ipsa animæ natura in Arte inveniendi, si quidem Deo visum fuerit corporis animique vires eo usque conservare, donec ad hanc telam pertexendam ordo nos deducet.

§. 76. Hic non aliud agendum est, quam ut ostendamus, quomodo inquiramus in modum, quo ad præparationes in Elementis nostris occurrentem perveniri licuerit, reddendo rationem, cur hoc modo fiat, tum ex conditione propositionis demonstrandæ, tum ex anterioribus, quæ tanquam cognita & nobis familiaria supponuntur. Quodsi ergo ad imitationem eorum, quæ exempli loco in medium attulimus (§. 74. 75.) præparationes omnes in Elementis nostris expendere libuerit, nulli dubitamus lucem affulsuram sufficientem iis, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Quibus vero in secundo acquiescere visum est, illi hac disquisitione non habent opus, huicque labori supersedere possunt ac debent. Sufficit enim iis præpa-

ratione, prouti præscribitur, ad hypothesin accedente, demonstrationem legitime procedere, qua animus convincitur verum esse, quod erat demonstrandum.

§. 77. Illud adhuc superest, ut doceamus, quomodo procedendum sit, si resolutionem problematis supponis tanquam incognitam, adeoque eandem consideras tanquam inveniendam. Ex hac enim hypothesi perinde ac in theorematis vi anteriorum ratiocinando colligendum, quid fieri debeat, ut facias, quod erat faciendum. Sumamus exempli loco problema de linea recta per datum punctum alteri recta parallela ducenda. Supponamus factum, quod petebatur, nimirum rectam MN, quæ per datum punctum V transit, alteri RS, quæ data supponitur, esse parallelam. Quodsi hoc sumis, ex anterioribus succurrit: perpendicula inter duas parallelas intercepta æqualia esse (§. 226. *Geom.*). Unde infertur: duo quæcunque perpendicula inter rectas MN & RS æqualia sunt. Porro constat, quod V sit punctum extra lineam RS datum. Huc animum advertenti succurrit (§. 216. *Geom.*), a dato puncto extra lineam datam perpendicularem demitti posse. Unde infertur, posse quoque ex puncto V ad rectam RS demitti perpendicularem, nempe VK. Succurrit porro, ubi perpendis, duas requiri lineas perpendiculares inter rectas MN & RS, ut per earum æqualitatem pateat parallelismus ipsarum *per demonstrata*, ex quovis puncto intra rectam datam assumto erigi posse perpendicularem (§. 212. *Geom.*). Unde denuo infertur, ex puncto quocunque lineæ RS veluti T erigi posse perpendicularem TA. Jam quia MN supponitur ipsi RS parallela & VK atque TA sunt perpendicula inter hasce parallelas intercepta, adeoque æqualia *per demonstrata*; resolutio, quæ quærebatur, jam patet. Nimirum 1. ex puncto dato V demittenda est perpendicularis VK ad rectam RS: 2. ex puncto quolibet T erigenda est perpendicularis TA priori æqualis: 3. per duo puncta A & V ducenda est recta MN. Hæc ipsa est resolutio, quæ in Elementis nostris legitur (§. 258. *Geom.*).

Tab. I. Fig. 7.

§. 78.

§. 78. Patet autem, si hoc modo in resolutionem problematis inquiris, hinc simul modum problema in theorema conversum demonstrandi manifestum esse. In ea enim investiganda uteris principiis, quibus in demonstrando habes opus: id quod ex collatione eorum, quæ modo dicta sunt, cum resolutione demonstrationis superius facta (§. 52.) patet. Demonstrationes nimirum una cum resolutione una eademque opera deteguntur, ut adeoque non opus sit, nisi ut, ubi synthetice proponere volueris, quæ invenisti, ea quæ faciunt ad resolutionem, separes ad ceteris, quæ ad demonstrationem spectant. Subinde tamen etiam in Elementis nostris resolutionem & demonstrationem una exhibuimus, quemadmodum in hoc ipso casu factum, quem exempli loco produximus, & in aliis, ubi prolixior est demonstratio, veluti in problematis de extrahenda radice quadrata & cubica (§. 269. 282. *Arithm.*).

§. 79. Demus adhuc exemplum aliud. Supponatur itaque resolutio problematis 16. (§. 212 *Geom.*) de linea perpendiculari ex dato in recta data puncto excitanda. Data sit recta ML & in eo detur punctum G, ex hoc puncto G ducenda est linea, quæ sit ad rectam ML perpendicularis. Ponatur factum, quod petebatur, nempe ducta perpendicularis GI. Succurrit ex anterioribus: Si linea recta ducenda, duo dari debent puncta, ex quorum uno ad alterum ducitur recta (§. 121. *Geom.*). Unde infertur: Præter punctum G, quod datur, determinandum esse adhuc punctum aliud I, ut recta GI duci possit. Liquet igitur, totum negotium in eo versari, ut punctum I determinetur. Ponamus denuo hoc esse factum. Sumitur itaque: Recta ex puncto I ad punctum G ducta perpendicularis est. Succurrit principium: Si recta quædam fuerit ad alteram perpendicularis, anguli deinceps positi æquales sunt (§. 79 *Geom.*). Unde infertur: Anguli MGI & IGL æquales sunt. Sumatur IG pro crure triangulorum contiguorum communi. Patet triangula ista habere angulum unum æqualem &, crus unum ejus esse æqua- Tab. I. Fig. 12.

G 2 le,

le, nempe idem. Succurrit ex anterioribus principium (§. 179 *Geom.*): Si duo triangula habuerint angulum unum æqualem duobus cruribus ſigillatim æqualibus comprehenſum, etiam latus tertium unius æquale erit lateri tertio alterius. Atque hinc infertur: Si præterea fiat GK=GH, erit etiam KI=HI. Atque adeo liquet, ſi fiat GK=GH, hoc eſt, ſi ex puncto H capiatur utrinque æquale intervallum, ex punctis K & H eodem intervallo quocunque alio (cum hic longitudinis GI nulla habenda ſit ratio, ſed tantummodo ſitus ad rectam ML) per interſectionem determinari poſſe punctum I, quod quærebatur, ut recta IG duci poſſit. Denuo manifeſtum eſt, reſolutionem problematis analyticam ſimul continere & ejus demonſtrationem. Quodſi unam ab altera ſepares, utraque prodibit, qualis in elementis noſtris extat. Obiter moneo inter principia heuriſtica in Geometrica referendum eſſe, ut diſpiciamus, num triangula congruentia & ſimilia determinari poſſint, quorum ope procedat ratiocinatio ad inveſtigandum, quod quæritur, vel demonſtrandum, quod aſſeritur, requiſita. Quomodo in hoc principium inciderint Geometræ, noſtrum jam non eſt diſquirere. Erit alibi de eo dicendi locus.

§. 80. Subinde reſolutiones problematum innoteſcunt ſola attentione ad theoremata inventa, ad quas nulla patet via, ſi hæc tanquam incognita ſupponuntur. Iſtiusmodi eſt problema de invenienda linea media proportionali inter duas datas. Etenim ſi ſupponimus lineam BD eſſe inventam, quæ inter duas datas AB & BE media proportionalis eſt, ſuccurrit tantummodo vi definitionis (§. 155. *Arithm.*): Si fuerint tres lineæ continue proportionales, erit prima ad ſecundam, ut ſecunda ad tertiam. Atque hinc infertur: Recta data AB eſt ad inveniendam BD ut hæc ipſa BD ad alteram datam BE. Etſi hic ad ſimilitudinem triangulorum tanquam principium heuriſticum confugias, & ſumas BD eſſe crus commune duorum triangulorum ſimilium ABD & BDE videasque, ſi BD fuerit ad

Tab. I. Fig. 10.

AE

AE perpendicularis, angulum *x* angulo *y* æqualem construi debere, quod etiam fieri posse constat (§. 208. *Geom.*); quoniam tamen BD determinatæ magnitudinis est, non constat, quantus fieri debeat angulus *x*, ut recta AD attingat punctum D, quod quæritur, atque ita determinandum, ut crus anguli *x* secet AE in puncto E. Nihil itaque conficies, nisi supponas theorema tanquam cognitum: Si ex puncto quocunque B diametri AE erigatur perpendicularis peripheriæ in puncto D occurrens; erit ea inter segmenta diametri AB & EB perpendicularis. Ubi vero hoc theorema tanquam notum sumitur, resolut o problematis de invenienda recta inter duas alias datas media proportionali sua quasi sponte sese offert. Etenim non multa attentione opus est, ut animadvertas rectas datas AB & BE in eandem rectam transferri & super eadem semicirculum describi posse infertur vi corollarii theorematis primi (§. 136. *Geom.*). Neque ullum est dubium, quin inventori resolutionis hujus problematis ante innotuerit theorema istud, quam de resolutione cogitaret. Non est quod excipias, nos theorema istud non præmisisse in Elementis nostris problemati huic. Etenim sit ita visum fuisset, præmitti poterat: sed in synthesi non necessarium erat. Dum enim demonstranda est resolutio, problema in istud theorema convertitur, atque demonstratio ejus adjicitur, quemadmodum ex superioribus constat (§. 54. 55.). Non nego fieri quoque potuisse, ut resolutio eadem deduceretur ex aliqua proprietate trianguli rectanguli, scilicet ex hoc theoremate: Si ex angulo recto D trianguli rectanguli ADE demittatur ad hypothenusam AE perpendicularis DB, erit hæc ipsa DB media proportionalis inter hypothenusæ AE segmenta AB & BE. Quodsi enim supponas tanquam notum, quomodo super data hypothenusa construi possit triangulum rectangulum; resolutio problematis nostri non minus in aprico est. Plures haud raro patent viæ ad eandem veritatem, & prouti vel hæc, vel alia principia tanquam cognita suppo-

nuntur, unus hanc, alius aliam calcat viam. Mihi tamen probabilius est, ex proprietate circuli potius, quam trianguli rectanguli resolutionem, de qua nobis sermo est, fuisse deductam. Enimvero non opus est, ut ea de re contentionis serram cum aliis reciprocemus. Ubi enim veritates tanquam quærendæ proponuntur, quæ jam inventæ sunt, sufficit ingredi viam, qua recto facultatum cognoscendi usu ad eas pervenire datur.

§. 81. Dantur integræ disciplinæ mathematicæ, quas inter Algebra eminet aut, si mavis, Analysis mathematica, quibus docetur, quomodo veritates mathematicæ sint inveniendæ. Nemo non intelligit, ad tertium gradum cognitionis mathematicæ adspiranti inprimis opus esse, ut in iis addiscendis assiduus sit. Enimvero ea de re nobis demum dicendum erit, ubi ad specialia descendemus. Hic enim nonnisi generalia tradimus, quæ in qualibet Matheseos parte observanda sunt, etsi tantummodo exempla ex Arithmetica & Geometria dederimus.

§. 82. Restat denique ut adhuc dicamus, quomodo definitiones expendere debeat, qui ad tertium cognitionis gradum adspirat. Facile apparet, inquirendum hic quoque esse, quomodo definitiones fuerint detectæ, aut inveniri saltem potuerint. Quamobrem id nobis agendum est, ut ostendamus, quomodo hæc inquisitio sit instituenda. Definitiones esse duplices, nominales & reales, in Commentatione de methodo mathematica monuimus (§. 17. 18.), ubi etiam docuimus, quomodo tum ad nominales (§. 19. *& seqq.*), tum reales perveniatur (§. 25. *& seqq.*). Juxta regulas igitur ibidem traditas definitiones ad examen revocandæ: quod quomodo fiat, uno alteroque exemplo docendum.

§. 83. *Congruentia* definitur, quod sit coincidentia terminorum, & *congruere* dicuntur, quorum iidem termini esse possunt. Definitio hæc explicat, unde congruentiam agnoscere possis in duabus magnitudinibus, veluti in duabus lineis, vel superficiebus. Quamobrem cum definitio nominalis sit, cujus benefi-

neficio res agnoſcitur & ab aliis diſtinguitur ( §. 17. *Comment. de Meth.* ); definitionem hanc nominalem eſſe hinc colligitur. Primus modus perveniendi ad definitiones nominales conſiſtit in eo, ut ad rem præſentem quam percipimus, animum attendamus & cum cura diſtinguamus, quæ diſtingui poſſunt, eaque fini ſingula primum ſigillatim conſideremus, mox vero eadem inter ſe conferamus. Quodſi inquiramus, utrum hoc modo definitio congruentiæ inveniri potuerit, nec ne; hoc modo eam detectam eſſe deprehendes. Sumantur e. gr. duo fila ejusdem longitudinis coëxtenſa: dicuntur ea ſibi mutuo congruere. Quodſi quæſiveris, cur ſibi mutuo congruere dicantur, non aliam reddere potes rationem, quam quod ab eodem termino incipiant, & in eodem definant, ſeu quod extrema eorum coincidant, ipſaq; etiam coincidant quoad longitudinem. Atque adeo patet ex lege ratiocinandi (§.349. *Log.*), coincidentiam terminorum hic dici congruentiam. Similiter notio lineæ rectæ abſtrahitur a filio extenſo, cujus craſſities cum diminui poſſe concipiatur in infinitum, donec tandem evaneſcat; a notione confuſa ejus abſtrahitur notio lineæ in genere, quod ſit longitudo latitudinis expers: quæ eſt definitio *lineæ* in genere, quam dedit *Euclides*. Quodſi jam notionem rectæ confuſam ad diſtinctam revocare volueris, diſtinguenda in ea ſunt, quæ diſtingui poſſunt, eaque fini ſingula primum ſigillatim conſiderari & mox inter ſe conferri debent (§. 19. *Meth.*). Cum in linea non concipiantur niſi puncta, quæ a ſe invicem diſtingui poſſunt, & ſitus eorundem, quem ad ſe invicem habent; recta a curva differre nequit niſi ſitu punctorum, quæ in ea aſſumuntur. Advertit hoc *Euclides*: unde *Rectam* definit, quod ſit linea ex æquo interjacens inter ſua extrema. Enimvero cum huic punctorum ſitui nulla reſpondeat notio niſi confuſa, quam verbis ex æquo interjacere inter ſua extrema indigitat, eadem nempe cum notione confuſa lineæ rectæ, nihil explicuit, nec definitione ſua uti potuit. Nos igitur aſſumentes partem quamcunque rectæ AC eamque conferen- Tab. I. Fig. 13.

ferentes cum tota AB inquiſivimus, num quid in ſitu punctorum, quæ in parte aſſumuntur, deprehendi poſſit, quod diverſum ſit a ſitu punctorum in tota aſſumtorum. Ubi nullam diverſitatem reperiri poſſe deprehendimus; memores definitionis ſimilitudinis (§. 24. *Arith.*), rectam definivimus per lineam, cujus pars quæcunque rectæ ſimilis. Nimirum vi illius definitionis in parte ad totam collata præter magnitudinem nihil obſervare datur, quo ea a tota diſtingui poſſit. Quamobrem cum Linea curva ſit, quæ recta non eſt, eademque ſuppoſita definitione rectæ hoc modo definiri poterat (*not.* §. 85. *Ont.*); nos in definitionem noſtram *Lineæ curvæ* incidimus, quod nimirum ſit linea, cujus partes toti
Tab. I. Fig. 14. diſſimiles (§. 22. *Geom.*). Ita ſi aſſumas duos peripheriæ arcus quoscunque AC & AB, ducasque chordas cognomines, ſitum puncti C ad A & B ad A diſtinguere licet per diverſam rationem ſubtenſarum ad diametrum, neque enim arcuum ſubtenſæ omnes eandem ad diametrum rationem habent, ut adeo pars arcus ab arcu integro hoc modo diſtingui poſſit. Tacemus modos alios diſtinguendi ſitum punctorum in parte, conſequenter partem ipſam, a tota. Geometriæ ſublimioris gnari non ignorant hoc principio diſtingui curvas a ſe invicem. Sed cum ſeniores Geometræ in recta a curva diſtinguenda hæſitaverint definitiones utriusque daturi; non opus eſt ut tyrones in modo, quo eædem detectæ fuerunt, inquirendo induſtriam ſuam fatigent. Tum enim idem manifeſtus erit, ubi in Geometria curvarum fuerint verſati.

§. 84 Similiter videre licet ubivis lineam rectam cum altera in eodem puncto concurrentem diverſimode ad ſe invicem inclinari poſſe. Unde non attenta inclinationis diverſitate enata eſt definitio *anguli* in genere (§. 54. *Geom.*), quod ſcilicet ſit duarum linearum in puncto uno concurrentium mutua inclinatio. Quodſi ergo recordatus a puncto quovis ad punctum quodvis lineam rectam duci poſſe (§. 20 *Geom.*), crura anguli CAB recta CB jungi concipias, reflectendo ſuper iis, quæ in figura, quæ ſic prodit, Tab. I. Fig. 6.

diſtin-

distinguuntur, reperitur (§. 19. *Meth.*); definitio trianguli in genere, rectilinei scilicet, quoniam in Geometria elementari cum aliis nullum nobis est negotium, quod sit figura tribus lineis rectis terminata (§. 87. *Geom.*). Quodsi perpendis in hac definitione non determinatam esse rationem laterum AB, BC & AC & recordaris rationem omnem vel esse æqualitatis, vel inæqualitatis (§. 130. *Arith.*); addendo determinationem rationis laterum ad se invicem, nascuntur triangulorum species (§. 22. *Meth.*). Nimirum si tria latera habeant ad se invicem rationem æqualitatis, seu omnia inter se æqualia sint, definitio præsto est *Trianguli æquilateri* (§. 88 *Geom.*). Si sumis eadem habere ad se invicem rationem inæqualitatis, hoc est, singula inæqualia esse; definitionem habes *Trianguli scaleni* (§. 90. *Geom.*). Denique si sumis latus unum habere ad unum reliquorum rationem æqualitatis, ad alterum vero rationem inæqualitatis, seu duo nonnisi latera æqualia esse, in definitionem *Trianguli æquicruri* incidis.

§. 85. A definitione trianguli æquilateri, quod tria latera æqualia habet, abstrahitur definitio *Figuræ æquilateræ* in genere, omissa determinatione numeri laterum (20. *Meth.*), quod scilicet sit figura, cujus latera singula inter se æqualia sunt (§. 88. *Geom.*). Atque adeo satis patet, quomodo ope regularum in Commentatione de Methodo mathematica explicatarum detectæ fuerint, aut saltem detegi possint definitiones nominales Geometriæ, immo in qualibet Matheseos parte. Idem enim quoque succedere in definitionibus aliis experietur, qui tentare voluerit.

§. 86. Sufficiant igitur hæc dixisse de definitionibus nominalibus: restat ut nonnulla addamus de realibus. E. gr. lineam quandam rectam LM juxta ductum alterius rectæ LO motu sibi semper parallelo, hoc est, ut in quolibet situ semper parallela sit, deorsum moveri posse constat. Quamobrem si hoc fieri sumis, prodit definitio *parallelogrammi* in genere. Similiter rectam quandam AC circa punctum fixum C in gyrum agi posse, donec redeat ad terminum A, unde digressa fuerat, per se liquet, & per notiones

Tab. I. Fig. 3.

Tab. I. Fig. 15.

communes confirmatur. Quodſi ergo hoc ſumis, prodit definitio circuli realis (§. 25. *Meth.*).

§. 87. Eædem definitiones reperiri quoque potuerunt, præſuppoſitis definitionibus nominalibus. Parallelogrammi definitio nominalis eſt, quod ſit figura quadrilatera, cujus latera oppoſita ſunt parallela (§. 102. *Geom.*). Quodſi concipias rectam LM juxta ductum alterius rectæ moveri deorſum, patet figuram deſcribi quadrilateram. Quodſi linea ponatur ſibi ſemper manere parallela, liquet latus ON oppoſito LM eſſe parallelum, & rectas quaſcunque parallelas inter latera OL & MN interceptas eſſe æquales. Enimvero ſi lineæ parallelæ æquales intra easdem lineas comprehendantur, erunt quoque hæ inter ſe parallelæ (§. 257. *Geom.*). Unde infertur, Latus quoque MN eſſe oppoſito LO parallelum. Evidens adeo eſt, figuram, quæ deſcribitur motu lineæ rectæ LM juxta ductum alterius rectæ LO ſibi ſemper parallelo, eſſe quadrilateram & habere latera oppoſita parallela. Atque ſic liquet, figuram hoc modo deſcriptam eſſe vi definitionis nominalis parallelogrammum. Nimirum ſi definitio nominalis parallelogrammi ſumitur, parallelogrammum dici nequit niſi figura, quæ & quadrilatera eſt, & latera oppoſita æqualia habet. Quamobrem ubi definitionem realem hac ſuppoſita dare volueris, ita omnino concipienda, ut nominali non repugnet iſta geneſis, ſed ex geneſi figuræ potius demonſtrari poſſit, nominalem definitionem eidem convenire. Quodſi excipias, ſupponi hic, quæ demonſtranda ante ſunt, quam definitionem realem ex nominali deducere valeas, nimirum quod lineæ parallelæ inter duas lineas interceptæ æquales eſſe debeant, ut hæ quoque inter ſe ſint parallelæ, objectio nulla eſt. Ecquis enim dixerit, ſalva veritate, definitiones reales ex nominalibus deducendas eſſe nulla theoria præſuppoſita, quæ demonſtranda ante venit. Quin potius ipſum exemplum, quod modo dedimus, contrarium loquitur. Definitiones nominales ſumere licet, antequam theoremata demonſtrentur. Sumere quoque licet reales, antequam demonſtrentur propoſitiones,

mo-

modo genesis intelligatur possibilis absque demonstratione, scilicet ut nihil fieri jubeatur, quod absque demonstratione fieri posse non constet. Sed figuram, quæ per genesin prodit, esse eandem, cujus definitio nominalis datur, utique demonstrandum. Quodsi ergo demonstratio supponit principia, quæ absque demonstratione vera esse non perspicitur, illa utique ante demonstranda sunt, quam figuram genitam cum ea, cujus definitio nominalis datur, eandem esse ostendi potest.

§. 88. Facilius ex definitione nominali detegitur realis circuli, non suppositis aliis, quæ de circulo demum demonstranda. Nominalis circuli definitio est, quod sit figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C ductæ rectæ sunt inter se æquales. Quodsi sumis, quod in hac definitione continetur, circulum terminari linea curva in se redeunte, atque succurrit vi intentionis inveniendi genesin curvæ, seu detegendi motum, quo describitur, describi lineam, si punctum ab uno termino ad alterum moveatur (§. 10. *Geom.*); facile animadvertis, lineam, qua terminatur circulus, describi, si punctum describens continuo motu redeat ad terminum A, unde digressum fuerat. Quodsi porro sumis vi definitionis nominalis, rectas ex singulis lineæ istius punctis ad centrum C ductas esse æquales, consequenter punctum describens A esse alterum extremum lineæ rectæ, cujus alterum extremum fixum hæret in centro C; patet, si punctum A a termino suo dimoveri debet, ut tamen alterum rectæ AC extremum in puncto C sit fixum, rectam AC circa punctum fixum C moveri debere. Vides itaque Circulum describi, si recta quædam AC circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ ipsa est circuli definitio realis deducta ex nominali, nulla præsupposita theoria circuli, sed tantummodo assumtis, quæ in definitione nominali continentur.

Tab. I. Fig. 15.

§. 89. Dn. *de Tschirnhausen* in Medicina mentis definitiones reales mirifice deprædicat, iisque omne tribuit pretium nominalibus nullo relicto. Enimvero quemadmodum vidimus definitiones reales ex nominalibus

bus deduci posse; ita vicissim nominales deducuntur ex realibus: id quod in circulo levi attentione animadvertitur. Exempla alia dedimus in solidis (§. 456. *& seqq. Geom.*). Etsi autem non negemus, ex definitionibus realibus haud raro facilius deduci, quæ ex nominalibus operosius demonstrantur, adeoque ad inveniendum eas esse admodum utiles; nominales tamen realibus præstant in rebus ad sua genera suasque species reducendis: id quod in demonstrationibus & in applicatione theoriæ ad casus obvios maxime usui est. Quamobrem definitiones nominales non sunt contemnendæ, immo certo fine realibus præferendæ, quæ ad res obvias agnoscendas & ab aliis distinguendas non adeo commodæ sunt, quam nominales: id quod ipsa circuli atque parallelogrammi definitione reali docetur.

## CAPUT. II.

## DE

# Modo instituendi studium Matheseos intellectus perficiendi causa.

§. 90.

NOn omnes in addiscenda Mathesi eundem sibi scopum præfigunt. Postquam igitur in genere docuimus, quomodo Mathesis sit tractanda, ut eam consequaris cognitionem, quam intendis; nunc porro dispiciendum est, quinam per Matheseos studium intendi possint fines, & quænam observanda sint ei, qui finem intentum consequi voluerit. Eminet inter hosce fines perfectio intellectus, quæ consistit in habitu rectum faciendi facultatum cognoscendi usum in veritate cognoscenda. Hunc finem inten-

tendere debent, quotquot ad certam cognitionem in quocunque genere cognoſcibilium adſpirant, ſive philoſophari voluerint, ſive Theologiæ, Jurisprudentiæ ac Medicinæ operam navare decreverint. Ea de cauſa veteres neminem ad philoſophiam addiſcendam admittere voluerunt, niſi Geometriæ peritum, cum olim Geometria ſola accurata methodo traderetur. Optandumque erat, ut idem mos in ſcholas noſtras introduceretur. Rationes perſpicientur ex iis, quæ mox tradituri ſumus, & per transennam proſpiciuntur vi eorum, quæ modo diximus. In veritate enim cognoſcenda rectum facere tenetur facultatum uſum, qui a veritatis tramite deflectere noluerit.

§. 91. Tres ſunt intellectus operationes, notio, judicium atque diſcurſus, ſive ratiocinium, & hiſce ſuppetitas ferunt facultates cognoſcendi inferiores, ſenſus, imaginatio atque memoria, una cum facultatibus intermediis attentione ac reflexione, per quas ab inferioribus ad ſuperiorem fit tranſitus: Quæ omnia ſatis manifeſta ſunt ei, qui Pſychologiam empiricam cognitam atque perſpectam habet. Qui adeo intellectum perficere voluerit, is rectum operationum intellectus uſum facere tenetur, ac in iis eliciendis uti debet facultatibus inferioribus atque intermediis. Quamobrem ſtudio Matheſeos perficitur intellectus, ſi eodem habitus operationibus intellectus recte utendi, & in iis eliciendis rectum facultatum cognoſcendi inferiorum ac intermediarum uſum faciendi acquiritur.

§. 92. Non igitur nuda cognitione veritatum mathematicarum perficitur intellectus, ſed accuratæ methodo, qua traduntur mathemata, fructus hic debetur. Ejus adeo participes non fiunt, qui methodum accuratam inſuper habent. Quamobrem cum Matheſis perficiendi intellectus cauſa potiſſimum in ſcholas ſit introducenda; parum adoleſcentibus & juvenibus conſulunt, qui ut deſidioſis placeant, methodi nullam rationem habent, ſibi magis, quam ipſis proſpicientes.

§. 93. Qui in primo cognitionis gradu acquieſcit non alium finem ſibi propoſitum habet, quam ut veritatem ab aliis pro-

positam intelligat (§. 1.), consequenter non aliud intendit præterquam veritatum mathematicarum nudam cognitionem. Quoniam igitur nuda veritatum mathematicarum cognitione non perficitur intellectus (§. 92.); nec fructus hujus particeps fieri potest, qui primum cognitionis gradum unice curæ cordique habet. Quod si ergo eum praxes quædam mathematicæ non juvant, veluti si agrimensorem aut architectum militarem agere decreverit, vel si principiorum mathematicorum usum non experitur in addiscendis aliis, ex. gr. in percipiendis dogmatis nonnullis physicis; Mathesin plerumque in spem futuræ oblivionis addiscit, ut studii hujus, quod multiplici ratione sese commendat cultoribus suis, nullum prorsus percipiat fructum. Unde facile intelligitur, quinam in addiscenda Mathesi oleum atque operam perdant, ut ab hoc studio potius sint arcendi, quam ad idem invitandi vanis pollicitationibus. Convenit ingenuitati docentis, ne aliquid lucelli facturus juvenes ab addiscendis iis, quæ magis profutura sunt, ad ea avocet, quæ in spem futuræ oblivionis addiscunt.

§. 94. Qui primo cognitionis gradui acquirendo eam operam navat, quam requisivimus; is attentionem ad ea, quæ discit, afferre ac tamdiu conservare adsuescit, donec illa rite intellexerit (§. 5.). Quænam ad hoc requirantur, ut definitiones intelligat (§. 6. *& seqq.*), nec in propositionibus quicquam supersit obscuri (§. 17. *& seqq.*), perspicit. Definitionum accuratarum & in disciplinis rite ordinandarum (§. 6.), ac theorematum (§. 24. 25.) & problematum & resolutionis eorundem (§. 26. *& seqq.*) genuinæ formæ ideam exemplarem animo concipit. Differentiam inter notiones distinctas & confusas, adæquatas & inadæquatas penitus perspicit (§. 6. 9. & seqq. §. 24. *& seqq.*). Quomodo recto sensuum usu facilitetur operatio intellectus addiscit (§. 7.). Quo pacto repetitio facilior minusque molesta reddatur, qua memoriæ infiguntur firmiter eadem retinenda, cognoscit (§. 15). Nemo non agnoscit, ad perfectionem intellectus pertinere, ut formet notiones distinctas & adæ-

adæquatas cognoſcibilium, ut judicia formet determinata, ut reſolutiones problematum diſtincte concipiat, ut attentionem, prout uſus requiſiverit, determinet, ut uſum ſenſuum in operationibus intellectus decernat, ut memoriæ inſigendorum eademque retinendorum curam gerat. Quamobrem cum hæc perfectio intellectus acquiratur, ſi primo cognitionis gradui acquirendo præſcripto modo ſtudeamus; quin Matheſeos ſtudium, ſi noſtro more tractetur, faciat ad intellectum perficiendum dubitandum non eſt.

§. 95. Non eſt quod mireris modum a nobis præſcriptum ad primum cognitionis gradum adſpirantibus facere ad perficiendum intellectum, cum tamen a methodo, non a dogmatis expectanda ſit perfectio intellectus (§. 92.). Etenim cum ſecundus cognitionis gradus ſupponat primum, nos in acquirendo cognitionis gradu primo jam ea præcepimus, quæ vi methodi obſervanda ſunt iis, quibus ſecundus curæ cordique eſt (§. 30.), cum vulgo methodi nulla habeatur ratio & plerumque nonniſi confuſæ notiones memoriæ imprimantur vi imaginationis reproducendæ, quando iisdem opus eſt. Sane in Geometria lecta vel audita definitione oculos in ſchema delineatum ſtatim conjicientes ideam definiti memoriæ inſigunt, non diſtincte expenſis, quæ in definitione continentur, eodemque modo idea ſchematis, quæ theorema & reſolutionem problematis exhibet, eidem mandatur, quæ vi imaginationis præſens ſiſtitur, quoties de ea re cogitamus. Parum adeo vel nihil tribuitur intellectui, facultatum vero cognoſcendi inferiorum uſus prædominatur. Immo ne attentionis quidem is fit uſus, quem facultas cognoſcendi ſuperior exigit.

§. 96. Qui definitiones, propoſitiones & reſolutiones problematum eo modo exponit, quem nos præſcripſimus (§. 9. 17 *& ſeqq.*), eas ad figuras in charta delineatas & exempla exhibita applicat, qualis applicatio requiritur, dum ratiocinamur. Ratiocinatio tertia intellectus operatio eſt, eodemque prorſus modo ratiocinandum, dum propoſitiones demonſtramus, vel a prio-

ri ex cognitis alia adhuc nobis incognita colligimus. Quamobrem patet, si in acquirendo cognitionis gradu primo morem nostrum sequaris, hoc ipso perfici debere intellectum. Nulla adeo intellectus operatio est, cui rite eliciendæ non inserviat modus acquirendi primum cognitionis gradum a nobis præscriptus (§. 94. *& præs.*).

§. 97. In primo igitur cognitionis gradu acquirendo omnem illum facis facultatum cognoscendi usum, qui in secundo acquirendo requiritur, immo in tertio familiaris supponitur. Est adeo modus acquirendi cognitionis gradum primum, quem nos præscribimus, præparatio ad secundum: qua facta nihil prorsus difficultatis in secundo percipitur, cum eum usum facultatum jam facere possis, quem is requirit. Me vero tacente liquet, quod, ubi primus cognitionis gradus acquiritur, antequam ad secundum accedas, una in parato habeas principia, quibus in ratiocinando opus est, dum ad secundum animum appellis. Equidem id modus a nobis præscriptus commune habere videtur cum vulgari; non tamen utroque idem prorsus efficitur. Etenim nostro more definitiones ac propositiones pure enunciatæ memoriæ infiguntur, quales adhibendæ sunt in ratiociniis distinctis &, dum præscripto modo expenduntur, simul familiares evadunt, quales esse debent, ut statim memoriam subeant, quando iisdem indigemus. Quodsi vero nostro more non expenduntur, nec eadem facilitate definitiones ac propositiones memoriæ mandantur, sed multa demum repetitione consequimur, quod multo temporis compendio obtineri poterat.

§ 98. Plurimum autem refert, ut definitiones & propositiones antecedentes familiares experiaris, antequam ad sequentes accedas. Etenim definitiones sequentes non intelliguntur nisi per anteriores, ubi eas ingrediuntur termini per anteriores explicati. Quamobrem ubi hæce nondum familiares experiris, sequentes tibi non possunt non videri obscuri, nec fieri potest, ut eas penitus intelligas. Similiter demonstratio non convincit, nisi prin-

principia, quæ ex antecedentibus ſumuntur ſenſum evidentiæ ſecum ferant. Neceſſe igitur denuo eſt, ut tibi antecedentes definitiones ac propoſitiones fuerint familiares, ubi ſine hæſitatione in demonſtratione progredi volueris. Quid quod nec propoſitiones ſatis intelligantur, quamdiu definitiones, quibus explicantur termini in iisdem occurrentes, non fuerint familiares? Ea de cauſa obſervare licet, quod ſtudium mathematicum difficile videatur iis, qui nulla terminorum notitia inſtructi ad idem accedunt, nec in repetendis iis, quæ explicata fuerunt, ſeduli ac frequentes ſunt, cum in caſu oppoſitio nulla percipiatur difficultas. Danda vero omnino eſt opera, ut difficultas hæc tollatur, ne ſtudii utiliſſimi efficiat deſertores.

§. 99. Qui Matheſi addiſcendæ operam navant, ut intellectum perficiant, iis inprimis convenit, ut in ſecundo cognitionis gradu acquirendo induſtriam ſuam exerceant. Methodo enim debetur hic fructus, non dogmatis, quæ in Matheſi proponuntur. Hujus autem potiſſima pars ſunt demonſtrationes, quibus veritatis eorum, quæ docentur, convincitur, ut nihil nobis dubii ſuperſit. Secundo gradui cognitionis acquirendo inſerviunt demonſtrationes (§. 30.). Quamobrem ſi ſtudium Matheſeos intellectum perficere debet, neceſſe eſt ut in demonſtrando ſis aſſiduus.

§. 100. Intelliguntur vero hic demonſtrationes ſyntheticæ, quales ſunt *Euclidis* & Geometrarum veterum. Neque alia de cauſa, quam harum demonſtrationum gratia, veteres voluerunt, ne ad philoſophiam accedat, niſi Geometriæ peritus. Quamvis enim demonſtrationes recentiorum analyticæ, quæ calculis algebraicis abſolvuntur, ſuum etiam habere poſſint uſum in intellectu perficiendo; ab iis tamen eundem expectare minime licet, quem ſpondent ſyntheticæ: id quod ſatis manifeſtum evadet per ea, quæ mox diſertius dicentur. Inde nimirum eſt, ut in Matheſi licet verſatiſſimi & inter ſummos Mathematicos eminentes, ubi exrra Matheſin methodo mathematica uti voluerunt, minime

dare potuerint, quæ satisfaciunt. Exemplo nobis est *Cartesius*, vir summus, cujus memoriam egregia in Mathesi inventa posteritati commendabunt, quamdiu scientiæ honos erit. Cum enim *Mersenni* desiderio satisfacturus suum de existentia Dei argumentum ad formam demonstrationis geometricæ reducere vellet, quam parum ipsi leges methodi mathematicæ & genuina demonstrationis forma fuerit perspecta, abunde prodidit in Responsionibus ad objectiones contra Meditationes suas metaphysicas. Taceo exempla alia, quæ commemorari poterant & quibus tandem effectum est, ut extra Mathesin nullam dari certam cognitionem acutiores inde colligerent: in qua opinione ipsum scepticismum consistere, nemo est qui non agnoscat. Quodsi ergo ad certam cognitionem extra Mathesin pervenire volueris, necesse est ut methodi mathematicæ interiorem rationem perspicias, & leges ejus distincte cognoscas: id quod fieri non poterit, nisi demonstrationum syntheticarum resolutione naturæ animæ convenienter facta, quam in superioribus satis declaravimus, ut nihil in ea desiderari possit. Atque ea de causa demonstrationes nostras syntheticas eo ordine digessimus, ut facillime præscripto modo resolvi possint. Nihil enim magis intendimus, quam ut studio mathematico intellectus perficiatur, quo certæ extra Mathesin cognitioni acquirendæ sufficiat.

§. 101. Doluit ideo ipse vir summus, *Isaacus Newtonus*, quod, cum se studio mathematico totum daret, ad *Cartesii* Geometriam aliosque scriptores algebraicos statim progressus fuisset, antequam Elementa *Euclidis* ea attentione expendisset, quam merentur, nec probavit, quod hodie Geometræ methodum syntheticam veterum prorsus negligant, & in solis calculis algebraicis acquiescant, quemadmodum ex ore ipsius hausta refert *Henricus Pemberton* in præfatione ad Conspectum Philosophiæ *Newtoni*, quem patrio sermone edidit. Nullum mihi dubium est, quin, quantum sibi hoc ipso defuerit, abunde expertus fuerit, cum in divino opere Principiorum Philoso-

losophiæ naturalis mathematicorum inventa præclara methodo veterum Geometrarum proponere decrevisset. Quodsi e-enim quis more a nobis præscripto demonstrationes syntheticas resolvere didicerit, & genuinam earum formam animo comprehenderit; is facile animadvertet, quod eam non perviderit *Newtonus*, neque adeo distincte agnoverit, unde pendeat evidentia veritatis extra Mathesin, quemadmodum & *Cartesio* accidisse modo monuimus (§. 100.). Idem videre licet in eximio opere Phoronomiæ *Jac. Hermanni*, qui, cum omnem ætatem in calculis algebraicis consumsisset, methodo veterum recentiora in Mechanica & Hydraulica agnatisque disciplinis inventa demonstrare volebat. Quam parum enim sibi & lectoribus suis consulerit, quod methodo, cujus vim ac potestatem minime conprehendebat, ea proponere voluerit, quæ per calculos algebraicos assecutus fuerat, & cum laude ad utilitatem discentium proponere poterat, acutiores vident.

§. 102. Firmum itaque ratumque manet, qui intellectus perficiendi gratia ad Mathesin accedit, ei demonstrationes *Euclideas* omni cura ac sollicitudine expendendas esse: quæ qualis esse debeat, nostra demonstrationum analysis & earundem symbolica repræsentatio clarissime docet (§. 38. & seqq.). In his igitur industriam suam ingeniique vires exerceat, qui extra Mathesin evidentiam in veritatis cognitione consequi voluerit. Proprio experimento edocti sumus, non dari aliam ad evidentiam in philosophia & Facultatibus, quæ dicuntur, superioribus viam: quam si calcare nolueris, tanto pronior erit in Scepticismum prolapsus, quanto fueris acutior, & facillimum erit nubem pro Junone amplecti, nec abortus imaginationis a genuinis intellectus foetibus distinguere dabitur. Quodsi præscripto a nobis more in Mathesi versari volueris, cessabunt querelæ de imbecillitate intellectus humani, quales movit *Huetius*, non profuturæ nisi ut sternant ad scepticismum viam non sine detrimento religionis tam revelatæ, quam naturalis. Scepticismum hodie ubivis terrarum invalescentem eversuri me-

methodo ista philosophari coepimus, qua *Euclides* in suis Elementis olim usus. Cumque in philosophia notiones confusae resolvendae sint in distinctas, quas sine detrimento veritatis fert Mathesis; ipsas etiam demonstrationes geometricas ad eam formam reduximus, quam extra eandem habere debent, ne quid desit evidentiae, ut adeo superflua existimanda non sint, quae finis tam praeclari gratia fiunt. Nec puerilia censenda sunt, quorum neglectus se vindicat in viris summis. Absit itaque ut eorum autoritate ad eundem defendendum abutaris.

§. 103. Modus, quo definitiones ac propositiones expendere docuimus omnem facultatum usum legitimum in veritate cognoscenda pollicetur ipso opere consequendum. Quodsi vero ad repraesentationem symbolicam animum advertere & regulas generales inde abstrahere volueris, verioris Logicae praecepta consequeris, quae in Logica nostra demonstravimus. Atque adeo reipsa experieris, Logicam artificialem tum demum esse genuinam, ubi praxi veterum Geometrarum conformis, quemadmodum in Prolegomenis Logicae ostendimus (§. 26 *Log.*). Qui sic praeparatus ad Logicae studium accedit, non modo omnia, quae hic docemus, penitus intelliget; verum etiam regulas ibidem traditas absque ulla haesitatione dextre applicabit, ut nec in iis applicandis sibimet ipsi imponat, quemadmodum haud raro contingit, nec de difficultate applicandi queratur. Ubi studium Matheseos praescripto a nobis more instituerit, in studio Logicae, quod spinosum alias ac taedii plenum videtur, non sine voluptate versabitur, nec Logicam soli scholae addisci in seipso experietur. Etenim ideas, quae regulis logicis lucem affundunt, tot exemplis confirmatas recta Mathematum tractatione adeo familiares possidet, ut, quoties iisdem opus est, sua veluti sponte sese sistant animo praesentes, ipsaque mathematum tractatio in continua regularum istarum applicatione cum consistat, quin continuo hoc exercitio eas applicandi habitum sit consecutus, dubitari nequit. Voluptate perfunditur animus, dum veritatis plenarie convincitur. Quamobrem cum veritatis eorum, quae in Logica do-

docentur, convincatur, qui Matheseos studio nostro more præparatus ad studium Logicæ accedit, quin continua in eodem fruatur voluptate dubitandum non est. Docet Logica usum facultatum cognoscendi in veritate cognoscenda & applicanda. Quoniam itaque usum istum facere potest, qui nostro more in Mathesi fuit versatus, usus autem idem requiritur in singulis omnino actionibus recte determinandis, prouti abunde constabit, si quis attenta mente Tomum posteriorem Philosophiæ practicæ universalis perlustrare voluerit; utilitatem Logicæ per omnem vitam experietur, qui regulas ejus penitus intelligit & dextræ applicare didicit.

§. 104. Quoniam ea demum Logica censetur genuina, quæ praxi veterum Geometrarum conformis (§. 26. *Log.*), utrum vero huic conformis sit, nec ne, dijudicare valet, qui in Mathesi præscripto a nobis modo fuit versatus (§. 103.); nostra Matheseos quoque tractatio hunc pollicetur fructum, ut Logicam genuinam a spuriis discernamus, quales nostra ætate eduntur haud paucæ, & quæ naturali facultatum animæ usui e diametro adversantur, ita ut studium Logicæ non amplius faciat ad dirigendum facultatem cognoscitivam in cognoscenda veritate, sed intellectum potius corrumpat, ut a solida cognitione veritatis proscribaris. Neque verendum est, ne autoritas Mathematici, Logicæ non unius scriptoris, ipsi imponat: satis enim intelligit, vulgari Mathemata discendi more (§. 64.) non patefieri regulas logicas, quas nostra resolutio & analytica expressio in apricum producit. Non igitur sufficit Logicam scribi ab eo, qui Mathematicus audit, vel Geometriæ quædam elementa methodo minus accurata compilavit; sed necesse est, ut, qui Logicam scribit, in expendendis definitionibus ac propositionibus earumque demonstrationibus eum faciat facultatum usum, quem regulæ Logicæ urgent, & ut hasce ipsas regulas praxi huic conformes tradat. Vidimus paulo ante (§. 101.) deficere hic acumen Mathematicorum summorum, ut adeo mirum videri non debeat, si acumen illorum desideretur, qui

in illorum numerum referri nequeunt.

§. 105. Quoniam ad studium logicum accedere non debet, nisi qui in studio Matheseos secundum morem nostrum versatus est; ideo in Logica exempla mathematica dedimus, quippe quæ satis cognita atque perspecta supponimus, nisi ubi exempla vulgaria satisfaciunt. Accedit, quod nonnulla in Logica tradantur, quæ aliis, quam mathematicis exemplis, non eadem perspicuitate illustrantur. Bene sibi consulunt, qui saltem Arithmeticæ ac Geometriæ elementa præscripto a nobis modo perlustrant, antequam ad Logicam animum appellunt. Reipsa experientur, quod ex studio logico omnem percepturi sint fructum, qui ab eo sperari potest. Quodsi vero neglecta Mathesi ad Logicam properant, multa in iis non penitus intelligent, etsi omnia rite percepisse videantur, nec absoluto studio logico in potestate sua positum deprehendent, ut regulis Logicæ satisfaciant, hoc est, eum faciant facultatum usum, quam Logica præscribit.

§. 106. Maxima intellectus perfectio est ars inveniendi, qua ex iis, quæ cognovimus, alia nobis incognita ratiocinando colligimus. Qui eo usque in perficiendo intellectu progredi voluerint, illi tenenda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. 66. *& seqq.*). Quodsi enim vel sola Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ eo modo pertractaveris, qui ibidem præscribitur; non modo constabit, quomodo in veritate invenienda sit procedendum, verum etiam habitum quendam tibi comparabis ex cognitis alia incognita colligendi, consequenter aliquid saltem hujus artis acquires. Quemadmodum vero intellectus continuo magis magisque perficitur quoad promptum usum in veritate cognoscenda, si simili modo philosophiam nostram pertractare volueris, quo in acquirendo gradu secundo cognitionis mathematicæ utendum esse docuimus; ita quoque quoad artem inveniendi eundem ulterius perficies, si in philosophia facias, quæ tertii cognitionis gradus acquirendi gratia fieri debere præcepimus. Quodsi cui hoc nimis molestum videtur; is sciat velim,

lim, quæ ardua sunt, ea non facili opera acquiri. Qui vult finem, media velit necesse est, quæ ad eundem ducunt.

§. 107. Satis itaque docuimus, quomodo instituendum sit studium Matheseos, ut intellectus, quantum datur, perficiatur. Unicum adhuc superest, de quo nonnulla mihi dicenda sunt, antequam ad alia progrediar. Sunt qui sibi aliisque persuadere conantur, quasi methodus mathematica philosophiæ minus conveniat, multo autem adhuc minus in Theologia, Jurisprudentia & Medicina eidem locus sit. Equidem hoc dubium jam sustulimus in Discursu præliminari, quem Logicæ præmisimus, de Philosophia in genere, ubi (§. 139.) identitatem methodi philosophicæ ac mathematicæ demonstravimus, & in Horis nostris subsecivis ostendimus, quod & quomodo methodus mathematica adhiberi possit in Jurisprudentia & scriptura sacra interpretanda; ex nostra tamen definitionum & demonstrationum propositionum analysi singulari ratione idem elucet. Etenim per hanc manifestum est, omnem methodum mathematicam, qua usus est *Euclides*, huc tandem redire, ut operationum intellectus legitimum faciamus usum in veritate cognoscenda, qui ad evidentiam acquiritur, qua veritas indubitato agnoscitur. Hinc manifestum est, non alias homini esse facultates, quibus in cognoscendis mathematis utitur, quam quibus opus habet ad cognoscendam veritatem quamcunque aliam, nec alium esse facultatum earundem usum in Mathesi addiscenda, vel etiam in veritatibus mathematicis inveniendis, quam qui requiritur ad certam cognitionem veritatis cujuscunque alterius, sive ab aliis inventa fuerit, sive demum nostra opera detegenda. Mathesis adeo exemplis docet, quomodo rectus facultatum cognoscendi usus fieri debeat, si ad liquidam veritatis cognitionem pervenire decreveris: id quod regulis docet Logica, quæ ideo ab exemplis mathematicis abstrahi possunt (§. 103.), ita ut earundem cum praxi Mathematicorum conformitas sit lapis Lydius genuinæ Logicæ (§. 26. Log.). Quotquot igitur in ea sunt opinione, quasi Mathesis

pro-

propriam sibi habeat methodum, quæ extra eam nullius sit usus, aut methodi mathematicæ vim ac potestatem, aut genuinum facultatum cognoscendi ad certam veritatis cognitionem consequendam usum, aut utrumque ignorant. Hinc etiam videas, objectionem moveri ab iis, qui vel sunt in omni Mathesi hospites ac peregrini, vel legitimi usus facultatum cognoscendi prorsus ignari

§. 108. Denique nostra Mathematum tractatio manifesto loquitur, eum, qui in Mathesi addiscenda præscriptum a nobis morem observat, sequi modum cogitandi maxime naturalem. Primus hoc animadverti, cum ad demonstrationum analysin præscripto a nobis modo factam animum attenderem, & publice hoc monui in Lexico mathematico, idemque postea uberius docui in Psychologia. Naturalis cogitandi modus est, qui leges animæ exacte sequitur. Quis igitur adeo vesanus est, ut sibi persuadeat, usum facultatum aliis legibus accommodandum esse in philosophia, Theogia, Jurisprudentia, Medicina, quam quas fert natura animæ?

§. 109. Etsi autem Mathesis universa faciat ad intellectum perficiendum, si eo, quem præscripsimus, modo tractetur, ut adeo optime sibi consulat, qui Elementa nostra omnia eodem studio perlustrat; quoniam tamen non omnibus tantum suppetit temporis spatium, quantum huic labori sufficit, unusquisque eo usque progredi poterit, quantum conceditur. Arithmeticæ autem & Geometriæ pertractatio prorsus indispensabilis est, quæ ideo præmittenda, antequam ad Logicam animum appellis, & hinc ad reliquam philosophiam te conferas. Immo si cui volupe fuerit integra Matheseos nostræ Elementa perlustrare, ei tamen non suaserim, ut de philosophia omnem cogitationem abjiciat, donec studium Matheseos omne fuerit absolutum; sed potius autor sum, ut Arithmetica & Geometria absoluta statim Logicæ operam suam addicet, & in Mathesi juxta Philosophiam pergat. Ita enim futurum certus sum, ut studium Matheseos ac Philosophiæ sibi mutuo lucem affundant.

§. 110. Supponimus autem Philosophiam eadem methodo esse

esse conscriptam, qua in Elementis Matheseos utimur. Quamobrem cum id ante nos fecerit nemo, nec alia ipsi scripta philosophica commendare valemus, nisi opera nostra philosophica Latino inprimis idiomate conscripta. Quodsi prolixitatem obtendas, nulla sane ratio est, cur ea te deterreat. Etenim si non ante ulterius progredi volueris, quam singula rite intellexeris, ac veritatis eorum convictus fueris, multo minore temporis spatio scripta nostra utiliter pelegere potueris, quam breve quoddam compendium communi more conscriptum, modo in pertractanda Arithmetica & Geometria industriam tuam desiderari passus non fueris. Immo valde vereor, ne si praescripto a nobis more in Arithmetica & Geometria fueris versatus, lectio aliorum scriptorum philosophicorum, quam nostrorum te efficiat studii philosophici desertorem, aut in scepticismum deducat. Absit, ut quis existimet haec arroganter a nobis dicta esse, nimia in nos fiducia, in contemtum aliorum! Veritati enim unice litamus, non loquentes nisi experta, quae ratio defendit. Ab aliorum contemtu procul remoti aliena merita suspicimus & extollimus, neminem in scriptis nostris nominatim perstringimus, iis etiam parcimus, qui in lacessenda fama nostra quidvis sibi licere arbitrantur, probe memores eam non dependere a laudibus aliorum, sed a factis propriis, omni animi contentione omnique industria ac diligentia in id enitentes, ut calumnias factis contrariis refellamus. Alienum a nobis esse existimamus, ut doctrinis, quas profitemur, facta sint contraria. Nemo igitur nobis vitio vertet, si aliorum utilitati velificaturi ea dicimus, quae veritas imperat, citra injuriam alterius. Minus toleranda potius ambitio est, si quis non sine detrimento aliorum veritatem reticeri vult, ut videatur qui non est. Ceterum si quis consilio nostro aurem benignam dare voluerit, re ipsa experietur vera omnino esse, quae dicimus.

# CAPUT. III.

## De Studio Arithmeticæ, Geometriæ & Trigonometriæ planæ in ſpecie.

§. 111.

Arithmeticæ, Geometriæ & Trigonometriæ planæ noſtra Elementa ita conſcripſimus, ut ſatisfaciant omnibus, quocunque fine ad Arithmeticam & Geometriam addiſcendam appellunt. Ea enim ita digeſſimus, ut nullo negotio prætermittantur, quæ ſalvo fine, quem quis ſibi præfixum habet, ignorare poteſt, & ea iisdem inſeruimus, quæ niſi eo excidere voluerit, ignorare nequit.

§. 112. Qui Arithmeticam addiſcit, vel ſoli praxi ſtudet, theoriam non curat, vel hujus etiam rationem habet. Qui ſoli praxi operam navat, is vel ſolum ejus uſum in vita communi, vel uſum etiam in Geometria practica aliisque Matheſeos mixtæ partibus intendit. Idem præterea vel in nuda praxi acquieſcere, vult, vel veritatem quoque praxeos perſpicere avet. Cui theoria curæ cordique eſt, is eandem vel propter uſum in ceteris Matheſeos partibus, vel propter uſum in perficiendo intellectu appetit. Videamus igitur, quomodo Elementa noſtra Arithmeticæ pro multiplici hoc diſcentium ſcopo ſatisfaciant.

§. 113. Qui ſoli praxi operam navant & quidem in uſum vitæ communis; iis ſatisfaciunt problemata de Algorithmo in numeris integris & fractis, quæ capite ſecundo & quarto continentur una cum problemate 33, quod capite ſexto legitur, de numero tertio vel quarto proportionali inveniendo, una cum ſcholiis, in quibus idem problema ad varios caſus in vita communi obvios applicatur. Qui vero uſum etiam in Geometria

practica aliisque Matheſeos mixtæ partibus intendunt, illi ſuperaddere debent problemata de extractione quadratæ ac cubicæ radicis, quæ capite quinto leguntur, problemata de logarithmis, fractionibus decimalibus & fractionibus ſexageſimalibus, quæ capite octavo, nono & decimo extant. Fractiones ſexageſimales omittere poſſunt, qui calculi aſtronomici nullam habent rationem. Immo eodem carere poſſunt, qui ultra ea non progrediuntur, quæ in noſtris Aſtronomiæ & Chronologiæ Elementis traduntur.

§. 114. Problemata a definitionibus & theorematis ſatis aperte diſtinguntur, ſuoque nomine inſignita numerantur, ut adeo nullo labore opus ſit ad ea evolvenda & agnoſcenda. Ut adeo uſus quidam hinc eluceſcat, cur in Matheſi veritates ſingulæ ſuis nominibus compellentur ac numerentur, etiamſi in citationibus ad paragraphum provocemus, in quo principium iſtud continetur, quo in demonſtrando utimur.

§. 115. Quoniam in propoſitione, itemque in reſolutione occurrere ſolent termini, quibus nondum intellectis nec propoſitio, nec reſolutio intelligi poteſt; igitur neceſſe eſt, ut iſtorum terminorum definitiones ante expendat, quam ad problema accedat, qui praxin in eodem traditam diſcere ſtudet. Ita ex. gr. problema ſecundum (§. 96. *Arithm.*) docet numeros quotcunque datos addere. Supponitur adeo definitio additionis, quæ traditur in anterioribus (§. 61. *Arithm.*). Quia vero nec definitiones intelliguntur, niſi intellectis terminis, qui eas ingrediuntur; ſi qui termini per notiones claras, ſed confuſas communes non ſatis perſpicui ſunt, ad definitiones eorum, quas in antecedentibus damus, recurrendum. Ita in definitione additionis mentio fit numerorum homogeneorum. Quinam numeri ſint homogenei, ex communi ſermone notum non eſt. Quamobrem neceſſe eſt, ut ad definitionem numerorum inter ſe homogeneorum recurras, quam in anterioribus exhibemus (§. 35. *Arithm.*). Quomodo autem hæ definitiones ſint expendendæ, patet ex iis, quæ de primo cognitionis

gradu acquirendo quoad definitiones præcepimus.

§. 116. Problematum resolutiones statim applicandæ sunt ad exempla, quemadmodum in ipso textu a nobis factum. Nimirum regulæ, quibus præcipiuntur, quæ fieri debent, suis numeris distinguuntur, ut singulis statim satisfieri possit. Collocantur eo ordine, quo singula fieri debent, ut lecta regula una statim fiat quod eadem præcipitur. Nihil adeo applicatio ad exempla habet difficultatis, ita ut totam Arithmeticam practicam proprio Marte addiscere possis, nisi fueris valde impatiens, aut, si duce alterius unam operationem arithmeticam didicisti, ceteras deinde absque ullo duce tibi familiares reddere queas.

§. 117. Si quis veritatem resolutionis problematum perspicere voluerit, necesse est demonstrationes addat. Citationes in iisdem adductæ ostendunt principia, quibus opus habet. Neque opus est, ut theoremata, quæ capite primo proponuntur, demonstret; sed sufficit ea sumi tanquam per notiones communes nota absque demonstrationibus. Similiter sufficit, ut ex capite 3 nonnisi definitionem rationis, nominis rationis, rationum identitatis & proportionis in genere, ejusque specierum proportionis continuæ atque discretæ (§. 126. 136. 149. 155. 156.) sibi cognitam ac perspectam reddat una cum theoremate 20 & 21, quorum demonstrationes omittere potest, in illustratione per exempla facta acquiescens. Problema 36. de modo inveniendi logarithmum prætermittere potest, immo totam de Logarithmis doctrinam tamdiu differre, donec absoluta Geometria ad Trigonometriam accedere voluerit.

§. 118. Quodsi vero theoriam expetit, sive propter usum in ceteris Matheseos partibus, sive intellectus perficiendi gratia, tota omnino elementa pertractanda sunt eo modo, quem in capite primo pro acquirendo gradu cognitionis secundo præscripsimus, ut adeo nihil supersit, quod hic veniat addendum.

§. 119. Quamvis ostenderimus

rimus, quid faciendum sit, si quis nudæ praxi operam navat, nulla prorsus habita ratione theoriæ, hujus tamen neglectum nemini suademus, quin potius consultum ducimus, ut Arithmetica etiam practica in usum vitæ communis non sine demonstrationibus addiscatur. Ut enim alios taceam usus, non modo tota Arithmetica practica facilius addiscitur, verum etiam memoriæ multo firmius infigitur non sine temporis compendio, & ubi quorundam oblitus est, absque multa difficultate in memoriam revocantur: id quod inprimis usui est, ubi arithmeticis operationibus non quotidie habueris opus.

§. 120. Ceterum hinc liquet, quod absque ullo negotio ex Elementis nostris Arithmeticæ exscribi possit Compendium Arithmeticæ practicæ in usum illorum, qui solam Arithmeticam practicam propter usum in vita communi expetunt levi sumtu ab iis comparandum, qui eodem opus habent. Quodsi plura desiderentur exempla, ea cumulare difficile non est. Etenim non alia re opus est, quam ut in locum numerorum, quos exemplum sistit, substituantur quicunque alii. Quodsi demonstrationes non negligantur, quemadmodum ne id fiat modo suasimus (§. 119.); paucis exemplis obtinetur, quod non sine multis consequi datur, ubi theoriam omnem abjicere volueris.

§. 121. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, ii memores esse debent ejus, quod in scholio definitionis primæ (§. 2. *Arithm.*) monuimus, scilicet quod ab Arithmetica practica tanquam methodo inveniendi speciali regulæ inveniendi generales abstrahere liceat. Cumque in scholio generali ad Algorithmum numerorum integrorum (§. 125. *Aithm.*) istiusmodi regulas abstraxerimus, ut exemplo quodam præiremus, & in genesi numerorum quadratorum & cubicorum (§. 262. 266. 277. 280. *Arithm.*), nec non in theoria numerorum æquidifferentium (§. 327. 329. *Arithm.*) artificia quædam analytica docuerimus; ad hæc inprimis animum advertere debent, qui non modo in Arithmeticis,

artem inveniendi, ſed eam etiam generalem curæ cordique habent. Si prolixioribus eſſe liceret, addi poterant multa ſpecialia, de quibus alibi commodius dicetur, ubi nimirum Artem inveniendi ea methodo tradituri ſumus, qua huc usque Logicam & Methaphyſicam univerſam una cum Philoſophia practica univerſali tradidimus. Ita ex. gr. quæ (§. 142. *& ſeqq. Arithm.*) de generibus & ſpeciebus rationum rationalium docentur, inſinuant modum ex dato genere inveniendi genera inferiora eorundemque ſpecies: quo etiam Dignitatum Quantitatum diviſio facit (§. 252. *Arithm.*). Huc etiam pertinent fictiones, quarum exemplum habemus in fractionibus ſpuriis (§. 221. 222. *Arithm.*).

§. 122. Qui Geometriæ ſtudio ſeſe dedunt, ſimiliter aut ſoli praxi ſtudent, theoriæ nullam prorſus rationem habentes, veluti agrimenſores & architecti militares, aut in praxi nuda acquieſcere nolunt, ſed ejus demonſtrationes expetunt. Qui vero theoriæ addiſcendæ ſeſe dedunt, aut uſum in ceteris Matheſeos partibus intendunt, aut hoc faciunt intellectus perficiendi cauſa.

§. 123. Quibus in nuda praxi acquieſcere viſum eſt, iis ſatisfaciunt definitiones & problemata, omiſſis demonſtrationibus. Nullum eſt problema, quod uſui eſſe non poſſit, adeoque prætermittendum ſit: ſed definitiones quædam omitti poſſunt, veluti figuræ in genere, lateris, tangentis, ſecantis, &c. Sufficit enim didiciſſe definitiones angulorum & figurarum, atque lineæ perpendicularis & linearum parallelarum. Ceterorum notiones confuſæ ipſo uſu terminorum in caſu dato inſinuabuntur, quæ praxi ſoli intentis ſatisfaciunt.

§. 124. Quænam obſervanda ſint circa definitiones & problemata eorundemque reſolutiones, ex iis intelliguntur, quæ de acquirendo gradu primo cognitionis in anterioribus præcepimus (§. 5. *& ſeqq.*), niſi quod definitiones ſequentes non opus ſit reſolvi in antecedentes, quia ſufficit eas referri ad ſchemata oculis ſubjecta, cum non requiratur adæquata entium geometricorum notio, ſed vel in confuſa

fusa eorundem notione acquiescere possit.

§. 125. Praxis duplex est: alia, quæ exercetur in charta; alia, quæ in campo. Qui praxi unice se dat, eam exercere intendit. Non igitur sufficit resolutiones problematum intelligere; verum etiam requiritur, ut facias, quæ fieri jubentur. Ad praxin igitur in charta exercendam ad manus esse debet circinus, regula, instrumentum transportatorium, norma & parallelismus, una cum triangulo ex ligno ebenino & scala modica; ad eandem vero in campo exercendam baculi cum catena vel fune cannabino in pedes & decempedas illorumque digitos legitime diviso una cum instrumentis ceteris, quorum usus explicatur.

§. 126. Juxta resolutionem problematis uniuscujusque instituenda est operatio, sive in charta, sive in campo, ut videas, num ea facere possis, quæ jubentur. Quorum vero problematum resolutiones arithmeticæ sunt, adeoque calculo absolvuntur; eæ tentandæ sunt in exemplis non modo iis, quæ ipsimet in medium attulimus, verum etiam aliis, qualia comminisci haud difficile, ubi in locum numerorum datorum surrogantur alii pro arbitrio nostro. Quemadmodum enim consultum est, ut una eademque operatio sive in charta, sive in campo aliquoties repetatur, donec exacte facere possis quod jubetur; ita etiam exempla cumulanda. Hoc nimirum non tantummodo facit, ut resolutionem problematis uniuscujusque rite intelligas, eandemque memoriæ firmius infigas; sed & ut habitum exacte faciendi, quod faciendum erat, acquiras. Qui enim praxin exercere vult, non modo intelligere debet, quid fieri debeat, sed & ut omni exactitudine id facere possit requiritur. Habitus docendo communicari nequit, sed crebro exercitio, seu idem sæpius faciendo acquiritur. Qui adeo docet, officio suo satisfecit, si ea tradit, quæ, ut recte facias quod faciendum, nosse debes.

§. 127. Quoniam multa dantur problemata geometrica, quorum resolutiones per calculum expediuntur; geometria practica

practica arithmeticam practicam supponit. Illam igitur si addiscere volueris, hanc ante addiscas necesse est.

§. 128. Ex nostris adeo Elementis Geometriæ absque ullo negotio Geometria practica extrahi poterat, ne verbo quidem immutato: cui quod utiliter addatur compendium Arithmeticæ practicæ ex Elementis Arithmeticæ exscribendum (§. 120), nemo est, qui non videt (§. 127.).

§. 129. Enimvero etsi praxis absque theoria commode addisci possit, & Elementa nostra ita conscripta sint, ut brevissima ad eandem via ducant absque ulla theoria; meo tamen, si quid valet, consilio omnes agrimensores & Architecti militares, & si qui alii praxin geometricam exercere voluerint, tantum theoriæ sibi acquirere deberent, quantum ad praxin demonstrandam sufficit. Quemadmodum enim theoria accurata praxin accuratam parit; ita etiam probe intellecta exercitium praxeos reddit exactum. Immo succurrunt subinde in praxi casus non nulli, in quibus hæret ac facile aberrat, qui theoria instructus non est. Non opus esse videtur, ut hoc multis rationibus adstruatur; qui enim consilio nostro aurem benignam præbere voluerit, veritatem dicti reipsa experietur. Nemo non novit, si plures agrimensores aream ejusdem campi investigent; haud raro magnum esse dissensum in quantitate ejus definienda, certo indicio, quod non eadem accuratione singuli fuerint usi, etsi omnem diligentiam adhibuisse sibi videantur. Diligentia oculata esse debet, quæ ab accuratione nulla in re deficit. Ut hæc oculata sit, theoriæ debetur.

§. 130. Equidem non diffitemur, theoriam adeo exactam non requiri in iis, qui Geometriam practicam exercent, qualem nos intellectus perficiendi gratia condidimus, unde & in Elementis nostris Germanicis ab ea abstinuimus eandemque in compendium contraximus: quodsi tamen visum fuerit omnem retinere theoriam, quam dedimus, ea multiplici utilitate sese commendabit etiam praxin exercentibus. Per eam enim obtinebis, ut nulla in re patiaris deside-

desiderari attentionem tuam & vel in minimis te præbeas circumspectum. Taceo, quod omnibus usui sit, si facultatum cognoscendi legitimum usum facere queant, & ipsa obligatione naturali nemo negligere teneatur occasionem, qua eundem in potestatem suam redigere valet.

§. 131. Neque est quod excipias agrimensoribus & architectis militaribus aliisque praxin geometricam exercentibus non convenire theoriam, sed eam captum ipsorum transcendere, immo ipsos eandem naturali quadam aversione fastidire: hoc enim quam sit a veritate alienum, & experientia me docuit, & ratio convicit. Si qui theoriam contemnunt, non alia de causa hoc faciunt, quam quod eam non didicerint, nec ignoti ulla sit cupido, & quod eadem in praxi sua carere posse sibi videantur. Aliter vero sentirent, ubi mature theoria eorundem animis instillaretur. Quod vero eam capere nequeant, si rite eandem doceantur, adeo verum non est, ut experimento contrario refellatur. Ne difficultatem præter necessitatem facessas, doce ipsos primum praxin solam, sed ea methodo, ut distincte concipiant singula, quæ fieri debent, quemadmodum nos urgemus: ita enim futurum, ut notionibus distinctis adsueti, quid inter has atque confusas intersit facile internoscant. Adde demonstrationes, quas diximus, mechanicas, ut veritatem eorum, quæ docentur, experiantur: quam ubi percepisse sibi videntur, eosdem mone experimenta hæc loqui nonnisi veritatem in casu singulari, nec reiterata eandem prodere in universali. Neque difficile est convincere quemvis a posteriori, quod a particulari ad universale non valeat argumentatio, cum ubivis prostent exempla, quibus idem doceri potest. Cum hoc modo excitaveris cupidinem sciendi, quod scire delectet; commodum jam erit ad theoriam progredi. Et ubi quis in cognitionis gradu primo acquirendo nostro more versatus fuerit, ad secundum consequendum præparatus accedit, in quo si denuo morem a nobis præscriptum sequaris, absque ulla

ulla moleſtia in theoria addiſcenda progredi dabitur.

§. 132. Qui theoriæ operam navant, propter uſum in diſciplinis ceteris mathematicis; illi non modo omnes propoſitiones ſibi familiares reddere, verum etiam habitum demonſtrandi comparare tenentur. Quamobrem univerſa Elementa Geometriæ eo modo pertractare debent, quem acquirendi ſecundi & tertii cognitionis gradus cauſa capite primo præſcripſimus, & definitiones ac propoſitiones pure enunciatas memoriæ firmiter infigere tenentur: quo plurimum confert accurata demonſtrationum analyſis, in quibus definitiones & propoſitiones pure enunciatæ tanquam principia adhibentur. Hoc enim pacto demonſtrationum ſequentium evolutio repetitionis vicem ſuſtinet, qua definitiones ac propoſitiones pure enunciatæ memoriæ mandantur & diſcenti familiares evadunt, quales ſupponuntur ad ceteras Matheſeos partes abſque difficultate pertractandas.

§. 133. Quod problemata attinet, quæ praxin continent, notandum eſt, praxin in charta exercendam uſui eſſe in ceteris Matheſeos partibus; quæ vero exercetur in campo, ea nullum habere in reliquis uſum, niſi in Architectura militari & in Aſtronomia atque Geographia nonnulla ex iis cognita atque perſpecta ſupponi. Praxis accurata in charta magis ornat Mathematicum, quam neceſſaria eſt, ſi in ſola theoria acquieſcere voluerit. Neque is multo inſtrumentorum apparatu indiget; ſed ſufficit regula cum circino & graphio, cujus tamen vicem ſupplet penna ex corvorum alis evulſa (§. 123. *Geom.*) Problemata, quæ praxin in campo docent, non tamen prorſus negligenda. Eorum enim theoretica cognitio diſcentem præparat ad ceteras Matheſeos partes facilius addiſcendas. Neceſſe igitur eſt, ut reſolutionem diſtincte concipiat & demonſtrationem noſtro more reſolvat ac analytice exprimat, omni cura ac ſollicitudine animi obſervans, quæ de iis ſecundi cognitionis gradus acquirendi gratia præcepimus, qui theoreticam Matheſeos univerſæ cognitionem curæ cordique habet.

§. 134. Eadem tenenda sunt, si quis intellectus perficiendi gratia Geometriæ studet, sive tantummodo ad secundum cognitionis gradum, sive simul ad tertium extra Mathesin adspiret. Utilitatem percipiet, qui in Philosophia morali & civili accurata diligentia versari eandemque ad usum vitæ transferre & theoriam physicam ad artes perficiendas applicare voluerit.

§. 135. Qui a Geometria & Trigonometria ad Algebram progredi voluerit, is cognitionis gradum tertium in Mathesi intendit. Quamobrem ea ipsi observanda sunt, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus capite primo. Inprimis autem animum attendere debet ad præparationem, quæ demonstrationi præmittitur, cum ea opus quoque habeat in resolutione problematum geometricorum in Algebra & in solutionibus præsertim algebraicis problematum in ceteris Matheseos partibus.

§. 136. Elementa Arithmeticæ & Geometriæ per Mathesin universam & in omni cognitione mathematica, quam philosophicæ contra distinguimus (§. 14. *Disc. prælim.*), apprime necessaria sunt, ita ut eorum notitia nemo carere possit, qui in ceteris Matheseos partibus ad cognitionis gradum secundum atque tertium adspirat. Quo majore igitur studio ac industria in illis fuerit versatus, eo felicius in reliqua Mathesi progredietur. Id etiam obtinebit, quod hodie in plerisque Mathematicis & in seipso desideravit Vir summus *Newtonus* (§. 101.), ut methodum Geometrarum veterum cum algebraica recentiorum conjungat & utriusque compos reddatur: cujus insignem experietur usum, si ad summa quævis in Mathesi contendat & exemplo *Newtoni* naturam mathematice tractare voluerit, inprimis si quando volupe fuerit mathematicam rerum naturalium cognitionem in systema redigere, quantum fert ætas nostra, præsertim ubi ante officio suo satisfecerint Philosophi.

§. 137. Trigonometria plana non minus, quam Sphærica primum in usum Astronomiæ fuit inventa. Quamobrem indispensabilis usus est in Astronomia, adeoque eam negligere

nequit, qui nobilissimæ huic scientiæ operam dare decrevit. Postea quoque ad praxin geometricam in campo fuit applicata, quemadmodum capite ultimo Trigonometriæ planæ ostendimus. Quamobrem eidem quoque studere tenentur, qui praxin geometricam in campo exercere voluerint. Applicata eadem fuit ad varia problemata in Geographia, Hydrographia, Gnomonica, Mechanica, Architectura militari & Opticis disciplinis: ut adeo commendanda veniat ad hasce quoque Matheseos partes animum appellentibus. Multo igitur illustrior est ejus usus, quam qui olim fuerat.

§. 138. Qui in sola praxi acquiescunt, iis satisfaciunt perpauca ista problemata, quæ capite secundo continentur, addituri ea, quæ continentur tertio, ubi Geometriam practicam curæ cordique habent. Hoc unicum notandum est, quod usum Canonis sinuum & tangentium una cum Canone Logarithmorum tam sinuum atque tangentium sibi familiarem reddere teneantur, qui in usum praxeos Trigonometriam planam addiscunt, additis problematis, quibus in Arithmetica usus Logarithmorum docetur (§. 349. *& seqq. Arithm.*), una cum definitione Logarithmorum & theorematis eorum naturam explicantibus (§. 334. *& seqq. Arithm.*); sed absque demonstratione.

§. 139. Exempla, quibus calculum trigonometricum illustravimus, adeo distincte repræsentavimus, ut ideam exemplarem resolutionis problematum animo insinuent, & resolutionis vicem tueri possint. Quamobrem ii, quos sola praxis juvat, eandem sibi familiarem reddere tenentur: id quod uno alteroque exemplo facile obtinetur. Exempla autem complura facile comminiscitur, qui numeris in exemplo proposito datis substituit pro arbitrio alios. Inprimis etiam suademus omnibus, quotquot praxin geometricam in campo exercere voluerint, ut exempla proprio Marte addant problematis, quæ hunc in usum traduntur capite tertio. Reperiuntur autem ad imitationem eorum, quæ dedimus capite secundo. Nimirum non alia re opus est, quam ut

data

data numeris exprimantur: id quod nihil difficultatis habet, præſertim cum in expendendis problematis data a quæſitis ſemper veniant diſtinguenda (§.26). Quodſi hoc feceris, calculus erit idem, qui in problematis citatis: quæ etiam ratio eſt, cur eundem in textu non appoſuerimus, ne præter neceſſitatem eſſemus prolixiores.

§. 140. Qui praxin oculatam deſiderant, vel theoriæ tantummodo rationem habent; illos demonſtrationes ſuperaddere & in Trigonometria eodem modo verſari debere, quem pro ſecundo & primo cognitionis gradu acquirendo ſupra præſcripſimus, me vel tacente intelligitur. Nihil adeo prætermittere tenentur, quæ in Elementis noſtris continentur. Et quamvis Canon ſinuum atque tangentium cum naturalis, tum artificialis jam fuerit conſtructus, ut nullus amplius problematum, quæ in capite primo in hunc finem traduntur, videatur uſus; ea tamen negligenda non ſunt, ut appareat, quomodo Canones iſti conſtrui potuerint & quomodo ex theoria praxis, ad quam tendit, deducatur.

§. 141. Inprimis hoc proderit iis, qui ad cognitionis gradum tertium adſpirant. Ex hiſce enim perſpiciunt, quomodo ex cognitis alia incognita ratiocinando colligantur, & quomodo haud raro praxes prorſus inexpectatæ eædemque longe utiliſſimæ ex theoriis deriventur, quarum tantam prævidere non licebat utilitatem. Sane non alia de cauſa, poſtquam Canon ſinuum & tangentium jam fuit conſtructus, Mathematici tamen recentiores alios eosdem conſtruendi excogitarunt modos, quam quibus uſi ſunt illorum conditores. Non alia de cauſa, poſtquam docuimus Canonis ſinuum atque tangentium conſtructionem, adjecimus ſcholion (§. 27. *Trigon.*), in quo monemus, eundem adhuc multis aliis modis conſtrui poſſe laudavimusque *Urſinum*, qui nonnulla præclara dedit, & in Algebra, ubi de ſerierum doctrina agitur, oſtendimus, quomodo pro ſinibus & tangentibus, nec non pro logarithmis reperiantur ſeries infinitæ, ex quibus per approximationem deducuntur numeri, qui ſatisfaciunt.

§. 142. Trigonometria non modo pars quædam Artis inveniendi ſpecialis eſt, cujus uſus in aliis Matheſeos partibus elucet (§. 137.); ſed tota etiam ita digeſta, ut appareat, quomodo ſingula fuerint inventa, modo obſervare volueris, quæ de acquirendo cognitionis gradu tertio præcepimus capite primo. Ab ea igitur regulas generales artis inveniendi non modo abſtrahere licet, verum ſi præſcripto a nobis modo, ad quem hic provocamus, pertractetur, ad ipſam quoque artem inveniendi acquirendam aliquid conferet. Quamobrem ſtudium trigonometricum rite inſtituendum tam iis, qui ad tertium cognitionis gradum in Matheſi adſpirant, quam illis, qui artem inveniendi in genere acquirere volunt, commendandum.

## CAPUT IV.

### De

# Studio Algebræ, ſeu Analyſeos mathematicæ in ſpecie.

§. 143.

Analyſis mathematica eſt ipſa ars inveniendi, qua hodie utuntur Mathematici in veritatibus mathematicis inveſtigandis. Huic adeo operam dare debent, quotquot ad cognitionis gradum tertium in Matheſi adſpirant. Etſi enim demonſtrationum more noſtro facta reſolutio etiam analytica ſit, ut eodem modo ex hypotheſi data inveniri poſſit, quo demonſtrandum, quod demonſtratur; non tamen iis detegendis ſufficit, ad quæ Analyſis recentiorum ducit, tota vulgo Algebræ nomine appellari ſolita. Etenim per Algebram paucis cognitis invenire licet, quæ, ſi more veterum detegenda eſſent, longam rerum inventarum ſeriem ſupponerent. Quid quod facili labore eruantur, quæ Herculeo inveſtiganda eſſent? Hæc ſane ratio eſt, cur inventa Mathema-

thematicorum recentiorum longissimo intervallo post se relinquant inventa veterum & quod uno seculo plura fuerint detecta, quam tot seculis inveniri potuerint, quibus Mathesis antea fuit exculta Sane si *Archimedes* & *Apollonius* nostro ævo reviviscerent, in stuporem raperentur, visis inventis recentiorum, quæ per Algebram fuerunt in apricum producta: neque enim unquam sibi persuasissent, patere ad talia mortalibus aditum.

§. 144. Non tamen omnia per calculos algebraicos erui possunt, quæ ad Geometriam spectant. Patet id ex ipsa Geometria elementari. Etenim quæ ibidem de lineis perpendicularis, de parallelismo linearum, de angulis, de congruentia & similitudine triangulorum aliisque nonnullis demonstrantur, per Algebram investigari nequeunt. Pendent enim hæc a situ linearum, quem ad se invicem habent. Calculus vero algebraicus est calculus magnitudinum, non situs. Unde *Leibnitius* in Analysi recentiori adhuc desiderari monuit calculum situs, a calculo magnitudinum prorsus diversum, quem tamen nec ipse dedit, nec dedit adhuc alius, sed in desideratis numeramus.

§. 145. Similiter analysin veterum, qualem loquitur nostra demonstrationum analysis, non eam esse, qua Algebra inventa carere possimus, haud difficulter ostenditur. Etenim antequam problemata geometrica, vel alia in Mathesi mixta ad Geometriam puram reducta per Algebram solvuntur, reducendæ sunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo supponit præparationem methodo veterum inveniendam, verum etiam ipsamet per eandem methodum eruenda. Accedit subinde occurrere problemata etiam in altioribus, quæ methodo veterum multo brevius & elegantius solvuntur, quam per calculum algebraicum, qui haud raro admodum perplexus & nimis longus est. Accedit, quod absque omni theoria calculo algebraico minime sit locus. Hinc qui problemata physico-mathematica, vel etiam mechanico-physica solvunt, quædam tanquam cognita sumere tenentur. Contingit autem haud raro, ut sumant nondum satis explorata,

vel

vel ſi ea demonſtrare voluerint, quæ certa ſunt & methodo veterum rigide demonſtrari poterant in dubitationem adducant, ut adeo, quæ per calculum ex aſſumtis eruuntur, vel incertitudini obnoxia fiant, vel ſuſpecta reddantur acutioribus, rigori veterum adſuetis. Immo nullum eſt dubium, quin plura irrepſerint a veritate aliena, ita ut inventa recentiorum Mathematicorum reviſione quadam indigerent & haud pauca firmiori fundamento ſuperſtrui mererentur. Nec alia ratio eſt, cur inter recentiores Mathematicos agitentur controverſiæ, quales veteribus erant ignotæ. Optime igitur ſibi conſulunt, qui methodum veterum cum algebraica recentiorum conjungunt. Et merito dolemus cum *Newtono* (§. 101.), quod illa neglecta cito nimis pede ad hanc hodie properent, qui inter Mathematicos eminere volunt.

§. 146. In Analyſi noſtra primo loco occurrit Arithmetica ſpecioſa, quam etiam literalem appellare ſolent. Primo loco agitur de ſignis tam primitivis, quam derivativis. Occurrunt nempe ſigna quantitatum & operationum arithmeticarum, quas vulgo ſpecies Arithmeticæ vocant. Quantitates cum ſint numeri indeterminati (§. 13. *Arithm.*), per determinatos explicabiles ſunt. Quamobrem ſuadendum tyronibus, ut literas, quibus indigitantur quantitates, per plures numeros diverſos explicent. Quoniam vero eædem quantitates etiam ſub ſe comprehendunt quamlibet magnitudinem, igitur non minus conſultum eſt, ut etiam per magnitudines, veluti per lineas explicentur. Linearum enim & magnitudinum quarumvis determinatarum ratio ad aliam homogeneam, quæ pro unitate ſumitur, per numeros determinatos definiri poteſt, cum numeri revera omnes tam rationales, quam irrationales nonniſi ratinonem ad unitatem exprimant. Nimirum quod literis generaliter, hoc eſt, indeterminate deſignatur, per numeros determinate exprimitur, itidemque per magnitudines determinatas, quatenus harum ratio a aliam homogeneam pro unitate aſſumtam numeris, ſive rationalibus, ſive irrationalibus

exprimi

exprimi potest: sit ita, quod hoc variis modis fieri possit pro diversitate ejus, quæ pro unitate sumitur, nec semper hoc præstare valeamus. Qui theoriam entis universalis ab ipsa Mathesi abstrahendam perspectam habet, multo intimius quæ dixi perspiciet, quam qui ab omni philosophia prorsus alienum habet animum.

§. 147. Qui artem inveniendi in genere curæ cordique habent, modo universalia a specialibus abstrahere didicerint, multa animadvertent ad characteristicam universalem spectantia, quam esse partem Artis inveniendi ipsa Arithmetica universalis & calculus differentialis docet, suoque ostendemus loco, si quando ad Artem inveniendi explicandam ordo nos deducet. Ipsa autem Ars Characteristica universalis plurimum lucis affundet tum notationi numerorum in Arithmetica, tum signis, quibus utimur in calculo literali sive communi, sive differentiali. Ceterum hic notandum est, signa primitiva, quæ in alia resolubilia non sunt, respondere notionibus confusis; derivativa vero distinctis: quemadmodum suo loco demonstrabimus. Qui enim novit differentiam, quæ inter notiones distinctas & confusas quoad usum earundem intercedit, quantæ sit utilitatis huc adverti animum facile perspiciet.

§. 148. Ipsum Algorithmum in integris satis perspicue explicavimus. Tyrones sibi eundem familiarem reddent, ubi diversis modis exempla literalia explicaverint per numeros determinatos, si ita visum fuerit, etiam per concretos, quemadmodum ostendimus (§. 28. 30. *Analys.*). Qui in Arte inveniendi generali proficere volunt, iis consultum est, ut ex ipsis hisce exemplis in numeris concretis datis addiscant, quomodo Algorithmus literalis ex notionibus communibus deducatur, per quas primum inventoribus innotuerunt regulæ, quibus in eodem utimur, quamvis idem, utut non eadem facilitate, jam ex Elementis Arithmeticæ ac Geometriæ addisci poterat. Plurimum enim prodest ut noris, omnem tandem cognitionem humanam ex notionibus commu-

nibus fuiſſe deductam in quocunque ſcientiarum genere. Et in Ontologia jam me monuiſſe memini, *Euclidem* Elementa ſua reduxiſſe ad notiones communes, conſequenter per ea omnem Matheſin. Hoc notaſſe etiam uſui erit in Matheſi mixta: demonſtrabitur autem in arte inveniendi generali, aliter fieri hoc minime poſſe.

§. 149. In multiplicatione quoad uſum ſignorum fictiones occurrunt, veluti ſi quantitas ſive poſitiva, ſive negativa per privativam multiplicanda venit (§. 34. 36. *Arithm.*). Unde liquet uſus fictionum ad conſervandam notionum univerſalitatem. Etſi autem regulas in ſubſidium vocata Geometria demonſtravimus, ut ad imaginationem reducantur, quæ vi intellectus concipienda; conſultum tamen eſt, ut tyrones exempla ſtatim in numeris addant, in iis regularum veritatem perſpecturi, vel ipſas etiam regulas ex iisdem deducturi, quemadmodum in Elementis Germanicis feci. Clarius enim in numeris liquet, cur addendum ſit, quod plus fuerat ſubtractum, vel ſubtrahendum, quod plus fuerat additum, ubi conceptibus univerſalibus, utpote nimium abſtractis, nondum fueris adſuetus: id quod initio ſtudii algebraici ſupponi nequit.

§. 150. Algorithmus fractorum literalis cum numeroſo idem eſt, cum quantitates, quæ literis deſignantur, ſint numeri indeterminati, regulæ autem hujus algorithmi ex notione numeri generali fluant, conſequenter ex iis deducantur, quæ numeris determinatis & indeterminatis communia ſunt. Hinc tyrones ſibi conſulunt, ſi literis numeros ſubſtituant determinatos, ut clarius appareat, nihil hic occurrere diverſitatis. Quæ vero problemate 7 & ejus corollariis ac ſcholiis (§. 45. *& ſeqq. Analyſ.*) de ſeriebus infinitis per diviſionem prodeuntibus docentur, initio prætermitti poſſunt ab iis, quorum attentio facile defatigatur, donec multo inferius in doctrina de ſeriebus infinitis iisdem habuerint opus, ubi attentio nihil amplius difficultatis faceſſit, cum multo uſu jam major gradus fuerit acquiſitus.

§. 151. Multiplicatio & diviſio

sio potentiarum & elevatio ad potentiam atque extractio ex radice a Logarithmorum doctrina pendet, quam in Arithmetica tradidimus. Quamobrem nisi hic in tenebris versari volueris, illam ante tibi perspectam reddere debes, quam ad Algorithmum dignitatum accedas. Inprimis autem hic notanda est reductio quantitatum irrationalium ad formam rationalium & unitatis ad x° (§. 57. 55. *Analys.*), quoniam hæc reductio non modo multiplicem, eundemque prorsus eximium & inexpactatum in altioribus habet usum; verum etiam apertissime loquitur, quantum intersit inter characteres primitivos & derivativos: id quod Arti characteristicæ generali, quam partem quandam Artis inveniendi esse supra jam monuimus, notiones foecundas suppeditat.

§. 152. Usus hujus reductionis analyticus in Arithmetica irrationalium conspicitur, præsertim ubi ea, quæ nos de eadem tradimus, cum illis conferre velis, quæ vulgo in eadem docentur, veluti cum calculo irrationalium in Elementis Algebræ *Ozanami*. Sane tractatio nostra tota vere analytica est, qualem requirit Analysis recentiorum mathematica. Et qui ad cognitionis gradum tertium adspirant, hinc discunt, quemnam facere teneantur characterum derivativorum usum, cumque inferius per Algebram eruamus (§. 146. *Analys.*), quæ hic ex charactere derivativo regulis Artis characteristicæ generalis conveniencer deducuntur; hinc porro discere licet, quomodo ex characteribus derivativis modo magis naturali & ad Analysin veterum propius accedente eruantur, ad quæ Algebra via quadam extraordinaria ducit: sit ita quod tyrones, quibus intimius singula perspicere nondum datur, Algebræ magis fidant, quam arti characteristicæ, quemadmodum indigitavi in scholio prolematis 10 (§. 60 *Analys.*). Illustratur quoque doctrina fictionum in Arte inveniendi utilium radicibus imaginariis, de quibus in scholio tertio problematis 13 (§. 71. *Analys.*) diximus. Et perplexa *Euclidis* de irrationalibus doctrina ope hujus characteristicæ ab omni perplexitate liberari eidemque plena lux affundi potest, ut non

amplius habeant, quod de obscuritate illius conquerantur, qui eandem ex Elementis hodie vulgo eliminare solent.

§. 153. Quibus calculus irrationalium sub initium molestus est, ii eundem prætermittant, & statim ad usum calculi literalis in inveniendis theorematis se transferant, absoluto algorithmo integrorum & fractorum, donec multo usu calculum literalem magis familiarem sibi reddiderint, majusque acumen acquisiverint, ejus applicatione & attentione majori uti didicerint. In ipso autem progressu patebit, quandonam calculo irrationalium habeas opus, ut gradum sistere & ad ea, quæ in anterioribus neglecta fuerunt, regredi tenearis.

§. 154. Sola Arithmetica literalis sufficit ad invenienda longe plurima, quæ in Elementis *Euclideis* docentur, ita ut, qui eam didicit, absque ullo negotio eadem facilitate theoremata *Euclidea* reperire possit, qua exemplis illustrantur. Ostendimus hoc capite tertio. Neque in problematis resolvendis, quæ ibidem proponuntur, alia notanda sunt, quam ut attendatur, quomodo datorum denominatio fiat, & ut literis designatæ quantitates numeris quoque exprimantur, quo pateat quid intersit discriminis inter exempla universalia & singularia, & hisce illis lux quædam affundatur, qua indigent tyrones. Observandum tamen, calculum in casu singulari instituendum esse juxta regulas calculi universalis seu literalis, ubi iste pleniori luce fulgere debet. E. gr. in problemate 20 (§. 81. *Analys.*) jubemur determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt. Diximus radicem unam $n$, alteram $n+1$. Dicantur in casu singulari 7 & $7+1=8$. Quodsi quadratum majoris per calculum universalem reperias, erit $7.7+2\,7+1=64$, Quadratum minus $=7.7$, Differentia $2.7+1=14+1=15$. Ita nimirum constabit, calculum universalem etiam exerceri posse in numeris, & sic absque calculo literali eadem detegi posse, quæ per literalem eruuntur, quemadmodum & in Arithmetica fecimus, ubi v. gr. in genesin numerorum quadratorum & cubicorum inquisi-

quiſivimus. Conſultius tamen eſt uti calculo literali, qui hoc commodo gaudet, ut numeri determinati ab indeterminatis ſua ſponte ſeſe diſtinguant: cum ſi notis numericis uti volueris, artificiis demum opus ſit, quibus hoc fiat. Ita in allato exemplo 2. 7 + 1 = 14 + 1, numerus binarius 2 eſt determinatus, idem in omnibus exemplis, ſed 7 eſt indeterminatus, qui in omni exemplo alio alius. Collatio autem calculi literalis cum calculo univerſali in exemplis ſingularibus uſui eſſe poterit ad invenienda artificia, quibus absque ulla confuſione calculus univerſalis in numeris utiliter exercetur. Noſtrum non eſt ea hic docere uberius, quæ Ars inveniendi jure ſuo ſibi vindicat. Etſi autem calculus univerſalis in numeris inſtituendus ſuperfluus videri poterat, literali invento; falluntur tamen, qui ita ſentiunt. Facit enim ad facile demonſtrandum haud pauca in gratiam eorum, qui ad Analyſin animum appellere nolunt, nec difficiles demonſtrationes capiunt, quemadmodum patet per ea, quæ de geneſi numerorum quadratorum & cubicorum in Arithmetica docentur. Neque nullus quoque ejus uſus eſt in Analyſi ſpecioſa, prout ex ſequentibus conſtabit. Taceo alia, quæ in ejus favorem dici poterant.

§. 155. Multa hic facillime absque ullo fere negotio eruimus theoremata, quæ in Elementis *Euclidis* extant eorumque plura erui poterant, niſi hæc ſpecimina ſufficerent. Alia vero inveſtigavimus per Algebram. Enimvero jam ſupra monuimus (§. 144.), per calculum literalem, qui nonniſi magnitudinum calculus eſt, non omnia in Geometria demonſtrari poſſe theoremata, ſed quædam pendere a ſitu, ad quæ inveſtiganda & analytice demonſtranda peculiaris requiratur calculus ſitus. Quodſi Analyſis ſitus fuiſſet reperta, non inconſultum foret integra Elementa *Euclidis* analytice demonſtrari, ut inter methodum veterum & Analyſin recentiorem clarius pateret differentia. Quodſi quis eam inveſtigare voluerit, is novas condere tenetur definitiones ſitus notionem involventes, veluti quod *Punctum* ſit ſitus ſui unicum, quod *Circulus* ſit figura

 plana,

plana, in cujus perimetro ſingula puncta ad punctum quoddam intra eam dato eundem ſitum habent, quod *Linea* una ſit ad alteram *perpendicularis*, ſi punctum quodcunque in ea aſſumtum ſit ſitus ſui ad idem punctum alterius unicum. Dicitur autem *ſitus ſui unicum*, quod ad aliam magnitudinem datam ſeu punctum aliud datum eum habet ſitum, ut nullum aliud præter ipſum eundem ſitum habere poſſit. *Eundem* vero *ſitum* habent, inter quæ idem extenſum, veluti eadem linea, recta poni poteſt (§. 5. *Geom.*). Præterea opus eſt novo calculo, calculo nempe ſitus: quem inveſtigaturus perpendere tenetur, calculum in genere eſſe inventionem characteris derivativi ex aliis ſive primitivis, ſive derivativis per continuam æquivalentium ſubſtitutionem (§. 298. *Pſych. empir.*). Hinc enim conficitur, diverſos determinandos eſſe ſitus poſſibiles eorumque excogitandos characteres & ut hos legitime combinare liceat, requiri axiomata quædam generalia aut, ſi mavis regulas quasdam generales, quibus perficitur combinatio & ſubſtitutio. Sed nobis minime vacat, ut in talibus inveſtigandis ingenii noſtri vires exerceamus, qui magnum adhuc campum emetiri tenemur, antequam Philoſophiam univerſam ad umbilicum perduxerimus. Sufficit aliis monſtraſſe viam, qua ſit ad metam contendendum. Reddat eandem proprio ingenio & propria induſtria perviam, qui hanc attingere voluerit.

§. 156. Quanta vero ſit vis Artis characteriſticæ, non modo ex ſingulis problematis, ſed vigeſimo præſertim nono ejusque corollariis (§. 95. *& ſeqq. Analyſ.*) perſpicitur, in quo binomium ad dignitatem quamcunque evehere docemur, quod deinde ad extractiones radicum (§. 98. *Analyſ.*) & ad infinitinominum ad dignitatem datam evehendum transferimus (§. 102 *Analyſ.*). Huc animum advertere debent non modo, qui in Analyſi recentiorum feliciter progredi voluerint; verum etiam qui eidem Artis generalis inveniendi cauſa operam navant.

§. 157. Quoniam vero non uno artificio analytico utimur in

in problematis istis per calculum literalem solvendis; singulis autem artificiis insint generales notiones, quæ ad Artem inveniendi generalem spectant, eas inde abstrahere tenentur, qui Artis generalis inveniendi gratia in Analysi Mathematicorum versantur: ut vero hoc facere possint, acquirere sibi tenentur acumen pervidendi abstracta in concretis, quod quomodo comparetur docebimus in philosophia morali, ubi praxin virtutum intellectualium, inter quas etiam sibi acumen istud locum vindicat, expositauri sumus. Quodsi vero quis in addiscenda Mathesi eo modo versatus fuerit, quem capite primo præscripsimus, & inprimis in repræsentatione definitionum, propositionum & demonstrationum symbolica industriam suam exercuerit, atque inprimis ad animum probe revocaverit, quæ in scholio generali ad algorithmum integrorum de abstrahendis regulis generalibus, juxta quas intellectus in eodem dirigitur, inculcavimus; is se hujus acuminis compotem fieri animadvertet: quod quomodo fiat, nunc exponere non lubet, ne extra oleas evagari videamur. Quemadmodum vero Mathesis & Philosophia mutuas sibi suppetias ferunt, ita quoque ad acumen istud ipso usu acquirendum haud parum confert Logica, qualem nos tradidimus idiomate Latino. Immo Ontologia etiam & Psychologia adjumento esse poterit. Quamobrem autor fui, ut, absolutis Arithmeticæ ac Geometriæ elementis, studium Philosophiæ cum mathematico conjungatur. Et si quis in arte inveniendi generali ex studio Matheseos proficere voluerit, ei suademus, ut, postquam in Philosophia fuerit cum laude versatus, Mathesin universam denuo pertractet & huc inprimis animum advertat, quod ad usum facultatum in veritate cognoscenda usui esse potest. Nullus enim dubito fore, ut perspicillis philosophicis usus plus videat, quam cum iisdem destitueretur.

§. 158. Inprimis autem opera danda est, ut tempestive adsuefiamus formulis algebraicis tum per numeros, quam per lineas explicandis. Quamobrem consultum est, ut data expriman-

mantur tum numeris, tum lineis, & tam in formula substituantur pro literis numeri, quam figuræ construantur juxta formulam: id quod cum in præsenti capite facillime succedat, plurimum confert ad formulas per Algebram erutas geometrice præsertim minori molestia construendas. Ex. gr. in problemate 24 (§. 90. *Analys.*), partes totius sunt Q & q, & prodit aggregatum ex $Q^2$ & $Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$. Quodsi fiat $Q=4$ & $q=3$, erit $Q+q=7$, $Q^2=16$, $(Q+q)^2=49$, adeoque $Q^2+(Q+q)^2=65$. Sed $2Q=8$, adeoque $2Q(Q+q)=56$. Est vero $q^2=9$. Quare $2Q(Q+q)+q^2=65$. Habes itaque etiam examen, quali inprimis indigent tyrones, ut tanto clarius perspiciant, quod per calculum fuit erutum a veritate non esse alienum. Etsi enim exempla singularia non evincant veritatem in universali, tyronibus tamen magis satisfaciunt, quam si animum ad calculum advertentes nullibi a se aberratum esse observent. Neque destituitur summa probabilitate, si quidem formula analytica cum exemplo in numeris consentit. Quoniam enim numeri nullo consilio eliguntur, sed potius sumuntur, prout eos casus obtulerit; vix credibile est te casu incidere in numeros, qui ex ratione singulari satisfaciunt formulæ, in omni casu minime veræ. In præsenti casu dubium hoc esse nullum, quod quis movere poterat, ostendi nullo negotio poterat, si calculus universali ratione instituatur etiam in numeris. Etenim si $Q=4$ & $q=3$, habebis $2.4^2+2.4.3+3^2=2.4(4+3)+3^2$, h. e. $2.16+2.12+9=8(4+3)+9$, seu $32+24+9=32+24+9$. Vides autem pro numeris 4 & 3 substitui posse duos alios quoscunque, ceteris semper eodem modo sese habentibus. Sed nolim tyrones talibus defatigari, nisi tempestive adsuefieri voluerint calculo universali ratione in numeris instituendo: quo in casu consultum foret, ut numeri determinati, in omni casu iidem, qualis hic binarius ter occurrit, virgula transversa notentur, nempe ut scribatur $\not{2}.4^2+\not{2}.4.3+3^2=\not{2}.4(4+3)+3^2$. Quodsi Q & q explices per lineas & construas tam Quadratum ex composita $Q+q$, quam

ex

ex una Q, & deinde rectangulum ex composita Q & q in rectam Q bis sumtam atque quadratum lineæ alterius q. formulam geometrice repræsentabis. Sed utriusq; figuræ æqualitatem intuitive non cognosces, quemadmodum numerorum, qui calculo secundum formulam instituto prodeunt. Hoc tamen non obstante figurarum constructio non omni utilitate caret. Neque enim figuræ eum in finem construuntur, ut examinis vicem subeant; sed ut discamus, quomodo formulæ analyticæ geometrice construantur, & earum sensus per figuras explicetur. Subinde tamen accidit, ut non minus veritatem formulæ intuendam præbeant figuræ, quemadmodum numeri. Taceo quod mechanicæ demonstrationi, de qua supra diximus, hic sit locus, si ad principium congruentiæ confugias & partes a figura una rescissas alteri superimponas, prout ipse usus docuerit. Enimvero quibus talia inutilia videntur, is ea prætermittat. Neque enim omnia conducunt omnibus.

§. 159. Nimirum calculus literalis & ejus applicatio ad solutionem problematum doceri poterat pueros & adolescentes, quorum captui consulitur, si, quæ abstracta sunt, ad sensum & imaginationem reducantur. In omni philosophia utilis est hæc reductio, ut eidem nunquam satis adsuefieri possit, qui in hac inoffenso pede progredi voluerit. Quamobrem qui intellectus perficiendi gratia in Algebra versantur, talia negligere non debent, quæ superflua ac puerilia videntur aliis, qui in nuda veritatum mathematicarum cognitione acquiescunt. Maximæ quoque utilitatis est ad recte philosophandum, si actus imaginationis ab operationibus intellectus discernere valeas, ne abortus imaginationis cum notionibus realibus confundas: quemadmodnm accidit summis etiam Mathematicis, qui imaginaria a realibus separare non didicere, neglectis exercitiis, quæ huc facere poterant.

§. 160. Difficilis est tyronibus doctrina de ratione Quantitatum, quam in Arithmetica demonstravimus, præsertim si theoremata non exponantur per numeros & demonstratio ad ex-

empla applicetur. Delectabuntur itaque, quando in problemate 32 (§. 124. *Analyſ.*) videbunt, quomodo per calculum literalem absque ullo negotio omnia pateant, ut ad ea capienda ſenſuum magis uſu, quam intellectus operationibus opus ſit. Hæc ipſa autem voluptas non modo amorem ſtudii algebraici, ſed & alacritatem idem proſequendi inſtillabit. Conſultum vero eſt, ut literæ non minus per numeros rationales, quam irrationales explicentur: id quod non modo univerſalitatem theorematum per calculum erutorum confirmabit, verum etiam exercitio calculum irrationalium reddet magis familiarem. Immo ne multitudine theorematum hic coacervatorum obruaris, ſed ut ſingula absque moleſtia memoriæ infigantur, niſi hoc jam factum fuerit in Arithmetica, hoc ipſo obtinebis. Quoniam vero theoremata verbis pure enunciata in uſum futurum memoriæ mandanda ſunt (§. 21 ); non minus conſultum eſt, ut ſingula verbis enuncies. Hoc modo enuncitatorum facilior quoque erit comparatio cum theorematis in Arithmetica propoſitis, cumque ea tota nitatur diſtinctis notionibus, faciet idem inſtitutum ad notiones confuſas ad diſtinctas revocandum & animum impatientem reddet ad acquieſcendum in confuſis, per quas nobis veritatem perſpicere videmur: id quod haud parum proderit in philoſophia ad præcavendam præcipitantiam, qua in periculum errandi adducimur & in errorem haud raro præcipites damur. Theorema primum, quo inveſtigatur ratio factorum communem efficientem habentium, multiplicatis ſcilicet duabus, quantitatibus rationem quamcunque inter ſe habentibus $a$ & $ma$ per eandem tertiam $c$ ita repræſentatur:

$$\begin{array}{c} a : ma \\ c \quad c \\ \hline ac : mac = a : ma \end{array}$$

Per numeros rationales explicabitur hoc modo:

$$\begin{array}{c} 8. \quad 12 \\ 3 \quad 3 \\ \hline 3.8 : 3.12 = 8 : 12 \\ \text{ſeu } 24 : 36 = 8 : 12 \end{array}$$

Quodſi 24 dividas per 36 & 8 per 12, fractionibus $\frac{24}{36}$ & $\frac{8}{12}$ reductis

ctis, prodibit utrobique $\frac{2}{3}$, idem nempe exponens (§. 136. *Arithm.*), quemadmodum requirit proportio (§. 149. 155. *Arithm.*).

Per numeros irrationales explicabitur hoc modo:

$$\begin{array}{ll} \surd 5: & \surd 3 \\ \surd 7: & \surd 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\surd 5 . \surd 7 : \surd 3 . \surd 7 = \surd 5 . \surd 3$$

$$\text{seu } \surd 35 : \surd 21 \quad = \surd 5 : \surd 3$$

Quodsi denuo $\surd 35$ dividas per $\surd 21$ & $\surd 5$ per $\surd 3$, prodibit utrobique exponens idem $\surd 1\frac{2}{3}$.

§. 161. Quodsi existimes, committi hoc pacto circulum vitiosum, cum fractionum reductio ad minores terminos supponat rationum doctrinam & calculus quoque irrationalium eadem nitatur; non unum est, quod respondeo. Primum constat, calculum fractionum & irrationalium erui posse per Algebram, quemadmodum specimine quodam docuimus (§. 146 *Analys.*) & quod idem imitari detur in casibus aliis, etiam in Algorithmio fractionum, monuimus (§. 147. *Anal.*). Sane per Algebram reperiri posse reductionem fractionum ad minores terminos, quod dubio careat, exemplo singulari hoc docere lubet. Sit fractio reducenda $\frac{9}{12}$ Fiat

$$\frac{9}{12} = y$$

$$\text{erit } 9 = 12y$$

$$3 = 4y$$

$$\frac{3}{4} = y$$

adeoque $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Quodsi pro $\frac{9}{12}$ substituas $\frac{a}{ma}$, vel, si mavis na : ma; habebis regulam, quæ in Arithmetica ad fractiones ad minores terminos reducendos præscribitur. Cumque calculus hic nitatur axiomatis notissimis, intelligi etiam poterit ab iis, qui Algebram nondum didicerunt. Deinde notandum est, nos calculum fractorum & irrationalium jam tradidisse independenter a problemate 32 (§. 124. *Analys.*), adeoque absque circulo vitioso a nobis illustrationis gratia adhiberi posse, quæ aliter jam demonstrata sunt, ut eorum, quæ traduntur, appareat consensus. Quamprimum vero scrupulus iste te angit, tollitur extemplo eo, quem diximus, modo. Quodsi quis Elementa Arithmeticæ & Geometriæ methodo analytica recentiorum demonstrare vel-

 let,

let, is calculum literalem cum numeroso in Arithmetica combinare poterat & algorithmum fractorum, nullis suppositis de ratione quantitatum theorematis per Algebram elicere tenetur, antequam per calculum literalem demonstrat theoriam rationum. Ceterum hic notari velim, quam facile committatur circulosus vitiosus, qui non advertitur, ab iis, qui extra systema propositiones aliquas demonstrare volunt, ut agnoscatur necessitas systematum veri nominis in omni scientiarum genere & ut principia, quibus utimur in demonstrando, desumantur ex systemate, in quo propositiones demonstrandæ vel non occurrunt, vel saltem non anteriore loco, quam principia ista, collocantur. Videmus etiam per præcipitantiam judicare eos, qui demonstrationi cuidam circulum vitiosum simpliciter imputant, qui nonnisi in relatione ad certum aliquod systema committitur, ubi nondum demonstraverunt, non posse condi systema, in quo veritates ita sibi invicem subordinantur, ut demonstrationi isti absque circulo vitioso sit locus. Ad talia omnino animum advertere tenentur, quotquot intellectus perficiendi curam gerunt.

§. 162. Inprimis etiam attentionem meretur problema 29 (§. 95. *Analys.*), quo theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo investigatur, ope solius calculi literalis, quatenus scilicet ostendit, quomodo theoremata infinita ad unicum reduci possint, ita ut unum æquipolleat infinitis, ut præjudicium illud evellatur animo, quasi intellectus finitus nonsit capax infiniti. Falsum enim esse hinc intelligitur, quod aliis quoque speciminibus comprobabitur in sequentibus, intellectum infinita comprehendere non posse, cum hic formulas numero infinitas sub una quadam contentas exhibeamus. Rationem, cur hoc fieri possit, perspiciet, qui attenta mente perpendere voluerit, quæ hic docentur. Nec minus idem problema singularem attentionem meretur ob artificia singularia, quibus in eodem solvendo utimur, & quorum usus etiam est in aliis, immo quæ artificia heuristica generalia suggerunt extra Mathesin etiam usurpanda.

§. 163.

§. 163. Elementa nimirum Analyſeos ita conſcripſimus, ut paucas præſcripſerimus regulas, reliqua vero artificia ipſo uſu inſinuentur: quibus cum utendum ſit non modo in eo problemate, ubi primum adhibentur, verum etiam in aliis, ubi adhiberi poſſunt; ſi reflectendo ſuper iisdem diſtincta eorundem notio animo imprimitur, & facilius eadem memoria retinentur, & eorum ſtatim meminimus, quando iisdem denuo opus habemus, nec tentatis demum fruſtra aliis in ea caſu incidimus. Generalia vero Artis inveniendi præcepta ut inde abſtrahat, qui artificia, quibus utimur, nondum diſtincte animo concepit, & in rationes eorum inquiſivit, prorſus impoſſibile eſt. Quoniam generalia conſtituuntur ſimilitudine latente in ſpecialibus, ingenii quoque acumen mirifice augetur generalium iſta abſtractione, quam juvant regulæ de notione generis ex data notione ſpeciei formanda (§. 710. *Log.* ) & de notione generum ſuperiorum ex notionibus inferiorum derivanda (§. 711. *Log.*), quemadmodum applicationem extra Matheſin adjuvant regulæ de notionibus ſpecierum ex notione generis (§. 712. *Log.*) & de notionibus ſpecierum aliarum ex notione ſpeciei unius deducenda (§. 714 *Log.*), quas ſingulas & ipſas a Matheſi abſtrahi poſſe, exempla docent, quibus problemata hæc illuſtravimus in Logica.

§. 164. Nemo a nobis requiſiverit, ut artificia ſpecialia, quibus utimur, ad notiones generales revocemus & alias ſpeciales determinemus, quibus extra Matheſin in aliis veritatibus inveſtigandis opus eſt. Hæ enim pertinent ad Artem inveniendi generalem, quam ſuo loco, ſi Deo viſum fuerit, explicaturi ſumus; ubi in notis adjectis doceri poterit, quomodo ab artificiis analyticis Mathematicorum abſtrahantur, quæ in ea ex notionibus ontologicis & pſychologicis aliisque Philoſophiæ principiis demonſtrantur. Sufficit excitaſſe attentionem illorum, qui ſtudium Philoſophiæ cum mathematico conjungunt, ea methodo philoſophantes, qua nos utimur.

§. 165. Enimvero progrediamur ad Algebram proprie ſic dictam.

ctam. Algebra primum non erat nisi regula arithmetica, quæ instar regulæ trium in eadem docebatur & in numeris tantummodo exercebatur. Arithmetica literali a *Vieta*, Gallo, inventa latior patebat ejus usus, cum sub literis non solum numeri seu quantitates discretæ, sed & magnitudines seu quantitates continuæ comprehenderentur. Unde calculum literalem *Vietæ* ad Geometriam elementarem applicabat *Ghetaldus* Italus in libris de Resolutione & Compositione mathematica. Cum *Harriottus*, Anglus, Arithmeticam literalem ope Characteristicæ magis perfecisset, & *Cartesius* genuina characteristica potentiarum usus, quemadmodum jam obiter monuerat *Keplerus* in Harmonica & rationem designationis perspicue multo ante docuerat *Stifelius* in Arithmetica integra, numerorum cossicorum naturam ex genuinis fundamentis eruens, Algebram quoque ad Geometriam superiorem applicaret; illustrior adhuc ejus evasit usus. Nos igitur ut in tradenda Algebra gradatim progrederemur, primum eam exercere docuimus in problematis arithmeticis determinatis, deinde etiam in indeterminatis, mox in problematis Geometriæ elementaris, tandemque in problematis Geometriæ sublimioris. Quoniam vero Geometria sublimior aliud adhuc calculi genus requirit, in quo quantitates supponuntur infinite parvæ, methodo a *Keplero* in Stereometria primum quasi obiter indicata, a *Cavalerio* in Geometria Indivisibilium magis promota & a *Stephano* præsertim *de Angelis* atque *Gregorio a S. Vincentio* ulterius exculta; hoc quoque calculi genus cum reductione quantitatum ad series infinitas per divisionem *Mercatoris* & extractiones radicum *Newtonianas* combinatum explicavimus, & Algebræ usum adhibito hoc calculo in Geometria sublimiori multo latiorem exposuimus. Ceterum cum in Geometria elementari omiserimus theoremata nonnulla, quæ difficilius demonstrantur, qualia sunt de multisectione anguli seu divisione circuli & arcus in partes quotcunque æquales & de investiganda soliditate corporum regularium, nec non de inscriptione quorundam polygonorum

rum in circulo ab *Euclide* demonstrata, Geometriam vero sublimiorem methodo veterum demonstratam prorsus non attigerimus; quæ hic desiderari poterant, per Algebram investigare docuimus, ut una eademque opera & ars inveniendi exerceretur, & theorematum scitu necessariorum cognitio acquireretur. Quoniam enim non cujusvis est in numeris & lineis atque figuris consenescere, & ab omnibus studium Philosophiæ cum mathematico conjungi consultum sit, plerique etiam non alio fine Mathesin puram tractare debent, quam ut in Philosophia aliisque studiorum generibus felicius progrediantur; Elementa Arithmeticæ ac Geometriæ abunde sufficere existimavimus, ut genuinam methodum, sine qua ad solidam rerum cognitionem in quocunque scientiarum genere perveniri minime datur, nobis familiarem reddamus, præsertim si demonstrationes nostro more resolvantur & singula analytice repræsententur, quemadmodum capite primo præcepimus, & ceterarum veritatum mathematicarum facillimo modo acquirendam esse duximus.

§. 166. Studium algebraicum ut facilitaremus, primas tantummodo exposuimus regulas (§. 141. 143. *Analys.*), easque statim applicavimus ad exempla, problematis eo consilio electis, ut vel artificium aliquod analyticum animo insinuent, vel veritatem quandam cognitu necessariam doceant. Ita problemate statim 38, quod in hoc genere primum est, (§. 144. *Analys.*) ostendimus, dari proprietates numerorum singulares, quibus ab omnibus aliis distinguuntur, & quæ differentiam eorum numericam constituunt. Hoc ipso illustratur doctrina de differentia numerica individuorum, in Ontologia a nobis tradita, & in Cosmologia ac Psychologia demonstrata, ex doctrina autem de origine idearum in intellectu divino prorsus a priori deducta ex ipsa natura & attributis Dei, entis omnium primi, multo clarius elucescens, scholæ autem non satis animadversa, multo minus expensa. Quoniam vero exemplum nonnisi singulare est, numeri nempe nonnisi duodenarii, sequente statim problemate (§. 145. *Analys.*) theorema generale eruere docemus,

tum ut pluribus exemplis confirmetur idea tam nobilis multique per philoſophiam omnem tam practicam, quam theoreticam uſus, tum ut uberius explicetur artificium problemata particularia, immo ſingularia, ad univerſalitatem revocandi, cujus jam ſpecimina quædam dedimus in anterioribus, veluti cum problema generale de binomino ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95 *Analyſ.*), de radice quacunque inde extrahenda (§. 98. *Analyſ.*) & de infinitinomio ad dignitatem quamcunque evehendo proponeremus (§. 102. *Analyſ.*), & regulas de permutatione quantitatum ſeu variatione ordinis earundem ad univerſalitatem revocaremus. Similiter problemate 40 (§. 146. *Analyſ.*) ſpecimine quodam docui per Algebram inveſtigari poſſe talia, quæ aliis etiam modis erui poſſunt, & in ſcholio (§. 147. *Analyſ.*) monui, idem in aliis quoque eodem modo procedere. Quod vero utilitate ſua non deſtituatur, eandem veritatem pluribus modis diverſis inveſtigari ſupra jam monuimus (§ 161). Illuſtravimus differentiam, quæ intercedit inter ſolutionem problematum in numeris abſtractis & concretis (§. 161 *& ſeqq. Analyſ.*) & artificia reductionis inſinuavimus (§. 163. 183. 184. *Analyſ.*). Cum de proportione harmonica & contra harmonica, nec non de numero pronico & numeris polygonis aliisque figuratis nihil diximus in Arithmetica, ne ejus theoriam nimium extenderemus & a ſtudio Geometriæ nimis diu detineremus tyrones, ſtudii mathematici facile effecturi deſertores; defectum iſtum hic ſupplemus, dum theoremata præcipua ad theoriam iſtorum numerorum ſpectantia per Algebram eruere docemus (§. 186. *& ſeqq. ac* §. 206 *& ſeqq. Analyſ.*). Idem a nobis factum eſſe in reliquis capitibus, qui animum huc advertere libuerit, facile deprehendet.

§. 167. Inprimis autem ſingularem attentionem meretur artificium prorſus ſingulare, quo in ſummandis quadratis & cubis, quorum radices in ſerie numerorum naturali progrediuntur, utimur (§. 200 *Analyſ.*) & quod mox ad ſummandas potentias quaſcunque numerorum naturalium transferimus (§. 203. *Analyſ.*)

*Analys.*), ac deinde ad summandos numeros polygonos (§. 212 *Analys.*) & ad summandos quoque pyramidales adhibemus (§. 216. *Analys.*). Quantum enim eodem præstetur, abunde intelliget, qui quæ hac methodo eruuntur conferre voluerit cum Arithmetica infinitorum *Wallisii* & inprimis *Bullialdi*. Facile autem apparet, methodum hanc ad alia problemata arithmetica solvenda transferri posse, perinde ac calculus summatorius in Geometria amplissimum habet usum. Nec puto faciliori modo potentias & numeros figuratos summari posse. Loquuntur autem hæc ipsa problemata & problema de binomio ad dignitatem infinitam evehendo ac radice quacunque ex eodem extrahenda, ut alia taceamus, quam ardua problemata per calculum literalem & Algebram solvi possint, etiamsi paucissima theoria fueris instructus, ut adeo methodi hæ in arte inveniendi præ methodo veterum sese maxime commendent. Per eas enim aditus ad ea patet, quæ a nostra cognitione intervallo quam longissimo adhuc sunt remota. Clarius idem elucescet in sequentibus. Unde si quis in Mathesi inventorem agere voluerit, ei Analysis Mathematicorum recentiorum nunquam satis commendari potest.

§. 168. Per universam Analysin in solvendis problematis calculum integrum distincte exhibuimus, ut quilibet tyro proprio Marte intelligat, quomodo problema fuerit solutum, & quomodo ordine in solutione sit progrediendum, quem præscribunt regulæ generales ab initio expositæ. Lineis quoque distinximus ea, quæ ex anterioribus concluduntur, ab iis, ex quibus colliguntur per communem algorithmum. Non tamen hoc ipso solutiones reddidimus prolixiores, quin potius in minus easdem spatium haud raro coarctavimus. Et qui citra confusionem, quæ errorem facile parit, absque ulla molestia problemata solvere voluerit; eo modo calculum instituere tenetur, quo eundem in contextu repræsentamus. Quilibet adeo experie-

rietur, nullibi ipsi esse hærendum, modo attentionem afferre voluerit. Equidem brevitatis gratia nonnisi speciminibus quibusdam ostendimus, quomodo formulæ algebraicæ verbis explicentur, ut prodeant regulæ, per quas problema solvitur in dato quocunque casu particulari, nec non quomodo theoremata ex calculo eruantur. Suadendum tamen tyronibus, ut idem faciant in singulis problematis. Sentient utilitatem, ubi in hoc labore sese præstiterint diligentes. Explicavimus formulas per numeros, ut discant tyrones, quod eædem instar regulæ sint, quæ per calculum eruuntur universalem. Initio tamen utilitate sua non caret, si solutionem algebraicam tentent in exemplis singularibus, numeris in locum literarum, quibus quantitates datæ designantur, surrogatis, quemadmodum exemplo aliquo ostendere lubet. In problemate 41 (§. 148. *Analys.*), datur duarum quantitatum summa & eorundem factum, quæruntur quantitates ipsæ. Quare si sit summa $a = 14$, factum $b = 48$; resolutio talis erit:

Sit summa $= 14$ semidiffer. $= x$ factum $= 48$ erit Quant.

$$\begin{array}{r} \text{maj.} = 7 + x \\ \text{min.} = 7 - x \\ \hline -7x - x^2 \\ 49 + 7x \\ \hline \text{Factum} = 49 - x^2 \end{array}$$

Ergo

$$\begin{array}{c} 49 - x^2 = 48 \\ \hline 1 - x^2 = 0 \\ \hline 1 = x^2 \\ \hline 1 = x. \end{array}$$

Quare $7 + x = 8$ & $7 - x = 6$.

§. 169. Quodsi problemata quoque per Algebram numerosam solvas, non modo hinc elucescet discrimen inter Algebram numerosam & speciosam & hujus præ illa præstantia agnoscetur, cum per istam nonnisi exempla computentur, per hanc vero solutiones, adeoque veritates universales detegantur; verum etiam calculus algebraicus reddetur familiarior & clarior. Hoc vero suademus nonnisi primis tyronibus. Qui enim in calculo jam fuerint versati, istiusmodi exercitiis non amplius habebunt opus. Consultum vero est exemplum calculi

culi numerosi conferri cum calculo specioso, tum ut appareat, quantum conveniant, quantum differant, tum ut numerosus lucem affundat specioso. Quodsi quis universalitatem in calculo numeroso conservare velit, haud difficulter idem præstabitur, quemadmodum exemplum modo allatum & hic alia forma exhibitum docet:

$$7^2 - x^2 = 48$$

$$7^2 = 48 + x^2$$

$$7^2 - 48 = x^2$$

$$\sqrt{(7^2 - 48)} = x$$

Vides nimirum in quolibet casu a quadrato semisummæ $7^2$ subtrahendum esse factum & ex residuo extrahendam radicem, ut habeas semidifferentiam numerorum quæsitorum. Quodsi veteres hoc animadvertissent, per Algebram numerosam ante inventum calculum literalem non minus veritates universales eruissent, quam nunc per speciosam erui solent. Si enim in calculo numeroso universalitatem conserves, specioso prorsus æquipollet, quemadmodum collatio utriusque calculi intuenti extemplo prodit. Immo hoc pacto etiam eodem successu per Algebram numerosam solvi poterant problemata geometrica, quemadmodum nunc solvuntur per speciosam. Sed de hoc dicemus suo loco. Ratio in aprico est. Per calculum speciosum obtinentur solutiones universales, quia idem in omni casu particulari, & pro literis, quibus quantitates datæ designantur, numeri quilibet substitui possunt, salvo calculo integro. Idem vero succedere eodem modo in calculo numeroso, qui universalitatem conservat, per se patet. Quoniam signa primitiva, qualia sunt, quibus exprimuntur quantitates datæ, prorsus arbitraria sunt, notis autem numericis significatum universalem imponere licet, universum a singulari, quem habent, veluti ut 14 non significet summam ex duobus numeris determinatis (quas hic esse 8 & 6 solutio prodit), sed summam ex duobus quibuscunque numeris, immo generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus compositam, veluti si significet lineam in duas quascunque partes divisam, & similiter 48 non denotet factum ex duobus numeris determina-

tis iisdem cum anterioribus, quorum summa est 14, sed potius factum ex duobus quibuscunque aliis cum illis tantummodo iisdem, qui summam conficiunt, vel generalius ex duabus quibuscunque quantitatibus cum illis iisdem, ex quibus summa componitur, veluti quando 14. significet lineam in duas quascunque partes divisam, si 48 denotet rectangulum ex parte una in alteram.

§. 170. Non difficile fuisset veteribus hæc animadvertere, si quidem in universalia in iis, quæ cognoscebant, latentia mentis aciem intendere voluissent, & a notatione numerorum notiones Artis characteristicæ universales abstraxissent: ad quod faciendum non defuit ipsis acumen, sed defecit tantummodo attentio ad ea, quæ pro scopo præsente satis cognita atque perspecta deprehendebant. Discant hinc velim omnes, quibus puerilia, aut saltem superflua videntur, quæ ad tractandam Mathesin præcipimus; quantum non modo sibi, verum etiam scientiæ desint, qui, quæ se satis intelligere arbitrantur, ea nulla amplius attentione dignantur, & vulgarium meditationem ad sublimia nitentibus non convenire arbitrantur. Multo luculentius hæc patebunt, ubi Artem inveniendi explicare licuerit. Nos experti, quantum valeat vulgarium meditatio, nulli dubitamus, quin in Philosophia universa, præsertim in Physica & Philosophia morali, immo ipsa civili, dudum principia certa, per quæ ad remotiora paratur aditus, constituissent Philosophi, siquidem ad notiones communes ex maxime vulgaribus derivandas sufficientem attentionem afferre voluissent. Neque vero existimandum est, convenire hæc iis, quibus ad sublimiora non conceditur aditus. Etenim non leve acumen requiritur, ut notiones communes, quas suppeditant obvia, non modo ad distinctas & determinatas revoces, sed & inde universales abstrahas. Quænam enim, quæso, ratio est, cur notionum communium admodum fertilium, quemadmodum vel *Euclidis* Elementa testantur, immo ipsa quoque Algebra confirmat, non eum hactenus fecerint usum Philosophi, nec etiam

in dirigendis actionibus viri prudentes, quem facere poterant, nisi quod negligantur ab iis, qui acumine alios vincunt. Sane cur Mathematici summi, quorum acumen accusari nefas, genuinam demonstrationis formam non apprehenderint, ratio alia non est, quam quod eandem attentione sufficiente dignati minime fuerint, sine qua distinctam ejus notionem consequi minime datur. Constat autem, quantum sibimetipsis defuerint, tum ubi demonstrationes more veterum in ipsa Mathesi dare voluerunt, tum quando extra eandem veritates quasdam demonstrare conati sunt. Quo majore acumine maxime vulgaria perlustrantur, eo profundiora in iis latentia in apricum proferuntur.

§. 171. Postquam usum Algebræ in solvendis problematis Arithmeticis determinatis ostendimus, ad problemata indeterminata progredimur capite secundo. Applicamus in eo Algebram ad problemata pleraque *Diophanti*, a quo horum solutio *Analysis Diophantea* appellari suevit. Ex quo Algebra ad Geometriam, præsertim sublimiorem, & inprimis ad problemata physico-mechanica applicata fuit; Analysis Diophantea negligi cœpit, ita ut præter *Ozanamum* in Elementis Algebræ vix quisquam fuerit alius, qui ultra *Diophanteos* limites eandem promovere conatus fuerit. Quam minus recte autem hoc fiat, jam *Leibnitius* monuit, qui ejus præclarum usum in Analysi infinitorum observavit. Singularibus in iis artificiis haud raro opus est, tum si denominationem spectes, tum si reductionem consideres. Quamobrem suadeo, ut, qui horum problematum solutionem expendit, in rationem inquirat, cur denominatio hoc modo fuerit facta & reductio hoc modo instituatur, ubi aliquid inusitati occurrit. Ex. gr. in problemate 92 (§. 230 *Analys.*), quo summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere jubemur, ubi latus quadrati majoris dicitur, $a$, minoris $b$; latus quæsiti unius appellatur $a-z$, latus alterius $yz-b$. Ratio denominationis non patet per communes regulas: per eas enim dicendum erat latus unum $x$, alterum $y$ (§. 141. *Analys.*). Enimvero si denominatio hoc

modo fiat, habebimus $a^2+b^2=x^2+y^2$, consequenter $x=\sqrt{(a^2+b^2-y^2)}$. Sed hæc solutio nulla est, cum in Analysi Diophantea solutio quæriatur in numeris rationalibus. Quamobrem in scholio (§. 231. *Analys.*) monuimus, cur ad vitandam irrationalitatem latera quadratorum quæsitorum sumserimus $a-z$ & $yz-b$. Enimvero cum idem non fecerimus in ceteris, sed propriæ discentis meditationi reliquerimus; necesse est ut ad rationem generalem animum advertens specialem ex conditione calculi eruat.

§. 172. Quoniam in problematis indeterminatis facilius aberratur, ubi singularia artificia adhibenda sunt; tyronibus suadendum, ut problemata generaliter soluta etiam in numeris aliquoties solvant, quo artificia ista ipsis magis familiaria reddantur. Consultum etiam est, ut, ubi formulas generales per numeros explicaverint, examen addant, quo numeros repertos conditionem in problemate præscriptam habere innotescit. Ex. gr. in problemate 87 (§. 225. *Analys.*), reperiuntur numeri 11 & 6, quorum partes aliquotæ numeris suis additæ efficere debent eandem summam. Quoniam 11 est numerus primus, quem quippe sola unitas metitur (§. 75 *Arithm.*), præter unitatem partem aliquotam aliam non habet (§. 30. 74 *Arithm.*). Unitas igitur si eidem addatur, summa efficitur 12. Ast senarii partes aliquotæ sunt 1, 2 & 3, quas ubi addas ipsi numero 6; habebis itidem summam 12. Similiter per formulam generalem determinantur duo numeri 104 & 116. Illius partes aliquotæ sunt, 1, 2, 4, 8, 13, 26 & 52: hujus vero 1, 2, 4, 29 & 58. Est vero $1+2+4+8+13+26+52+104=210$, & $1+2+4+29+58+116=210$. Nec inconsultum est, ut etiam in hac Analysi formulæ algebraicæ verbis explicentur, quemadmodum supra præcepimus (§. 168.), si quis præsertim Mathesin non sibi soli discit, sed intellectus potissimum perficiendi gratia eidem incumbit. Etenim non leve exercitio opus est, ut, quicquid animo concipis, verbis distincte enuncies. Nisi vero hac facultate polleas, in studio philosophico

phico & quocunque alio scientiarum genere accurata methodo nunquam uteris. Extra Mathesin non habemus characteres & figuras, quibus imaginatio juvatur & defectus distincte enunciandi, quæ concipiuntur vi intellectus, suppletur. Inprimis autem usui est, ut quam maxime abstracta verbis perspicuis accurate enunciare valeas, ubi tibi propositum fuerit ex perceptionibus obviis eruere notiones universales, quæ iisdem insunt & veritatibus in casu particulari agnitis omnem suam tribuere amplitudinem, quam habere possunt: id quod mirifice conducit ad omnem cognitionem promovendam & prudentiam, qua ad recte agendum opus habemus, amplificandam. Immo augebitur eodem medio notiones distinctas formandi facultas, quæ non adeo facile acquiritur, quemadmodum vulgo putatur, præsertim ubi cum abstractis tibi fuerit negotium. Scholastici in distinguendis iis, quæ diversa sunt, satis fuerunt acuti; sed quæ confuse perceperunt distincte concipere & verbis perspicuis accurate enunciare non valuerunt. Quamobrem Metaphysicam tenebris involverunt, nec ratiocinando quicquam ex notionibus confusis colligere potuerunt, ut scientia nobilissima in terminologiam versa fuerit ac proinde a nonnullis perperam pro Lexico quodam philosophico habita. *Cartesius* vero, qui notionum distinctarum usum indispensabilem in scientiis perviderat, Ontologiam in eorum numerum retulit, quæ contemni merentur, & in Physicis imaginaria cum realibus confudit, ut ad veritatem liquidam pertingere non potuerit, Philosophiam vero practicam, quam excoli maxime interest, prorsus intactam reliquerit, etsi ipsi propositum esset Philosophiam reformare, cujus defectus abunde agnoscebat.

§. 173. Sed dicta sufficiant de applicatione Algebræ ad problemata arithmetica. Progrediamur itaque ad problemata geometrica, quæ capite tertio traduntur. Problemata geometrica duo singularia habent. Etenim plerumque artis est invenire æquationem, nec ea tam obvia est, quemadmodum in proble-

blematis arithmeticis puris, ubi ſcilicet numeri dantur abſtracti. Deinde non minoris artis eſt formularum algebraicarum, per quas determinatur quæſitum, conſtructio geometrica. Immo ſubinde difficultate non caret, ut reperias, quid quæri debeat, ut in commodam incidas ſolutionem. Quamvis vero problemate 110 (§. 250. *Analyſ.*) præſcribantur regulæ generales de invenienda æquatione, eædem tamen non ita determinatæ ſunt, ut in dato quolibet caſu ſtatim appareat, quanam earum utendum ſit ad æquationem inveniendam, ſed haud raro variis id tentandum eſt modis. Similiter in problemate 111 & 112. (§. 252. 253. *Analyſ.*) docuimus, quomodo conſtruantur æquationes ſimplices & quadraticæ omnes; monuimus tamen in ſcholio (§. 254. *Analyſ.*), quod hoc modo raro incidamus in conſtructiones concinnas, quales ſunt, quæ in Elementis Geometriæ extant, cum tamen concinnæ potiſſimum deſiderentur. Quamobrem modus, quo pervenitur ad æquationem, & quo æquatio ultima, per quam determinatur quæſitum, conſtruitur, majorem attentionem meretur, quam qua in problematis arithmeticis uſi fuimus, ut pateant artificia, quibus utimur, in aliis caſibus ſimilibus, quando occurrunt, imitanda. Ut autem conſtructionem concinnam reperias, primo tentanda eſt per regulas generales, quæ præſcribuntur. Deinde diſpiciendum, quomodo omnes linearum determinationes eidem ſchemati includantur, in quo lineæ ſingulæ commodum nanciſcantur ſitum, ut prodeat ſchema, quod viſum minime offendit, & in quo citra moleſtiam lineæ ex loco uno in alterum transportantur. Nulla adhuc datur conſtructionum elegantium theoria, in qua elegantia, quam ipſi tribuimus, ad notiones diſtinctas reducitur, quamvis ea non impoſſibilis ſit. Pendet ea a principiis generalibus pulchritudinis entis compoſiti, quam & ipſam nemo hactenus explicavit. Inſunt Architecturæ civili notiones quædam generales, quæ huc faciunt; ſed nemo hactenus ad eas, quantum publice conſtat, animum advertit. Quamobrem hactenus in caſu omni demonſtrari

ſtrari nequit, conſtructionem, quam dediſti, eſſe eam, in qua nihil deſiderari poſſit. Et haud raro caſui magis, quam arti tribuendum, quod in conſtruionem incidas, quæ pulchritudine ſua ſeſe commendat. Neque vero exiſtimandum eſt, ſi vel in noſtris Analyſeos elementis, vel apud autores alios occurrunt conſtructiones elegantes; eas ex formula algebraica juxta regulas generales reſoluta primo ſtatim conamine deductas fuiſſe: Quin potius pro certo tenendum, eas haud raro multum negotii feciſſe inventoribus, antequam ad eam formam deducerentur, quam habent. Ceterum ut dicta intelligantur, ſpecialia quædam addenda ſunt.

§. 174. In problemate 113. (§. 255. *Analyſ.*), quo ex data perimetro & area trianguli rectanguli hypothenuſam invenire, ipſumque triangulum conſtruere docemus, non minus æquationis inveſtigatio, quam trianguli conſtructio ſingularia quædam habent, quæ attentionem merentur. Quodſi in inveſtiganda æquatione via ordinaria, quam monſtrant regulæ generales, incedere voluiſſemus, hoc modo æquatio inventa fuiſſet.

$AB + BC + CA = a$ $\quad AC = x$

$Area = b^2$ $\quad AB = y$

erit

$AB + BC = a - x$

$BC = a - x - y$

Duæ cum inveniendæ ſint æquationes, alteram ſuppeditat theorema Pythagoricum, vi cujus $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*), alteram vero area trianguli $= \frac{1}{2} AB.\,BC$ (§. 392 *Geom.*). Habemus itaque

$$x^2 = 2y + a^2 - 2ax + x^2 + {}^2 2ay + 2xy$$

$$o = 2y^2 + a^2 - 2ax - 2ay + 2xy$$

$$2ax - 2xy = 2y^2 + a^2 - 2ay$$

$$x = \frac{2 + {}^2 y a^2 \; 2ay}{2a - 2y}$$

$$b^2 = \tfrac{1}{2}ay - \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}y^2$$

$$\tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}ay - \tfrac{1}{2}y^2 - b^2$$

$$xy = ay - y^2 - 2b^2$$

$$x = \frac{ay - y^2 - 2b^2}{y}$$

Quamobrem

$$\frac{2y^2 + a^2 - 2ay}{2a \; 2y} = \frac{ay \;\; y^2 - 2b^2}{y}$$

$$2y^3 + a^2y - 2ay^2 = 2a^2y \;\; 4ay^2 - 4ab^2 - + 2y^3 + 4b^2y$$

$$o = a^2y - 2ay^2 + 4b^2y - + 4ab^2$$

$$\frac{2ay^2 - 4b^2y - a^2y = -4ab^2}{y^2 - \frac{4b^2 - a^2}{2a}y = -2b^2}$$

Fiat $\frac{4b^2 + a^2}{2a} = m$,

erit $y^2 - my = -2b^2$

$$\frac{\quad \frac{1}{4}m^2 \quad \frac{1}{4}m^2}{y^2 - my + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 - 2b^2}$$

$$\frac{y - \frac{1}{2}m = \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2)}}{\frac{1}{2}m - y}$$

$$y = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - 2b^2)}$$

Vides hic, quam prolixus evadat calculus, si viam ordinariam ingrederis stricte inhærens regulis generalibus. Incidis in æquationem quadraticam affectam, cum in solutione, quam in textu dedimus, æquatio sit simplex, adeoque primi gradus. Quodsi $y$ per constructionem geometricam determinare volueris, primo eruendus est valor ipsius $m$. Est vero $m = \frac{4b^2 - a^2}{2a} = \frac{2b^2 - a}{a}$. Unde patet, te eadem opera, si æquatione in contextu utaris, reperisse hypothenusam, qua hic valorem $m$ reperis, quo in constructione geometrica æquationis ultimæ hic opus habes: ut adeo dubitari non possit, constructionem quoque fore multo prolixiorem, & intricatiorem ea, quam in contextu exhibemus. Abbreviatur calculus & æquatio multo simplicior eruitur, quia problema ad æquationem reducturus uteris theoremate de compositione quadrati, cujus radix binomia (§. 261 *Arithm.*), adeoque plures veritates cognitas supponis, quam si viam ordinariam ingrederis & ad circumstantias particulares animum attendis, quarum viam ordinariam ingressus nullam habes rationem. Nihil itaque hic singulare occurrit, quod non eodem modo locum habeat in aliarum regularum generalium applicatione. Qui ea attentione utitur in addiscenda Mathesi, quam in capite primo inculcavimus; rationem hanc jam didicit in Practica Italica, ubi ob circumstantias singulares ope theorematum, quæ tanquam cognita præsupponuntur, & quorum in regula trium opus non habemus, calculus abbreviatur. Discas hinc velim, quod, si nostro more in studio Arithmeticæ & Geometriæ versatus acu-

acumen quoddam tibi compareris, te in studio quoque algebraico fore acutiorem, & dum eidem incumbis, in majore luce versaturum. Acumen vero hoc studio algebraico auctum non uno nomine sese tibi commendabit, ubi ad philosophiam & alia addiscendum progredieris, immo in ipsa praxi vitæ. Enimvero constructio quoque trianguli rectanguli ex perimetro & area datis attentionem meretur. Vulgo triangula rectangula construimus ex datis cruribus, quibus ad angulum rectum junctis determinatur hypothenusa: quæ etiam ratio est, cur problema per regulas generales solventes investigamus cruris $y$ valorem. Construi vero etiam potest triangulum rectangulum data hypothenusa & altitudine: quæ constructio denuo uberiorem theoriam supponit, quam communis, quod facile animadvertes, ubi fundamentum, quo nititur constructio, perpendere volueris. Unde vides, cur inventa hypothenusa etiam quæsiverimus altitudinem. Et quoniam inventa in numerum cognitorum refertur, $x$ non amplius spectatur tanquam magnitudo incognita, sed pro cognita habetur, ut adeo constructionem præter necessitatem efficeres prolixiorem & intricatiorem, si pro $x$ valorem inventum in æquatione $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, $= 2b^2 : x$ substituere velles. Immo commodius accidit, si retineas $y = b^2 : \frac{1}{2}x$, quam si reductione modo ordinario facta sumas $y = 2b^2 : x$. In quo denuo latet quoddam artificium, quod in geometricis constructionibus formularum algebraicarum utile est, & quo etiam in sequentibus utimur.

§. 175. Regulas arithmeticas non adscripsimus brevitatis gratia, non modo, quod geometricarum constructionum hic potissimum habetur ratio; verum etiam quod ex anterioribus satis manifestum supponimus, quomodo formulæ algebraicæ arithmetice explicentur, & regulæ arithmeticæ inde deducantur. Non tamen ideo tyrones negligere debent formularum per numeros explicationem & regularum arithmeticarum enunciationem. Etsi vix opus esse videatur, exemplo præsenti rem declarari; ut tamen con-

ſulamus minus perſpicacibus, id feciſſe non nocebit. Æquatio itaque $x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ hanc ſuppeditat ſolutionem arithmeticam, adhibito artificio, quod ſub finem paragraphi præcedentis commendavimus: 1. Quæratur ad perimetrum dimidiam $\frac{1}{2}a$ & latus quadrati areæ æqualis $b$ tertia proportionalis, quæ erit $\frac{2b^2}{a}$. 2. Hæc ſubtrahatur a ſemiperipheria $\frac{1}{2}a$, relinquetur hypothenuſa quæſita. Arithmetice explicabis formulam hoc modo. Sit $a = 12$, $b^2 = 6$. Erit $\frac{1}{2}a = 6$, adeoque $x = 6 - \frac{12}{12} = 6 - 1 = 5$.

§. 176. Qui ex ſolutionibus problematum proficere voluerit, quantum datur, is negligere minime debet theoremata, quæ offerunt æquationes. Quamobrem in problemate, quod nunc perluſtramus, docuimus, quomodo theorema ex æquatione ſecunda, ſeu perultima eruatur. Enimvero ipſa etiam æquatio ultima theorema non inelegans ſuppeditat. Cum enim $2b^2 : a$ vel $b^2 : \frac{1}{2}a$ ſit differentia inter ſemiperimetrum trianguli rectanguli $\frac{1}{2}a$ & hypothenuſam $x$; extemplo patet theorema ſequens: *Differentia inter hypothenuſam & ſemiperimetrum trianguli rectanguli eſt tertia proportionalis ad ſemiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis.* Non video quid obſtet, quod minus hoc theorema ceteris Geometriæ elementaris adſcribi poſſit, niſi quod uſum, quem habere poſſit, non prævideas: nullum enim eſſe demonſtrare minime vales. Sane ſi hæc ratio ſufficeret ad theoremata ex Matheſi eliminanda, multa ex eadem arcenda & olim fuiſſent, & nunc eſſent, quorum egregius prorſus ſucceſſu temporis comparuit uſus, & in poſterum comparebit. Ecquis prævidere poterat uſum, quem habet comparatio progreſſionum arithmeticarum & geometricarum, cui inventum logarithmorum longe utiliſſimum deberi conſtat, & qua *Stifelius* uſus in algebraicis æquationibus intimius explicandis? Quodſi igitur hanc comparationem tanquam inutilem rejicere voluiſſent Mathematici, locum in Matheſi eidem denegaturi, quod uſum ejus minime præviderent; logarithmorum doctrina & ardua illa, quæ in Matheſi ſublimiori

miori ab eadem pendent, forsan hodienum non essent detecta. Inventores non solliciti esse debent, num, quod investigandum sibi sumunt, utile sit, sed num quod investigaverunt sit verum. Utilitas enim sua veluti sponte sese manifestabit, ubi in veritate investiganda progrediuntur, quam prævidere nullo modo poterant. Multum obest incremento scientiæ, si qui eam promovere possunt ac volunt, hoc præjudicio tenentur, quod de veritatis inveniendæ utilitate prima moveri debeat quæstio. Hæc enim cura tangere debet nonnisi eos, qui ab aliis inventa certo fine addiscunt, etsi cautione multa opus sit, ubi utilitatem ex vero æstimare voluerint, ne, quemadmodum plerumque accidit, quæ maxime utilia sunt præ inutilibus reputentur.

§. 177. Forsan non inconsultum judicaveris, ut constructiones ex calculo erutæ, itemque theoremata hinc derivata etiam more veterum seu synthetice demonstrentur. Non improbo consilium, ubi hoc facile fieri potest, & ea fini problemata quædam per leges rationum reduximus, quemadmodum problema 116 ( §. 259. *Analys.* ): ubi ipsa reductio demonstrationem quæsitam continet, modo singulæ analogiæ verbis enuncientur. Enimvero cum per Algebram solvantur problemata, quæ a cognitione nostra adhuc procul sunt remota, defectu principiorum ad ratiocinandum requisitorum, per quæ ratiocinando colligi poterat quæsitum, quemadmodum in Geometria fecimus; multa haud raro theoremata intermedia essent invenienda, antequam demonstratio synthetica dari posset. Unde facile intelliges eam non esse in potestate tua. Sume exempli loco theorema, quod modo ( §. 176. ) elicimus: In triangulo rectangulo differentia hypothenusæ a semiperimetro est tertia proportionalis ad semiperimetrum & latus quadrati triangulo æqualis. Si demonstrationem syntheticam dare volueris, hæc analogia ex aliis notis colligenda per theoremata de ratione quantitatum. Enimvero in Geometria elementari nihil adhuc demonstratum est de perimetro trianguli rectanguli.

Quamobrem alia adhuc invenienda eſſent heoremata, antequam demonſtrationem conſummatam dare poſſis, quales dedimus in Geometria. Nobis jam non vacat eam in rem inquirere, ut exemplo dicta confirmaremus. Nemini igitur ſuademus, ut tempus in quærendis iſtiusmodi demonſtrationibus fallat, quod longe utilius in exercenda Analyſi conſumere datur. Quodſi vero obvia fuerit demonſtratio, eam addi non diſſuademus.

§. 178. Si exiſtimaveris demonſtrationes ſyntheticas dari poſſe, ſi veſtigiis calculi inſiſtens verbis enuncies, quæ per eum patent, & in reddendis rationibus ad leges calculi confugias; totus falleris: neque enim forma demonſtrationis mutabitur, ſi characteribus expreſſa verbis enuncientur. Abunde hoc videre licet in Phoronomia *Hermanni*, cujus prætenſæ demonſtrationes ſyntheticæ ſeu lineares, quas vocat, quantum diſtent a demonſtrationibus *Euclideis* nullo negotio deprehendet, qui cum fuerit in reſolvendis demonſtrationibus more noſtro verſatus reſolutionem demonſtrationum Hermannianarum tentare voluerit. Præſtat igitur in analyſi acquieſcere, quam per eandem reperta minus recte demonſtrare. Sane ipſe *Newtonus* (quod citra injuriam in maxima Viri ſummi merita dictum eſto,) multa corollariorum inſtar absque ulla demonſtratione ſubjicit propoſitionibus, quæ ſubinde prolixam deſiderant demonſtrationem, ſi *Euclideo* more evincenda eorundem veritas, immo corollariorum loco habet, quæ absque ulla demonſtratione pateant lectori, quæ poſita propoſitione minime ponuntur. Exempli loco eſt, quando problema inverſum virium centripetarum in ſectionibus conicis pro corollario directi habet, cum tamen converſio per ſe minime pateat, nec quis ferret in Geometria elementari, ſi ex parallelismo linearum demonſtrata angulorum æqualitate per modum corollarii absq; demonſtratione inferret: Ergo etiam parellæ ſunt lineæ, ſi anguli alterni fuerint æquales. Non omnes propoſitiones poſſe converti,

verti, ex doctrina logica de converſione ſatis manifeſtum eſt. Quamobrem ubi converſio per rationes logicas non ſtatim patet, converſa utique demonſtranda eſt. Immo cum ex principiis logicis demonſtrandum foret, propoſitionem converti poſſe; Geometris veteribus conſultius viſum ex principiis propriis, aliunde non ſupponendis demonſtrare converſam. Nos vero, qui omnibus juſtum ſtatuere pretium ſolemus, demonſtrationes logicas in numerum artificiorum heuriſticorum referimus, per quas reperire, nonnunquam ſaltem conjectare licet, propoſitionem aliquam datam & demonſtratam converti poſſe. Qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navat, is a rigore demonſtrandi ne latum quidem unguem recedere tenetur, ne methodi confuſæ notiones & de eadem concepta præjudicia noceant extra Matheſin: quod quam facile fieri poſſit, jam in ſuperioribus monuimus (§. 100. 101.).

§. 179. Ceterum cum demonſtrationibus ſyntheticis confundendæ non ſunt demonſtrationes, quibus evincitur conſtructionem juxta formulam per calculum erutam rite eſſe factam. In his enim ſupponimus quæſitum eo modo determinandum eſſe, quemadmodum exigit formula algebraica. Quoniam nos conſtructiones ad formulam retulimus, earundem demonſtrationes in ipſa conſtructionum explicatione jam continentur. Quodſi vero illas verbis enunciare velles, demonſtratio ubique adjicienda foret, de qua hic ſermo eſt. Ita in exemplo noſtro, ubi triangulum rectangulum conſtruendum ex formulis
$x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & $y = b^2 : \frac{1}{2}x$ (§. Fig. al-
255. *Analyſ.*); conſtructio pure geb.
enunciabitur hoc modo: 1. Eri- Tab.
gatur ad perimetrum BD per- XII.
pendicularis AB, quæ ſit ad la- a
tus quadrati areæ trianguli æ- Fig.
qualis in ratione dupla, fiatque 113.
BG ipſi lateri huic æqualis. 2. Quæratur ad BD, AB & BG quarta proportionalis BH. 3. Fiat BC ſemiperimetro æqualis & ex C in I transferatur modo inventa BH. 4. Super BI deſcribatur ſemicirculus & ad BO dimidiam ipſius BI, & BE dimidiam ipſius AB quæratur tertia proportionalis BK. 5. Ducatur denique

denique ex puncto K diametro BI parallela KL. Quodsi 6. punctum L cum extremis diametri B & I rectis BL & LI connectatur, prodibit triangulum rectangulum quæsitum BLI. Hoc modo si enunciaveris constructionem, ut prodeat resolutio problematis, quali forma exhibentur resolutiones in Geometria elementari; demonstratio sequens adjicienda utique est, ut manifestum evadat, suppositis formulis algebraicis tanquam veris, seu, uti loqui amamus, iisdem concessis, constructionem esse veram. Nimirum quoniam BD $= a$, AB $= 2b$, BG $= b$; erit quarta proportionalis BH $= 2b^2 : a$. Quare cum sit BC $= \frac{1}{2}a$ & CI = BH, erit BI $= x$, seu hypothenusa trianguli rectanguli construendi per formulam primam. Jam quia porro BO $= \frac{1}{2}x$, BG = BE $= b$, erit BK $= b^2 : \frac{1}{2}x$, adeoque altitudo trianguli rectanguli construendi. Quoniam itaque recta KL est ipsi BI parallela & BLI semicirculus super hypothenusa trianguli descriptus; erit BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa $\frac{1}{2}a - 2b^2 : a$ & altitudo $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quod erat construendum. Suppono nimirum hic tanquam notum, quomodo triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa sit construendum. Quodsi enim notum non sit, demonstratio ex principiis Geometriæ elementaris facile contexitur. Etenim angulus BLI cum sit in semicirculo *per constr.* rectus est (§. 317 *Geom.*), adeoque BLI triangulum rectangulum, cujus hypothenusa BI (§. 91. 95. *Geom.*). Linea KL est diametro BI parallela & KB ad BC perpendicularis *per construct.* consequenter perpendicula inter easdem intercepta KB & ex L in BI demissum æqualia sunt (§. 226. *Geom.*). Enimvero KB est altitudini trianguli æqualis *per construct.* & perpendiculum ex L in BI demissum ipsa trianguli BLI altitudo (§. 227. *Geom.*). Patet itaque si supra hypothenusa describatur semicirculus & in ejus altero extremo erigatur perpendicularis altitudini æqualis, per ejus vero summitatem ducatur recta diametro parallela & punctum, in quo hæc secat semicirculum, connectatur cum extremis diametri; triangulum rectangulum datæ altitudinis supra hypothenusa data esse

eſſe conſtructum. Problema hoc cum ſua demonſtratione Elementis Geometriæ inſeri poterat, ex cujus quippe principiis eodem prorſus modo demonſtratur, quo problemata cetera ibidem demonſtrantur.

§. 180. Cum formulæ algebraicæ contineant regulas, per quas ex datis determinatur quæſitum, & per calculum ac demonſtrationem æquationis, niſi hæc in conditione ſeu hypotheſi problematis continetur, verum eſſe conſtet, quod ſic determinetur quæſitum, quemadmodum vult formula; qui conſtructiones ex formulis erutas pure enunciat & easdem deinde hiſce convenienter factas demonſtrat, in demonſtrando ſeſe non minus exercet, quam ſi in demonſtrationibus Arithmeticæ & Geometriæ elementaris verſetur. Quamobrem qui methodum demonſtrandi ſibi familiarem reddere intendunt, eadem extra Matheſin feliciter uſuri; iis omnino ſuadendum, ut conſtructiones pure enuncient & ad eam formam redigant, qua reſolutiones problematum in Geometria elementari exhibentur, atque deinde demonſtrationes, cum quibus jam nobis negotium eſt, ſuperaddant.

§. 181. Et quoniam problematum ſimplicium reductio per leges rationum, cujus exempla quædam dedimus (§. 259. 266. 289. *Analyſ.*), & reductio quadratici ordinis ad lineas reciprocas (§. 263. 265. 278. *Analyſ.*) propius accedit ad Analyſin veterum & demonſtrationes ad formam veterum componendas formaliter continet; eam negligere minime debet, qui methodum veterum cum methodo recentiorum conjungere voluerit. Probe nimirum notandum eſt, ſignorum uſu non variari ipſam methodum, quæ in modo ratiocinandi conſiſtit, ſed tantummodo facilitari & clariorem reddi, quemadmodum demonſtrationes veterum eædem manent, ſi noſtro more reſolutæ ope artis characteriſticæ ſymbolice repræſentantur. Sane per hoc, quod in Geometria elementari utamur ſignis, quorum in Algebra uſus eſt, demonſtrationes non fiunt algebraicæ, quemadmodum hebetiores judicant, ſed tantummodo brevius & clarius exprimuntur. Vocabula non

minus ſigna ſunt, quam ſigna alia, quæ in locum eorum ſurrogantur. Quemadmodum itaque eadem manet demonſtratio, ſi vocabula idem ſignificantia ſibi mutuo ſubſtituis, prouti in verſionibus accidere ſolet, ubi v. gr. Latinis ſubſtituis Germanica vel Gallica; ita nec alia evadit, ſi vocabulis alia ſigna ſubſtituis, quæ cum ipſis idem ſignificant. It perinde eſt, ſive dicas, triangulum BDE ſimile eſt triangulo BAC, ſive ſcribas, △ BDE ∽ △ BAC: etenim ſi verbis reddere volueris, quæ ita ſcripſiſti, verbis iſtis eadem efferre teneris, perinde ac dicendum eſt, das Dreyecke BDE iſt dem Dreyecke BAC ähnlich, ubi Germanice reddere volueris, quod Latine dictum fuerat.

§. 182. In problemate 114. (§. 257. *Analyſ.*), quo data area trianguli rectanguli, cujus latera ſunt in proportione continua, inveniri jubentur latera, & reductio, & conſtructio ſingularia habet, quæ attentionem tyronum merentur. In reductione notandus eſt modus, quo eliminatur quantitas alterutra incognita, utpote a regula generali recedens (§. 141. *Analyſ.*). Notanda quoque eſt applicatio calculi irrationalium, qua formula efficitur ſimplicior. In conſtructione autem notatu dignum eſt artificium, quo numeri irrationales in lineis exhibentur & radices quoque quadrato quadratæ per Geometriam elementarem conſtruuntur. Quæ enim in aliquo problemate ſingularia occurrunt, ad ea advertendus eſt animus, cum eidem inſinuentur artificia, quibus utendum in caſu ſimili, quoties is occurrit. Et *ſelecta* dicuntur problemata, quæ vel in veritatum cognitu neceſſariarum notitiam nos deducunt, vel artificia ſuggerunt, quibus ars inveniendi locupletatur, ipſo uſu rectius diſcenda, quam per præcepta, cum hæc non ſatis intelligantur, niſi per exempla. Quamobrem qui in Analyſi proficere voluerit, non ſine ſingulari attentione circa ſingula problemata verſari tenetur, ut, ſi qua nova occurrunt, ea comparatione cum regulis generalibus inſtituta advertat & memoriæ infigat.

§. 183.

§. 183. Non commemoramus hic alia, quæ in ceteris problematis annotabit attenta mente & ſolutionem, & conſtructionem perluſtrans, ne præter neceſſitatem juſto prolixiores videamur. Unum tamen eſt, quod notaſſe non piget, ſcilicet ex problemate 124 (§. 275. *Analyſ.*) patere, per Algebram ſubinde prodire formulas, quæ ſtatim dant conſtructionem, quam veteres ſuo modo invenerunt. Patet in hoc problemate ratio, quod in æquatione inveſtiganda inſiſtamus iisdem principiis, quibus uſi veteres in eruenda conſtructione. Et quamvis problema ſequens (§. 279. *Analyſ.*) de latere Pentagoni inveniendo contrarium inſinuare videatur; videbis tamen, ſi attentius rem conſideres, nos totos in eo eſſe, ut inveſtigemus relationem lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni regularis eidem circulo inſcriptorum ſimul, qua nititur conſtructio veterum. Eam vero non dare regulas reductionis generales; ſed utendum hic eſſe ſingulari artificio ſubſtitutionis, quo neglecto, per æquationem $x^2 = 4b^2 - b^4 : a^2$, vel per $\frac{10}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ longe alia prodiret conſtructio, quam dedere veteres. Immo niſi relatio lateris Pentagoni ad latus Decagoni & Hexagoni ſimul ex inventis veterum nobis cognita & perſpecta fuiſſet; non facile adfuiſſet ratio, cur de iſta ſubſtitutione cogitaſſemus. Duo igitur hic probe notari velim, cum in veritate inveſtiganda multum relictum ſit tentaminibus, in problematum reſolutionibus algebraicis & præſertim in formularum conſtructionibus operam dandam eſſe, ut problema & ejus conſtructio efficiatur dependens a veritatibus aliis jam inventis, quæ dependentia in methodo veterum, qua uſi ſumus in Geometria elementari, & in demonſtrationibus propoſitionum ſyntheticis unice attenditur, & ut ea fini tententur ſubſtitutiones, quibus locus eſſe poteſt. Eluceſcit hinc uſus, quo commendatur ſtudium in veritatibus nobis jam notis analytice inveſtigandis, ſi nempe proponantur tanquam quærendæ. Iſtiusmodi enim inveſtigationes efficient, ut animum attendas ad artificia, quæ alias eundem non ſubirent, & quibus poſthac felici ſucceſſu uſurus es

in inveſtigandis iis, quæ nondum cognita, ſed adhuc latent. Neque enim ſufficit, artificia quædam eſſe in poteſtate noſtra, verum etiam requiritur ratio, cur eadem mentem noſtram ſubeant, quando iisdem commode utimur: id quod ex principiis noſtris Pſychologicis abunde patet. Ratio autem iſta non ſemper a nobis pendet, ſed a caſu, qui poteſtati noſtræ ſubducitur. Quodſi vero artificia nobis fuerint familiaria, quoniam iisdem jam ante uſi ea attentione conveniente memoriæ infiximus, probe conſcii varia eſſe tentanda, ubi veritas latens eruenda, eadem nobis in memoriam revocamus: id quod denuo per principia noſtra pſychologica manifeſtum eſt, ut nihil affirmetur, quod non ex iisdem demonſtrari poſſit, ſi demonſtratio exigatur, quamvis defectum demonſtrationis hic ſuppleat experientia domeſtica, ſi quis dictis fidem habere voluerit.

§. 184. Forſan nec inconſultum erit quædam adhuc moneri circa examen Regulæ Renaldinianæ polygonum regulare quodcunque circulo inſcribendi. Conſtat ex Elementis *Euclidis*, conſtare modum, quo trigonum, quadratum, pentagonum, octogonum, decagonum, Quindecagonum circulo inſcribitur, & idem patet ex anterioribus. Quamobrem totum examen huc redit, ut inveſtigetur valor lateris cujusdam polygoni, aut ſaltem partis ejusdem per regulas demonſtratas, deinde vero idem valor eruatur per regulam *Renaldini*, quæ ſi vera fuerit, valor per eam inventus erit alteri æqualis. Quodſi ergo hoſce duos valores æquales ponas, & exinde eruas contradictionem; hinc patebit, regulam Renaldinianam eſſe falſam, cum alteram veram eſſe conſtet. Nimirum hinc agnoſcitur illam contradicere veritati manifeſtæ, adeoque per principia logica, quibus nititur tota methodus demonſtrandi per indirectum, colligitur, eam falſam eſſe debere. Examen adeo præſens pendet a principio contradictionis & in applicatione methodi demonſtrandi per indirectum conſiſtit. Eodem artificio utimur etiam in aliis, veluti ſi quis dederit Quadraturam circuli, ſumta diametro pro unitate, valorem peripheriæ erui-

eruimus in fractionibus decimalibus, quia constat numeros *Ludolphi* notissimos cum veritate consentire. Quodsi enim ab his diversi prodeant, prætensam Quadraturam circuli veritati contradicere, adeoque falsam esse colligitur. Novi equidem quod huic examini manus victas dare nolint, qui circuli quadraturam sibi invenisse videntur: sed hi sunt, qui ignorant, quomodo numeros suos eruerit *Ludolphus* & quales sint methodi recentiorum, quibus investigantur series infinitæ pro circulo, unde iidem numeri deducuntur. Valeat hic pervulgatum istud: Cum ignorante principia non est disputandum.

§. 185. Quantum intersit discriminis inter constructionem elegantem & minus elegantem, clarissime elucescit, ubi utramque constructionem trianguli rectanguli ex data area una cum angulo uno obliquo inter se conferre volueris. Ipsa vero hæc collatio etiam manifestabit rationem, cur constructio secunda prima sit elegantior. Constructio secunda simplicitate sua sese ita commendat, ut in Geometriam referri possit. Habet autem hoc singulare constructio, quod recta simul repræsentet sinum totum & rectam datam, sicque loco quartæ proportionalis invenienda sit tertia, singulari modo per constructionem trianguli rectanguli determinata, qui ab eo longius recedit, quem in Elementis Geometriæ docuimus, etsi hujus quoque fundamentum in illis ipsis contineatur. Quodsi quis constructionibus æquationum in Algebra sedulam operam navaverit; is varias solutiones ex Elementis demonstrandas deteget, quæ in usum constructionum elegantium in Algebra non sine tyronum commodo posthac Geometriæ elementari inserentur, ut hæc ampliorem nanciscatur usum & studium construendi formulas algebraicas facilitetur.

§. 186. Problema 152. cum duobus sequentibus (§. 325. & *seqq. Analys.*) inter difficilia referri solet. Ita autem eadem resolvimus, ut nec tyronibus quicquam difficultatis facessant. Præmittitur in resolutione primi theorema, quod tanta facilitate ex principiis Geometriæ ele-

mentaris demonstratur, ut ipsum in iisdem Elementis locum mereatur. Hoc ipso autem exemplo docemur, quod in usum Analyseos & Geometriæ sublimioris supplementum quoddam Elementorum Geometriæ conscribi posset, quo studium algebraicum & Matheseos mixtæ multum facilitaretur. Sane si hoc ipsum theorema, quod ad resolvendum problema præsens primus adhibuit *Newtonus*, ab *Euclide* jam fuisset traditum, Mathematici alii non tantopere in resolvendo hoc problemate desudassent. Confirmat igitur problematis præsentis resolutio ea, quæ superius (§. 176.) inculcavimus de non contemnendis theorematis, quæ nullum usum habere videntur, seu quorum saltem usum prævidere minime licet. Vi hujus theorematis solo calculo literali absque regulis Algebræ ex sinu & cosinu anguli simpli eruuntur sinus & cosinus dupli, tripli, quadrupli, quintupli, sextupli, septupli &c. ita ut hoc problema jam superius c. 3. exhibere potuissemus, ubi usus calculi litteralis in inveniendis theorematis explicatur. Apparent adeo denuo, quam ardua solo calculo literali eruantur, etiamsi Algebra prorsus ignota supponatur. Inprimis vero animum attendi convenit ad artificium, quo ex theorematis particularibus eruitur universale, Consistit hoc in reductione ad theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo, & reductio ipsa nititur comparatione formularum particularium problematis præsentis cum formulis particularibus problematis superioris. Principium hoc reductionis amplissimum habet usum in omni arte inveniendi, etiam extra Mathesin, quemadmodum jam in Psychologia me monuisse memini. Inprimis autem reductio problematis unius ad aliud, quod notius & simplicius, in Geometria sublimiori & in calculo integrali usum prorsus eximium habet. Quamobrem consultum est hoc artificium tempestive observari. Tollit reductio hæc in casu præsente omnem laborem, eumque valde molestum, quo alias opus foret, si eodem modo legem progressiones in infinitum, quam formulæ particulares loquuntur, ex earundem comparatione elicere

cere velles, quemadmodum ſupra fecimus, cum theorema generale de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo investigaremus. Oſtendi etiam, quomodo ex formula coſinus multipli expungatur valor ſinus ſimpli per legem ſubſtitutionis, ut coſinus multipli determinetur per ſolum ſimplum atque ſinum totum. Hoc modo eruuntur alia theoremata particularia & univerſale quoque aliud prodiret, ſi eadem ſubſtitutione valores $b^2$, $b^4$, $b^6$, $b^7$, &c. eliminare velles. Quem calculi moleſtia non deterret, is eundem tentare poteſt, quamvis non opus habeamus hiſce theorematis, cum dato ſinu facile reperiatur coſinus (§. 16. *Trigonom.*). Ceterum hic quoque elucet, quomodo infinita theoremata comprehendantur uno generali. Sed cum hic nihil occurrat, quod non jam animadverſum fuerit in problemate 29. (§. 95. *Analyſ.*), plura ea de re non addimus. Corollarium vero, quod adjicitur, attentionem meretur, ut notes alibi etiam profutura. In eodem ſcilicet oſtendimus, quod idem theorema inſerviat determinandis chordis arcuum multiplorum, quo ſinus angulorum multiplorum determinantur: immo quod hinc etiam pendeat multiplicatio arcus & conſequenter anguli per datum numerum. Notandum igitur hic eſt, in ſcientiis problematum quoque æquipollentiam eſſe perpendendam non modo, ne entia præter neceſſitatem multiplicentur; verum etiam ut in ſolutione problematis inveſtiganda ſeligamus illud, quod facilius ſolvi poteſt. Sane in noſtro caſu non adeo prona erat ſolutio, ſi loco ſinus anguli multipli inveſtigandam tibi propoſuiſſes chordam arcus multipli. Neque enim meditatio te duxiſſet ad theorema geometricum, cui debetur ſolutionis problematis præſentis facilitas. Multum in philoſophia uſum habet, ut æquipollentia agnoſcantur. Quamobrem qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navant, ea probe notare tenentur, ad quæ hic attentionem excitamus.

§. 187. Problema de tangente arcus multipli ex data tangente ſimpli invenienda, quod ope-

operosissime solvitur ab aliis, hic nullo fere negotio solvitur, si nostram solutionem cum aliis solutionibus compares. Notanda igitur sunt artificia, quæ facilitatem solutionis pariunt. Primum artificium idque palmarium in eo consistit, quod problema hoc consideretur tanquam dependens ab altero de inveniendo sinu anguli multipli ex dato sinu simpli. Unde intelligitur, quantæ sit utilitatis, ut dependentiæ problematum a se invicem habeatur ratio. Quoniam vero hoc pacto prodit formula, tangentem anguli multipli ex datis sinu & cosinu simpli, non ex tangente simpli determinans, quod quærebatur; ideo per legem substitutionis valores sinus & cosinus simpli eliminamus, ut eorum loco introducatur tangens anguli simpli. Duæ sunt quantitates exterminandæ, nimirum *a* & *b*. Singulari autem ratione hic accidit, ut cum una earundem *a* eliminetur etiam altera *b*: quod, nisi succederet, substitutione nihil efficeres, propterea quod valorem ipsius *a* per tangentem *t* expressum ingreditur simul *b* & vicissim valorem *b* per *t* expressum simul *a*. Atque hæc forsan ratio fuit, cur problema nostrum independenter a problemate sinus & cosinus anguli multipli inveniendi solvendum esse visum fuerit. Unde patet veritatem investigaturum non nimis tribuere debere iis, quæ apparent, nec ubi impossibilitas fuerit demonstrata, non obstante apparentia tentandum esse, quod successu cariturum videtur. Tentaminibus enim in veritate investiganda multum esse tribuendum nemo diffitebitur, nisi qui eorum usum nondum fuit expertus. Ceterum hic quoque attentionem meretur artificium, quo utimur in abbreviando calculo eumque a perplexitate tædiosa liberando, dum pro coëfficientibus substituimus literas majores, pro quibus deinde calculo absoluto iterum reponuntur earundem valores. Etsi enim eodem artificio jam antea fuerimus usi, velutis in problematis 54 & 81 (§. 165. 213. *Analys.*); applicatio tamen in casu præsenti non statim cuilibet succurrit, nisi qui in anterioribus ad idem artificium animum attendit & distincta notione comprehensum memoriæ infixit,

quem-

quemadmodum ex natura animæ vi principiorum noſtrorum pſychologicorum facile demonſtratur. Ea enim dedimus in Pſychologia principia, per quæ ratio a priori dari poteſt in caſu dato eorum, quæ in anima contingere obſervamus. Denique notandum eſt, quomodo formula pure enuncietur, ut prodeat ſolutio facillima intellectu, in locum formulæ ſurroganda. Continet ea legem progreſſionis in infinitum, qua nituntur formulæ particulares, qualem in anteriori problemate deduximus ex formulis particularibus in uſum generalis eruendæ. Ceterum quæ hic annotavimus de problemate tangentis multipli ex tangente ſimpli arcus inveniendæ, eadem etiam tenenda ſunt de problemate ſecantis anguli multipli ex data ſecante ſimpli invenienda (§. 328. *Analyſ.*).

§. 188. Quæ hactenus de Algebra tradidimus, non progrediuntur ultra terminos ab Arabibus aſſignatos, a quibus eandem accepimus, niſi quatenus ope Arithmeticæ literalis, ſeu calculi univerſalis, ad quem animum non adverterunt Arabes, multo amplior efficitur illius uſus, ut per eam pateat acceſſus ad ea, quæ inacceſſa videbantur. Ante inventam vero Arithmeticam literalem Algebram ulterius provehere ſtuduerunt Itali, nec infelici prorſus ſucceſſu. Cum enim Arabes in æquationibus quadraticis ſubſiſterent, *Scipio Ferreus* ulterius progreſſus dedit regulas ex æquationibus cubicis extrahendi radicem, a *Cardano* publici juris factas, *Ludovicus* vero *Ferrarienſis* etiam ex æquatione biquadratica radicem extrahere docuit. Neque Algebra in hunc usque diem ulterius promota, ex quo ope calculi literalis & calculi differentialis adeo amplificatus eſt ejusdem uſus, ut nihil videatur a cognitione noſtra adeo remotum, quin ad ipſum aperiat aditum. Etſi enim *de Tſchirnhauſen* inveniſſe ſibi viſus eſt methodum univerſalem quamcunque æquationem affectam reducendi ad puram, eamque Analyſi ſuæ demonſtratæ inſerere nullus dubitavit *Carolus Reyneau*, tentanti tamen apparebit, eam non ſuccedere niſi in æquationibus cubicis, ad quam etiam eandem tantummodo applicavit *de Tſchirn-*

*hauſen* & qui eandem approbavit *Reyneau*: eandem enim methodum ad æquationes altioris gradus applicaturus incides in æquationes, quæ ſuperioris gradus ſunt quam reſolvenda; id quod monendum utique fuerat, ne Algebra complementum ſuum videatur nacta, a quo tamen longiſſimo intervallo adhuc diſtat. Non difficile fuerat DN. *de Tſchirnhauſen* hoc obſervare, modo applicationem in ſuperioribus æquationibus tentaſſet, nec nimia forſan in vires ſuas confidentia, quæ ipſum non in unum errorem ſeduxit, difficultates oblatas pro ſuperabilibus reputaſſet, quæ omnino inſuperabiles ſunt, ſaltem hactenus ſuperari minime poſſunt. Quoniam itaque methodus univerſalis extrahendi radicem exactam ex æquatione quacunque data deſiderabatur, nec adeo facile erat eandem reperire; ad extractionem radicis per approximationem confugerunt Analyſæ & methodum ingenioſam jam dedit *Franciſcus Vieta*. Alii alio modo idem tentarunt, quod prolixe recenſeri noſtri jam non eſt inſtituti: neque enim nobis propoſitum eſt hiſtoriam Algebræ ſcribere, ſed ea tantummodo enarrare, quæ ſcitu neceſſaria ſunt lectori Elementorum noſtrorum Analyſeos, ut majore luce fruatur, nec quaſi in tenebris verſetur ignorans, cur ea de extractione radicum ex æquationibus altioribus tradamus, quæ capite quinto continentur. Nos hic retinuimus methodum facillimam, quam Arithmetici Noſtrates (die Rechenmeiſter) in Algebra numeroſa *Coſſicam mechanicam* appellarunt, & quam etiam adhibuit *Newtonus* & *Raphſon* in peculiari Tractatu multis exemplis illuſtravit, ſed noſtro more captui tyronum magis accommodatam, qua radix æquationis reperitur in fractionibus decimalibus tam exacta, quantum deſideratur. Et quoniam *Hallejus* regulas duas univerſales inveſtigavit, alteram rationalem, alteram irrationalem, quæ merito commendatur; easdem eadem methodo inveſtigare docuimus, qua in exemplis ſingularibus uſi ſumus, & quæ breviori ac trita magis via ad easdem ducit, quam qua *Hallejus* ad easdem pervenit. Methodus hæc in praxi ſatisfacit, nec ea ulteriorem Algebræ perfectio-

fectionem desiderat. Neque enim in praxi desiderantur numeri irrationales, quales prodeunt per inventas generales formulas radicum in æquationibus cubicis (§. 358. *Analys.*); sed numeri rationales. Quando vero ex irrationali actu extrahenda radix, eam quærimus in fractionibus decimalibus, quales reperimus per methodum, de qua jam nobis sermo est. Applicatio autem formularum irrationalium plerumque plus pareret laboris quam methodus approximandi. Immo si in formula substitutis numeris pro literis extrahenda foret radix altioris gradus, non inutiliter recurreremus ad methodum approximandi, qua statim uti poteramus (§. 365. *Analys.*). Non tamen ideo damnamus, si quis in extrahendis radicibus ex æquationibus superioribus ulterius progrediatur: facit enim ad perfectionem theoriæ seu incrementum scientiæ & ad artem inveniendi locupletandam. Enimvero cum de commoda methodo extrahendi radicem ex æquatione quacunque data sive exacte, sive per approximationem laborarent Mathematici, in naturam æquationum inquisiverunt & quomodo eædem præparentur, sicubi opus est, investigarunt. Unde enata sunt problemata ista, quæ intio hujus capitis explicantur.

§. 189. Problemata ista intellectu facilia sunt ei, qui in anterioribus attentionem suam sumque acumen desiderari minime passus, ut adeo opus non sit quædam de iis moneri. Calculum in singulis adeo perspicue repræsentavimus, ut in eodem versantes levi saltem attentione opus habeat ad problematum solutionem intelligendam. Usus autem eorum, quæ de natura æquationum docentur, elucescit ex problemate 165. (§. 351) de extrahenda radice rationali, si quam habet æquatio; id quod rarissime accidit. Duplicem proponimus methodum. Altera nititur principio substitutionis; altera vero principio de natura æquationum, quod scilicet æquationes altiores prodeant per multiplicationem simplicium. Atque hæc posterior ingeniosior est priori. Non amplius turbabit tyrones, quod alterum æquationis membrum hic ponatur *o*,

modo in anterioribus fuerint satis attenti, quoniam per reductionem aliquoties prodit talis æquationum forma. Quando primum tale quid occurrit, attoniti quasi hærent tyrones, quod aliquid nihilo æquale esse debere existiment non advertentes ad diversitatem signorum, ut ipsis succurreret axioma: si æqualia ab æqualia subtrahuntur, nihil relinquitur. Nimirum hic differentia nulla est: differentia autem nulla per fictionem quandam nihilo æqualis ponitur. Proprie enim loquendo ei, quod non est, nullum prædicatum positivum competere potest juxta canonem tritissimum scholasticorum: Non entis nulla sunt prædicata. Æqualitas est prædicatum, quod quantitatibus convenit: quod vero nullum est, cum non sit in quantitatum numero, nec æquale dici potest alteri. Fingitur adeo nihil quantitatis esse aliquam quantitatis speciem, ut de eo prædicatum, quod nonnisi quantitatibus convenire potest, enunciari possit fiducia axiomatis, quamlibet quantitatem æqualem esse sibimetipsi. Nugari videretur, qui extra usum in calculo talia proponeret, veluti si demonstrare vellet, nihilum æquale esse nihilo. Hac tamen demonstratione subsistit fictio adeo utilis in calculo algebraico. Simile quid obtinet, si alterum æquationis membrum fuerit quantitas privativa, ubi tyrones perspicaciores ad diversitatem signorum in altero æquationis membro non attenti, vel saltem ignari, quantitates privativas excedere positivas, hærent existimantes aliquid poni minus nihilo, seu quod aliquid est æquale esse debere ei, quod nihilo minus est, cum tamen revera minus nihilo ponatur ei, quod minus nihilo est æquale, quatenus in calculo fingimus quantitatis defectum per eam, quæ deficit, æstimabilem esse veram quantitatem. Fictiones istiusmodi plurimum habent utilitatis in calculo, nec iisdem carere possumus. Nodum in scirpo quærit, qui contra eas difficultates facessit. Ad fictiones recurrendum est etiam extra Mathesin, nisi nescire velis, quæ scitu maxime necessaria sunt. Ita in Jure naturali Civitatem fingimus instar personæ liberæ, quæ sui juris est & cui per naturam

suam

ſuam certa competunt jura, immo individuum unum phyſicum in plura moralia dividimus & individuum morale phyſico contradiſtinguimus tanquam perſonam diverſam ab eo, immo unum eundemque hominem diſtinguimus a ſe ipſo, quaſi duæ ſint perſonæ, quarum una alteri obligatur, & uni in alteram competunt certa jura: qua fictione utitur ipſe Apoſtolus, dum hominem novum veteri contradiſtinguit. Nec ignotæ ſunt iſtiusmodi fictiones in jure Romano. Exemplo ſit poſtliminium, ut taceamus alia, ubi fictiones non adeo manifeſtæ ſunt, alio loco a nobis commemorandæ. Quodſi dicas in explicanda æquationum natura poni $x = -b$, adeoque quantitatem poſitivam æqualem privativæ: id quod utique contradictorium ſit, cum quantitates privativæ poſitivis heterogeneæ ſint, adeoque ratio æqualitatis, qualem ſupponit æquatio, inter eas intercedere nequeat (§. 24. *Analyſ.*). Enimvero cum in æquationibus compoſitis radix non minus quantitas negativa, quam poſitiva eſſe poſſit, ea autem deſignetur litera $x$, quamdiu valor ejus ignoratur ſignum eidem adjiciendum dubium eſt: in caſu autem dubio ſigno + afficitur: id quod etiam in ſequentibus fiet, ubi utile eſt non attendi ſignorum diverſitatem. Quando itaque in formatione æquationum ſumitur $x = -b$, non ſupponitur, quantitatem poſitivam privativæ æqualem eſſe, ſed tantummodo ſumitur, eadem litera $x$ indigitari poſſe non minus quantitatem poſitivam, quam negativam, cum ſigna primitiva ſint prorſus arbitraria, & quantitatem primitivam ſubinde utiliter conſiderari inſtar poſitivæ, quando fictionem iſtiusmodi fert natura rei, nec ea in errorem ſeducit.

§. 190. In reſolutione problematis 168 (§. 358. *Analyſ.*), quo ex æquatione cubica extrahi jubetur radix, ſingulare occurrit artificium, quo quantitas incognita $x$ dividitur in duas partes indeterminatas $y$ & $z$ & harum ope æquatio data transmutatur in aliam, quæ duas incognitas indeterminatas continet. Etenim hoc ipſo obtinetur, ut lege comparationis terminorum utraque determinetur,

& sic inveniatur quæsitum per partes. Nimirum quia $y$ & $z$ indeterminatæ sumuntur, ideo licet ponere $3y^2z + 3z^2y = py + pz$ & $y^3 + z^3 = q$, non alia de causa, quam quia commodum accidit, ut per primam æquationem eruatur valor unius indeterminatæ $z$, qui in æquatione altera substitutus dat valorem ipsius $y$ atque $z$ determinatum. Æquatio $y^6 - qy^3 = -\frac{1}{27}p^3$ duas habet radices, quarum altera quod sit $= y$, altera vero $= z$, ex eo liquet, quia ex æquatione prima $3y^2z + 3z^2y = py + pz$, reperitur $y = p : 3z$ perinde ac $z = p : 3y$ & valor ipsius $y$ in altera $y^3 + z^3 = q$ substitutus dat æquationem $z^6 - qz^3 = -\frac{1}{27}p^3$ eandem cum anteriore. Manifestum enim est æquationem, quæ ducit ad valorem determinatum quantitatis cognitæ, duas habere debere radices, quarum una denotat $y$, altera vero $z$, etsi perinde sit quam ipsi $y$, quam vero ipsi $z$ tribuere velis, cum quantitates $y$ & $z$ pro arbitrio assumantur, ut pro majore & minore habere possis, quam volueris. Hoc artificio jam usi sumus in investiganda regula tollendi secundum terminum ex æquatione data (§. 343 *Analys.*), ut nempe coëfficiens secundi termini propter indeterminatam $t$ poni possit nihilo æqualis. Diversa tamen in præsenti casu ejus applicatio est.

§. 191. Limites æquationum eo modo investigare docuimus, (§. 356. *Analys.*), qui in Commentariis ad Geometriam *Cartesii* proponitur. Habet enim hoc singulare ea methodus, quod Algebram, quæ tota nititur ratione æqualitatis, extendat ad rationem inæqualitatis, ubi inæqualia mediante signo $>$ vel $<$ eodem modo inter se comparantur, quo in Algebra æqualia mediante signo $=$ & reductio per similia axiomata instituitur, quo eadem in Algebra fieri consuevit. Hanc ipsam vero methodum, etsi hactenus attentione sua indignam eam judicaverint Analystæ, etiam alibi usui esse posse, exemplo aliquo facili monstrare lubet. Ponamus quæri, qualis sit ratio, quam habent duæ quantitates inæquales ad eandem tertiam. Resolutio problematis ita sese habet:

sit Major $= x$ Data tertia $= a$
minor $= y$

erit

erit

$$x > y$$

$$\overline{\qquad\qquad} \; a$$

$$ax > ay$$

Fiat $x : a = t : v$

erit $x = \frac{at}{v}$

adeoque $\frac{a^2t}{v} > ay$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{at}{v} > y$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{t}{v} > \frac{y}{a}$$

Ergo ob $\frac{t}{v} = \frac{x}{a}$

$$\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$$

hoc est $x : a > y : a$

Habemus adeo theorema: *Majus ad idem majorem rationem habet, quam minus*, istiusmodi analysi investigatum, qua problemata algebraice solvuntur. Non alio fine proponimus hoc problema, quam ut ideam quandam hujus methodi animo tyronum ingereremus. Consultum igitur erat, ut exemplum eligeremus facile & ex anterioribus jam notum. Videbimus deinceps applicatione methodorum, quæ nobis innotescunt, ad exempla notissima & maxime vulgaria haud raro detegi maxime ardua: sit ita, quod methodorum inventores, ne ardua nullo fere negotio detexisse videantur, eas applicent ad exempla, quæ sublime quid spirant & intellectu difficilia deprehenduntur.

§. 192. Extractio radicis ex serie infinita (§. 366. *Analys.*) etiam artificium quoddam singulare habet, quod consistit in diversa applicatione assumtionis quantitatum indeterminatarum lege comparationis determinandarum, quo supra jam usi sumus in tollendo secundo termino ex æquatione data (§. 343. *Analys.*) & in extrahenda radice ex æquatione cubica (§. 358. *Analys.*). Series enim assumtitia, qua exprimitur valor ipsius $x$, qui quæritur, coëfficientes habet indeterminatos, lege comparationis determinandos. Ut vero determinari possint, perinde ac superius lege substitutionis æquatio proposita, cujus coëfficientes determinati sunt, trans-

transmutatur in aliam, quam coëfficientes indeterminati cum determinatis ſimul ingrediuntur, quemadmodum fecimus in extractione radicis ex æquatione cubica (§. 358. *Analyſ.*), etſi alio principio hic nitatur coëfficientium indeterminatorum determinatio, cujus ratio ex ipſo contextu liquet, & quod affine eſt ei, quo eodem fine uſi ſumus in tollendo ſecundo termino ex æquatione data (§. 343. *Analyſ.*), quamvis ob aliam rationem. Patet hinc, quam utile ſit ut artificia analytica, quibus in reſolutione problematum utimur, inter ſe conferantur, quo pateat eorum, quæ eadem ſunt, diverſa applicatio. Quodſi enim in rationem applicationis inquiſiveris, id non modo efficiet, ut eadem in caſu eodem recurrente facilius memoriam ſubeat; verum etiam hoc ipſo conſequeris, ut eandem prout caſus exigit ipſemet variare poſſis. Iſtiusmodi autem disquiſitiones apprime neceſſariæ ſunt ei, qui in arte inveniendi generali proficere vult ſtudio Algebræ & intellectui conciliare geſtit eam habitudinem, qua ad artificia heuriſtica diverſimode applicanda opus habet. Problema, de quo jam loquimur, maximæ utilitatis eſt: continet enim methodum, quæ *Regreſſus ſerierum* nomine venit & cujus maxima eſt utilitas in Geometria ſublimiori, quemadmodum ſuo loco oſtendemus. Equidem problema hoc tanta perſpicuitate expoſuimus, ut tyro in anterioribus cum laude verſatus idem absque ulla difficultate intelligat, niſi calculi moleſtias fugiat; quodſi tamen quis ab iisdem abhorreat, idem tamdiu ſeponat, donec regreſſu ſerierum ad ſolvenda problemata opus habuerimus.

§. 193. Extractiones radicum ex æquationibus, de quibus diximus in capite præſente, uſum tantummodo habent in ſolutionibus problematum arithmeticis. Quamobrem docendum quoque erat, quomodo æquationes altiores geometrice conſtruantur. Per rectas & circulum eædem conſtrui nequeunt: ſed confugiendum hic eſt ad lineas curvas. Quamobrem cum de lineis curvis præter circulum nihil doceatur in Geometria elementari; noſtrum erat ante docere,

cere, quomodo Algebra ad Geometriam sublimiorem, quæ de curvis agit, applicetur, ut ejus ope curvarum descriptiones & proprietates ac symptomata, hoc est, prædicata absoluta & conditionata inveniantur. Applicationem hanc debemus *Cartesio*, qui eam docuit in Geometria, sed non ad captum tyronum. Facile tamen reperiri poterat, si quis ad vulgaria animum attendere voluisset. Tota enim in hoc consistit, ut curva definiatur per æquationem & ex ea adhibitis artificiis in Algebra usitatis eliciantur curvarum constructiones, proprietates & symptomata. Ecce igitur tibi facillimam ad hanc methodum, quæ inexhaustæ utilitatis est in Geometria sublimiori, viam. Constat ex elementis Geometriæ (§. 327. *Geometr.*), semiordinatam PM esse mediam proportionalem, inter abscissam AP & complementum diametri PB, si utamur terminis in doctrina de Curvis receptis & initio capitis sexti explicatis. Quare si sit diameter AB $= a$, abscissa AP $= x$, semiordinata PM $= y$, erit complementum diametri PB $= a - x$, consequenter

Tab. II. Fig. 17.

$$AP : PM = PM : PB$$
$$x : y = y : a - x$$

adeoque $y^2 = ax - x^2$

Habemus adeo æquationem, quæ circulum definit. Quodsi jam ponamus, nos nescire, qualis sit hæc curva, ea, quæ de eadem nobis innotescere possunt, hoc modo eruimus.

Sit $y = 0$
erit $ax - x^2 = 0$
$$ax = x^2$$
$$a = x$$

Patet itaque 1. curvam secare rectam AB in B,

Sit $x = 0$
erit $y^2 = 0$
$$y = 0$$

Unde liquet 2. curvam secare rectam AB in A.

Sit $x = \frac{1}{2}a$
erit $y^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2$
$$= \frac{1}{4}a^2$$
$$y = \frac{1}{2}a$$

Videmus itaque, 3. si ex medio rectæ AB erigatur perpendicularis ED, curvam transire per punctum D.

Quoniam eadem curva transit per A & B (*vi num.* 1. & 2); evidens

evidens est, 4. eam concavitatem rectæ AB obvertere. Et quoniam patet, singula sese eodem modo habere debere, si semiordinatæ ex altera parte sumantur; porro liquet, 5. Curvam esse in se redeuntem. Quæratur jam magnitudo rectæ MC ex puncto C in medio rectæ AB assumto ad extremitatem semiordinatæ PM seu punctum in Curva M ductæ.

Sit AC $= \frac{1}{2}a$ MC $= z$
AP $= x$
erit PC $= \frac{1}{2}a - x$
adeoque $PC^2 = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$
$PM^2 = ax - x^2$ per naturam Curvæ.

Ergo $z^2 = \frac{1}{4}a^2$

$z = \frac{1}{2}a$

6. Recta igitur ex puncto C in quodlibet peripheriæ punctum M ducta æqualis est rectæ AC, seu dimidiæ rectæ AB, consequenter rectæ omnes ex eodem puncto C in peripheriam ductæ æquales sunt (§. 87. *Arithm.*): quæ est proprietas circuli, per quam definiri solet in Geometria elementari.

Hinc vero porro 8. liquet, Curvam hanc describi, si recta CA circa punctum fixum C in gyrum agatur: quæ est definitio circuli realis.

Ponamus $y = \frac{1}{2}a$
erit $\frac{1}{4}a^2 = ax - x^2$

$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = o$
$x - \frac{1}{2}a = o$
$\frac{1}{2}a - x$

$x = \frac{1}{2}a$

Quoniam superius (n. 3) reperimus $y = \frac{1}{2}a$, si fiat $x = \frac{1}{2}a$; ideo patet, 9. In nullo alio puncto, quam in C semiordinatam rectæ dimidiæ AB æqualem esse posse. Si sit PM $= y$, PC $= v$, CM $= \frac{1}{2}a$ (n. 6); erit per theorema *Pythagoricum*:

$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2$

adeoque $\frac{1}{4}a^2 > y^2$

$\frac{1}{2}a > y$

$y < \frac{1}{2}a$

Quamobrem 10. ubivis extra centrum semiordinata minor dimidia recta AB, consequenter cum minor sit semiordinata in centro erecta CD (n. 3), semiordinatæ autem sint chordarum dimidiæ; 11. diameter chordarum maxima est.

Sit distantia sermiordinatæ a centro PC $= v$, PM $= y$, erit
$\frac{1}{4}a^2 = y^2 + v^2$ (n. 6).

Et

Et si alia PC$=t$, PM alia $=z$,

erit $\frac{1}{4}a = z^2 + t^2$

Quare $z^2 + t^2 = y^2 + v^2$

sit $t > v$

erit $z^2 < y^2$

$z < y$

12. Semiordinata itaq; $z$ tanto minor alia quacunque semiordinata $y$, quanto magis a centro distat, consequenter chordæ tanto minores, quanto a centro remotiores.

Tab. II. Fig. 18. Sit AB$=a$, AP $=x$, erit PB $=a-x$, adeoque

$AP^2 = x^2$

$PM^2 = ax - x^2$ ex natura Curvæ

$AM^2 = ax$

Similiter $PB^2 = a^2 - 2ax + x^2$

$PM^2 = ax - x^2$

$MB^2 = a^2 - ax$

$AM^2 = ax$

$MB^2 + AM^2 = a^2 = AB^2$

Quoniam $AB^2 = AM^2 + PB^2$, triangulum AMB rectangulum est, consequenter 13. angulus AMB in semicirculo rectus.

Et quia $AM^2 = ax$, $BM^2 = a^2 - ax$; erit $a : AM = AM : x$

$a : BM = BM : a - x$

hoc est AB : AM = AM : AP

AB : BM = BM : PB

Est igitur 14. Chorda media proportionalis inter diametrum AB & segmentum adjacens.

Quodsi quæratur recta TM ex puncto quocunque T intra circulum assumto in peripheriam ducta; ducatur per centrum C & punctum T recta AB, quæ erit diameter circuli & ex puncto peripheriæ M demittatur perpendicularis MP, quæ erit semiordinata. Sit jam Tab. II. Fig. 19.

AC$=$CB$=a$  AP$=x$

BT$=b$  erit PC$=a-x$

erit CT$=a-b$  PT$=2a-b-x$

Porro

$PM^2 = 2ax - x^2$ ex natura circuli

$PT^2 = (2a-b)^2 - 4ax + 2bx + x^2$

$TM^2 = (2a-b)^2 - 2ax + 2bx$

$= (2a-b)^2 - 2(a-b)x$

$= TA^2 - 2CT.AP$

Est adeo 15. Quadratum rectæ TM æquale excessui quadrati rectæ TA supra rectangulum ex duplo distantiæ puncti T a centro C in abscissam AP puncto M respondentem. Hoc theorema in Elementis non extat:

tat: ex eo tamen conſequuntur, quæ in iis demonſtrantur. Nimirum quia 2 CT conſtans eſt, decreſcente abſciſſa AP deſcreſcit quoque rectangulum ex AP in 2 CT & cum quadratum rectæ TA non minus conſtans ſit, quo minus fuerit rectangulum ex 2 CT in AP, eo major evadet exceſſus quadrati rectæ TA ſupra hoc rectangulum, conſequenter eo majus erit quadratum rectæ TM, quippe eidem æquale, adeoque etiam ipſa recta TM. Et quando TM incidit in diametrum, ſeu punctum M in A, quadratum ipſius TM æquale evadit quadrato ipſius TA, conſequenter TA major eſt qualibet TM, adeoque maxima rectarum, quæ ex puncto T in peripheriam duci poſſunt. Incidimus adeo 16. in theorema 63 (§. 303. *Geom.*).

Tab. II. Fig. 18. Ante invenimus (n. 14) $AM^2 = AB \cdot AP$, hoc eſt, quod quadratum chordæ ſit æquale rectangulo ex diametro in abſciſſam. Quamobrem cum creſcente abſciſſa AP creſcat arcus AM, creſcat etiam rectangulum ex diametro AB in abſciſſam AP; ideo patet 17. quadratum chordæ majoris eſſe majus quadrato chordæ minoris, conſequenter chordam majorem ſubtendere arcum majorem, quam minor, ſeu chordam arcus majoris majorem eſſe, chordam minoris minorem.

Alia ex æquatione ad circulum deducuntur in ipſa Analyſi præſertim infinitorum, qua in Geometria ſublimiori carere minime poſſumus. Ex hactenus dictis abunde patet, quomodo applicatione Algebræ ad ea, quæ ex *Euclide* notiſſima ſunt, methodus definiendi curvas per æquationes & ex iis deducendi earum geneſes ac conſtructiones, proprietates aliaque ſymptomata innoteſcere potuerit. De ſectionibus conicis *Appollonius* ſimiliter demonſtravit theoremata, quorum ope per æquationes definiuntur, quemadmodum in hoc capite fecimus. Quamobrem apparuit, eandem methodum ad conicas quoque ſectiones applicari poſſe. Atque ſic enata eſt methodus tractandi curvas per æquationes, ſeu Algebram ad Geometriam ſublimiorem applicandi. Hæc non eo fine a nobis adducuntur, ut inventorum laudi detrahamus; ſed ut diſcamus, vulga-

rium meditationem ducere ad maxime ardua, & ea neglecta inventores ſibimetipſis obeſſe, ſi quando per ambages quærunt, quæ obvia ſunt recta via incedentibus, utque tyrones ideam hujus methodi animo concipiant, quæ in ejus applicatione ad altiora facem præfert. Qui recta via in inveniendo progreditur, ex iis, quæ cognita atque trita ſunt, colligit quæ nondum patent, parum ſollicitus, quamnam utilitatem ſint habitura, quæ deteguntur. Sed de his dicemus, ubi Artem inveniendi ex inſtituto expoſituri ſumus.

§. 194. Diximus ſuperius (§. 169.), nondum invento calculo univerſali Algebram numeroſam jam applicari potuiſſe ad Geometriam, ut per eam detegerentur theoremata & problematum conſtructiones. Immo ipſa etiam applicatio ad Geometriam ſublimiorem fieri poterat non ſine ſucceſſu. Dictis igitur fidem facere noſtrum eſt uno alteroque exemplo. Ponamus ex. gr. quæri relationem recta-
Tab. rum AT & TE, ex eodem pun-
II. cto T extra circulum dato ducta-
rum, quarum altera AT circu- Fig.
lum tangit in A, altera TE e- 20.
undem ſecat.

Sit diameter BE $= 1$, TB $= x$
erit AC $= \frac{1}{2}$ TC $= \frac{1}{2} + x$
ſit porro AT $= 2$ TE $= 1 + x$

Quoniam AT perpendicularis ad AC (§. 308. *Geom.*), erit

$$TC^2 = AC^2 + TA^2 \text{ (§. 417. } \textit{Geom.}\text{)}$$

adeoq; $(\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + x^2 = (\frac{1}{2})^2 + 2^2$

$$2 \cdot \frac{1}{2}x + x^2 = 2^2$$

ſed $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ per cond. probl.

ergo $1x + x^2 = 2^2$
hoc eſt $(1 + x)x =$
ſive TE . TB $=$ AT$^2$

Quamobrem TE : AT $=$ AT : TB

Habemus itaque duo theoremata: 1. Quadratum tangentis in hypotheſi problematis eſt æquale rectangulo ex ſecante in ejus portionem extra circulum. 2. In eadem hypotheſi tangens eſt media proportionalis inter ſecantem & ejus portionem extra circulum.

In Algebra ſpecioſa diametrum appellamus $a$, tangentem $b$. Cum hæc ſigna ſint primitiva, perinde eſt ſive diametrum $a$,

ſive 1, & num tangentem $b$, an vero 2 dicas, modo in calculo univerſalitatem conſerves, ut in locum 2 quemcunque numerum alium ſurrogare poſſis ſive rationalem, ſive irrationalem, ſive integrum, ſive fractum, qui in dato caſu exprimit rationem ad diametrum tanquam unitatem.

Tab. I. Fig. 3. Analyſ. Ponamus porro problema 13. (§. 255. *Analyſ.*) ſolvendum eſſe per Algebram numeroſam, ſed univerſaliter, quemadmodum ſolvitur per ſpecioſam. Solutio hæc erit:

ſit $AB + BC + CA = 6 \quad AC = x$

Area $\Delta = 2^2$ erit $BC + BA = 6 - x$

$AC^2 = x^2$

Cum ſit $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (§. 417 *Geom.*) & $AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 - 2\, AB.\, BC$ (§. 216 *Arithm.*); erit $AC^2 = (AB + BC)^2 - 2 AB.\, BC$ (§. 91 *Arithm.*). Eſt vero $(AB^2 + BC)^2 = 6^2 - 2.6x + x^2$ & $AB.\, BC = 4.\, 2^2$ (§. 392 *Geom.*). Quamobrem

$$x^2 = 6^2 - 2.6x + x^2 - 4.\, 2^2$$

$$0 = 6^2 - 2.6x - 4.\, 2^2$$

$$2.\, 6x = 6^2 - 4.\, 2^2$$

$$x = \frac{6}{2} - 2.\, \frac{2^2}{6}$$

Patet itaque hypothenuſam trianguli rectanguli $x$ eſſe æqualem exceſſui ſemiperimetri $\frac{6}{2}$ ſupra tertiam proportionalem ad ſemiperimetrum $\frac{6}{2}$ & latus quadrati 2 areæ trianguli æqualis. Unde liquet, problema geometrice conſtrui, ſi ad ſemiperimetrum & latus quadrati areæ trianguli æqualis quæratur tertia proportionalis & hæc ex ſemiperimetro auferatur.

Æquatio pro circulo erat $y^2 = ax - x^2$, ubi $a$ diametrum denotat, ſive igitur diametrum dicas $a$, ſive 1 aut 2, modo obſerves ea, quæ ad univerſalitatem calculi conſervandam præcepimus, ex æquatione $y^2 = 1x - x^2$, vel $y^2 = 2x - x^2$ eadem erues, quæ paulo ante ex altera eruimus (§. 194).

Immo nondum invento calculo litterali poterant quoque quantitates datæ exprimi literis, quibus in Geometria lineas indigitamus, veluti in exemplo primo

Tab. II. Fig. 20.

Diameter $= BE \quad TB = x$
radius $= AC \quad TC = AC + x$
tangens $= AT \quad TE = BE + x$.

Unde

Unde reſultat æquatio

$$AC^2 + 2AC.x + x^2 = AC^2 + AT^2$$

$$2AC.\,x + x^2 = AT^2$$

$$(BE + x)x = AT^2$$

h. e $TE.\ TB = AT^2$

vel in problemate altero

Tab. I. Fig. 3. Analyſ. Peripheria $\triangle = AB + BC + CA$

$AC = x$

Area $\triangle = DE^2$ $BC + BA = AB + BC + CA - x$

$AC^2 = x^2$

Unde reperitur ut ante æquatio:

$$x^2 = (AB + BC + CA)^2 - 2(AB + BC + CA)x + x^2 - 4DE^2$$

$$o = (AB + BC + CA)^2 - 2(AB + BC + CA)x - 4DE^2$$

$$2(AB + BC + CA)x = (AB + BC + CA)^2 - 4DE^2$$

$$x = \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA) - \frac{2DE^2}{AB + BC + CA}$$

Tab. II. Fig. 17. Similiter ſi diameter circuli dicatur AB, ſemiordinata PM, abſciſſa AP; æquatio ad circulum eſt $PM^2 = AB.\ AP - AP^2$: unde eadem deducuntur, quæ æquatione $y^2 = ax - x^2$ deduximus.

Talia monemus, ut appareat veteribus plura in poteſtate fuiſſe, quam exiſtimavere, propterea quod ad ſtudium mathematicum non eam attentionem attulerunt, quam in ſuperioribus commendavimus, ut methodos intimius perſpicere ea diſcernentes, quæ ſunt legum methodi, ab iis, quæ characteriſticæ tribuenda & ut characteriſticæ ubi vis commodum faciamus uſum: neque enim iidem characteres æque ſatisfaciunt in omni caſu, ſed alii aliis non ſine utilitate haud raro ſubſtituuntur. Neque vero eſt, quod excipias, nos in calculo univerſali numeroſo & ſubſtitutis linearum appllationibus communibus adhibere artificia ex characteriſtica, qua in Algebra ſpecioſa utimur, petita, veluti dum potentias linearum deſignamus per exponentes numeris vel literis majoribus, quibus lineæ denotantur, adſcriptis inſtar apicum. Etenim hanc denotationem jam indicavit *Keplerus* in Harmonica, calculo literali adhuc ignorato, & per ea eadem patere poterat, quæ de natura numerorum coſſicorum, quos vocat, tradidit *Stifelius* in Arithmetica integra multo ante, quam *Vieta* de Arithmetica literali cogitaret & *Hariottus* atque *Carteſius*

*tesius* eandem ulterius perficerent. Et quamvis recentior characteristica commodior sit, ipsa tamen methodus per eam non variatur, quæ etiam absque omni characteristica subsistit: sit ita, quod deficiente characteristica commoda subinde tantæ suboriantur molestiæ, quas devorare non est cujusvis, & ea requiratur attentio, ut ab errore immunem te præstes, quem non quivis afferre valet. Hæc ignorare non potest, qui ad characteristicam, qua hodie in Arithmetica utimur, eam attentionem attulerit, quam in superioribus commendavimus, & quæ acumen istud, quo ea, quæ sunt legum methodi, ab iis, quæ characteristicæ debentur, separantur, confert.

§. 195. Circulus per æquationem algebraicam definiri potest, quia punctorum omnium
Tab. II. Fig. 18. M ad diametrum AB constans quædam relatio est, quæ exprimitur per relationem semiordinatæ ad abscissam, demittendo scilicet ex puncto quolibet M perpendiculam PM in diametrum AB, ut abscindatur AP. Unde facile intelligitur idem succedere debere in aliis curvis ubi similis relatio obtinet. Quamobrem cum constet, *Apollonium* de parabola, hyperbola & ellipsi seu sectionibus conicis tale quid demonstrasse, statim prævidere licet, methodum, qua in circulo usi sumus, in iisdem quoque adhiberi posse. Enimvero possunt puncta curvæ referri ad quamcunque aliam rectam positione datam: id quod cum usui sit in sequentibus, exemplo circuli hoc ipsum declarare lubet. Ducatur recta AL, quæ circulum in C tangat, erit ea ad radium GC perpendicularis (§. 308. *Geom.*). Ducatur quoque Tab. II. Fig. 19.
DA, quæ circulum tangit in D, adeoque ad radium DG perpendicularis (§. *cit.*), cum etiam CG sit perpendicularis ad GD (§. 143. 78. *Geom.*); erit AL diametro DE paralella (§. 258. *Geom.*) & AD ad eandem perpendicularis (§. 230. *Geom.*), adeoque semiordinata (§. 370. *Analys.*). Ducatur semiordinata alia quæcunque PM continuanda, donec diametro DE in Q occurrat, erit MQ ad DE perpendicularis. Sit AC = DG = $a$, AP = $x$; PM = $y$, erit QM = $a - y$, adeoque per naturam circuli, cum sit

QM²

$$QM^2 = DQ.QE$$
$$a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$$
Quæ quatio circulum definit reſpectu tangentis AL.

Fiat jam $x = o$, erit
$$a^2 - 2ay + y^2 = o$$
$$a - y = o$$
$$a = y$$
hoc eſt, in origine abſciſſæ A ſemiordinata AD eſt radio circuli æqualis.

Sit $x = a$, erit
$$a^2 - 2ay + y^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$$
$$y^2 - 2ay = o$$
$$y - 2a = o$$
$$y = 2a$$
hoc eſt, ſemiordinata CN diametro circuli æqualis, ſeu perpendicularis CN ad AC curvæ in N occurrit.

Sit $x = 2a$, erit
$$a^2 - 2ay + y^2 = 4a^2 - 4a^2 = o$$
$$a - y = o$$
$$a = y$$
hoc eſt ſemiordinata LE radio circuli æqualis.

Quodſi quæratur recta GM, cum ſit per theorema Pythagoricum
$$GM^2 = MQ^2 + QG^2$$
erit $GM^2 = 2a^2 - 2ay + y^2 - 2ax + x^2$;

eſt vero ex natura curvæ
$$a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2;$$
Ergo $GM^2 = a^2$
$$GM = a$$

Quare ſi ponamus, nos ignorare, ad quam curvam ſit æquatio; patet hinc eam eſſe ad circulum.

Nimirum quando ex æquatione data eruuntur, quæ de curva cognoſci poſſunt, tum ſemper ſupponitur, non conſtare, ad quamnam curvam ſit æquatio. Quodſi ſemicirculus DNE ad rectam AL referretur, ſemiordinata PO foret $y$, adeoque $QO = y - a$. Quamobrem cum eadem prodiret, quæ ante æquatio; alterum ejus membrum $a^2 - 2ay + y^2$ duas habet radices $a - y$ & $y - a$: id quod indicio eſt, ſemiordinatam recta AC & minorem, & majorem eſſe poſſe, conſequenter ex ipſa æquatione intelligitur, Curvam a ſemiordinata ſecari in duobus punctis. Quoniam itaque in C eandem nonniſi in uno puncto N ſecat, id indicio eſt, quod

quod in C eandem tangat. Similiter quia in A & L semiordinata nonnisi unum valorem habet; hinc conficitur, quod semiordinatæ AD & LE curvam similiter tangere debeant. Unde liquet curvam esse in se redeuntem, & ejus puncta referri ad lineam, quæ tota extra curvam cadit, ab ea tamen non distat. Distantia enim a tota curva æstimatur ex perpendiculari minima, quæ hic nulla est.

Suadendum omnino est, ut tyrones notent, quomodo curvæ agnoscantur, & a se invicem distinguantur, nimirum relatione punctorum ad rectam quandam positione datam, & circulum referant ad varias rectæ positiones, ut totius methodi vim ac potestatem rectius ac intimius perspiciant. Hoc enim pacto non modo nihil difficultatis habebit, quod in capite præsenti occurrit; verum etiam doctrina de Locis geometricis, quæ omnem rectæ illius positionem possibilem supponit, non perturbabit tyronem. Immo in genere notandum est, si ad maxime obvia & notissima applicentur methodi novæ, in quas incidimus; haud raro talia offerri, circa quæ hærent etiam exercitatiores, ubi in applicatione methodi ad nondum cognita occurrunt. Exemplum suppeditat æquatio, quam modo dedimus pro circulo $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$. Etenim si sumis, eam explicare relationem quadrantis DMC ad rectam AC, & ponis AP = AC, seu $x = a$, per ea, quæ vidimus in æquatione præcedente (§. 193), prodire debere videtur $y = o$. Unde miraris, ubi prodit $y = 2a$. Verum enimvero ubi consideras, æquationem $a^2 - 2ay + y^2$ habere duas radices, alteram nimirum $a - y$, alteram $y - a$, & priori respondere QM, posteriori autem QO; hinc disces, per æquationem $a^2 - 2ay + y^2 = 2ax - x^2$ tam semicirculi superioris DNE, quam inferioris DCE ad rectam AL relationem exprimi, consequenter in puncto C, ubi valor unus ipsius PM sive $y = o$, etiam prodire debere valorem alterum ipsius $y = 2a$, recta nimirum PO in CN degenerante. Quodsi tale quid occurreret in tractatione æquationis, cui, quænam curva respondeat, adhuc ignoratur; unde hoc fiat, non adeo facile animadverteres, & multum omnino olei ac operæ perderes, antequam ex perturbatione eluctarii

ctari valeres. Similiter ubi ponis $x = o$ & $x = 2a$, prodit $a^2 - 2ay + y^2 = o$, adeoque $y - a = o$ & $a - y = o$, quæ utraque æquatio dat eundem valorem nempe $y = a$. Unde vides in contactu D & E duas radices æquales habere æquationem, quemadmodum deinceps supponitur in methodo tangentium, & sine quo principio *Cartesius* ad methodum suam tangentium non pervenisset. Non addimus plura, cum hactenus dicta abunde sufficiant ad persuadendum utilitatem meditationis eorum, quæ nobis notissima sunt, ut eorundem ope detegantur alia, quorum alias cogitatio animum nunquam subiissent.

§. 196. Quodsi hanc methodum, quam adeo fœcundam experiris in circulo, etiam ad curvas alias, quas tractarunt veteres, adplicare volueris; non omnes promiscue per æquationes definiri posse animadvertes, ubi eodem modo puncta eorum refers ad rectam quandam positione datam. Non succedet in spiralibus *Archimedis*, nec in Quadratrice *Dinostratis*, quemadmodum sub finem capitis videbimus. Quoniam itaque ex iis, quæ de circulo diximus, & per sectiones conicas confirmantur, didiceris, quod æquatio curvam definiens supponat constantem relationem puncti cujuslibet ad eandem rectam positione datam, hinc utique patet, non dari posse æquationem ad curvam, cujus puncta ad rectam positione datam constantem relationem minime habent. Atque adeo non miraberis, nec hærebit aqua, ubi curva offertur, quæ per istiusmodi æquationem explicari nequit. Et patet ratio, cur *Cartesius* curvas distinxerit in algebraicas & non algebraicas, quarum illas vocat Geometricas, has vero mechanicas, propterea quod existimavit, illas solas in Geometriam recipi posse, has vero ex eadem excludi debere, propterea quod ignoravit æquationes differentiales, de quibus dicemus in Analysi infinitorum, & quarum ope non minus algebraice tractantur curvæ, quæ a *Cartesio* mechanicæ appellantur, quam quas geometricas appellat. Et sic patet ratio divisionis Curvarum in algebraicas & transcendentes, quam tradimus (§. 377. 380. *Analys.*).

§. 197. Notandum vero est artificium, quo æquatio curvæ particularis reducitur ad generalem, quæ infinitas curvarum species sub se comprehendit: id quod fit exponentium indeterminatorum surrogatione in locum determinatorum, quo artificio jam usi sumus in anterioribus, veluti in theoremate generali de binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95. *Analys.*). Probe quoque notandum est, quod in istiusmodi æquationibus observanda sit lex homogeneorum, quæ præcipit, ut termini singuli æquationum habeant dimensiones numero æquales, hoc est, ut unus valor prodeat ductis tot rectis in se invicem, quot in se invicem sunt ducendæ, ut prodeat quilibet alter. Etsi enim in Geometria non detur magnitudo, quæ ultra solidum, quod trium dimensionum est, & tribus rectis in se invicem ductis resultat, assurgit; in Algebra tamen fictione non inutili admittuntur hypersolida, quæ ductu quotlibet rectarum in se invicem in infinitum resultant. Nititur hæc fictio principio, quod inter duas lineas infinitæ cadere possint lineæ mediæ continue proportionales, quemadmodum ex genesi potentiarum in infinitum progredientium liquet, veluti si ponas numeros in progressione geometrica 1. 2. 4. 8. 16. 32. &c. in infinitum, hoc est 1. $2^1$ $2^3$. $2^4$. $2^5$ &c. in infinitum, ubi inter 1 & $2^2$ una, inter 1 & $2^3$ duæ, inter 1 & $2^4$ tres, inter 1 & $2^5$ quatuor cadunt numeri medii continue proportionales, & sic porro in infinitum. Etsi enim hic numeri omnes, quorum ductu in se invicem resultant termini ulteriores, sint inter se æquales; constat tamen, vel ex Geometria elementari, in qua v. gr. rectangulum reducitur ad quadratum eidem æquale, & parallelepipedum ad cubum sibi æqualem, ea, quæ ductu linearum inæqualium in se oriuntur, reduci posse ad talia, quæ oriuntur ductu totidem æqualium in se invicem. Sufficiant hæc in gratiam tyronum dicta, ut ipsis aliqua lux affundatur in considerandis hypersolidis, quæ Algebra admittit. Inprimis autem attentionem meretur æquatio, quæ eminenter continet omnes æquationes ad algebraicas curvas. Etenim in eo latent tria arti-

artificia, nimirum 1. quod æquationis alterum membrum sit nihilum, de quo artificio jam supra diximus (§. 189.); 2. quod terminus unus repræsentet in casu particulari plures, ut adeo coëfficientes explicandi sint non uno, sed diversis modis, 3. quod in æquatione nulla habeatur ratio signorum, quæ in particularibus variant æquationibus, sed termini omnes afficiantur signo +, ne opus sit plures formare æquationes generales, ubi omnes particulares sub una comprehendi possunt, quod sane artificium maximi faciendum. Enimvero ut applicatio formulæ generalis manifesta evadat, lubet eam applicare ad circulum. Æquatio generalis est:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = o$$

Æquatio ad circulum:

$$y^2 + ax - x^2 = o$$

Vides hic abesse $xy$, nec ullum adest membrum constans ex mere cognitis, adeoque $cy^r x^s + df = o$, consequenter formula generalis contracta hæc relinquitur:

$$ay^m + bx^n = o$$

Est igitur

$$\underline{ay^m = y^2}$$

adeoq; $a = 1$
$m = 2$

Porro

$$\underline{bx^n = + ax} \qquad \underline{bx^n = - x^2}$$

adeoq; $b = a\ n = 1 \qquad b = -1\ n = 2$

Docet adeo hoc ipsum exemplum, quomodo terminus unus in generali comparetur cum pluribus in particulari, ut coëfficientes indeterminati in generali determinentur ex particulari. Patet etiam, quomodo signum + in formula generali non obstet, quo minus coëfficiens negativus determinetur ex particulari, dum hic reperitur $b = -1$. Habet nimirum $b$ in casu præsenti valorem duplicem, alterum positivum $+a$, alterum negativum $-1$.

§. 198. Qui quæ de circulo diximus probe perpendit, ei non hærebit aqua circa ea, quæ de sectionibus conicis aliisque curvis in præsenti capite, & de locis geometricis in sequente demonstrantur. Incepimus a parabola, quæ est sectionum Conicarum simplicissima. Æquatio ejus $y^2 = ax$. Quodsi fiat

$$\underline{x = o}$$

erit $\underline{y^2 = o}$

$$y = o$$

Atque adeo patet 1. in origine abscissæ A curvam secare rectam datam, ad quam refertur, AX.

Tab. II. Fig. 22. Sit alia abscissa AP = $o$, eidem respondens semiordinata PM = $z$, erit $z^2 = va$.

Ponamus $v > x$

erit $av > ax$

adeoque $z^2 > y$

$z > y$

2. Crescentibus adeo abscissis, semiordinatæ quoque crescunt, consequenter curva in infinitum continuari potest, & ab axe AX continuo magis magisque recedit.

Si fiat $x = a$

erit $y^2 = a^2$

$y = a.$

3. Quando igitur abscissa parametro æqualis, etiam semiordinata eidem æqualis est, consequenter si abscissa parametro æqualis, semiordinata & abscissa æquales sunt.

Sit $y = \frac{1}{2} a$

erit $ax = \frac{1}{4} a^2$

$x = \frac{1}{4} a$

4. Si ergo semiordinata semiparametro æqualis, quarta diametri parte a vertice A seu origine sua distat.

Quodsi æquationem ad parabolam cum æquatione pro omnibus curvis algebraicis conferre volueris; cum hæc sit:

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = o$$

pro parabola vero

$$y^2 - ax = o$$

& in hac deficiat $xy$ & terminus constans ex mere cognitis respondens ipsi $df$, æquatio generalis contrahitur in

$$ay^m + bx^n = o$$

estq; $ay^m = y^2$ $bx^n = -ax$

adeoq; $a = 1$, $m = 2$ $b = -a$, $n = 1$

Hæc addere libuit, ut appareat, eodem modo tractari posse æquationem ad parabolam, qua tractavimus æquationem ad circulum. Cetera enim patent per resolutionem problematum in hoc capite propositorum.

§. 199. De methodo tangentium, qua utimur problemat. 181. 189. 491. (§. 410. 440. 491. *Anal.*), quædam adhuc annotanda sunt. Tangentes curvarum facillime determinantur per calculum differentialem, quemadmodum in Analysi infinitorum docemus. Quoniam vero sectiones conicas referre mini-

minime licet ad diametrum, nisi præsupposita tangente, cui semiordinatæ sunt parallelæ & quæ ex puncto contactus ducitur; ideo necessarium fuit tangentem determinari per Algebram communem. Adhibuimus itaque methodum *Cartesii*, quæ nititur hoc principio, quod in contactu duæ radices evadant æquales: id quod superius in circulo
Tab. reperimus (§. 195.). Ponamus enim rectam TR secare
II. curvam in M & N; evidens
Fig. est, quod, si abscissæ AP &
23. AQ dicatur $x$ eidem respondere duas semiordinatas PM & QN, per $y$ in æquatione explicari potest. Ducatur alia $tr$, quæ eandem curvam secat in punctis $m$ & $n$: habebimus denuo duas semiordinatas $pm$ & $qn$, per quas explicatur $y$ in æquatione data. Patet autem abscissam unam PM continuo crescere, & alteram QN continuo decrescere, donec punctis M & N in contactu coincidentibus in æquatione data una alteri fiat æqualis. Ad hæc qui animum advertit, nullo negotio deprehendet, quomodo ad methodum istam pervenire licuerit. Patebit autem suo loco, subtangentem per hanc methodum prodire eandem in sectionibus conicis, quæ invenitur per calculum differentialem. Etsi autem hæc methodus videatur universalis, ad tantas tamen in curvis altioribus calculi perplexitates deducit, quæ vix videntur superabiles. Unde in ea perficienda plurimum desudarunt Geometræ, donec tandem ope calculi differentialis obtentum fuerit quod quærebatur.

§. 200. In Ellipsi $ay^2 = abx - bx^2$ (§. 420. *Anal.*). Quodsi hic ponas

$$x = o$$

erit $$ay^2 = o$$

$$y^2 = o$$

$$y = o$$

Quamobrem patet, 1. in origine abscissarum curvam secare rectam positione datam.

Si fiat $$x = a$$

erit $$ay^2 = a^3 - a^3$$

$$= o$$

adeoq; denuo $y = o$

Unde liquet, 2. curvam quoque secare rectam, ad quam refertur, si abscissa sit datæ $a$ æqualis, adeoque concavitatem obvertere eidem

eidem rectæ: ex quo porro sequitur, cum ex altera parte eodem modo sese habeant, quæ modo reperimus, curvam esse in se redeuntem.

Fiat $b = a$

erit $ay^2 = a^2x - ax^2$

$y^2 = ax - x^2$

3. Æquatio adeo ad ellipsin degenerat in æquationem ad circulum, ut circulus pro specie quadam ellipseos haberi possit, nacturus nomen ellipseos æquilateræ, nisi jam antea nomine circuli insignita fuisset hæc curva.

Quodsi $a$ ponatur infinita, erit in æquat ione ad ellipsin

$$\frac{bx^2}{a} = o$$

adeoque $y^2 = bx$

Cum adeo æquatio ad ellipsin degeneret in æquationem ad parabolam, ideo liquet 4. In locum ellipseos, cujus axis infinitus est, surrogari posse parabolam eandem cum ellipsi parametrum habentem.

Quodsi quis hæreat in infinitate axis elliptici, & in eo, quod hinc colligatur $\frac{bx^2}{a} = o$; is evolvat, quæ in Ontologia de infinito mathematico demonstravimus.

§. 201. Eodem modo in hyperbola quoque generalia quædam ex æquatione ejus colliguntur. Æquatio ad hyperbolam est: $ay^2 = abx + bx^2$, seu $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$.

Sit $x = o$

erit $y^2 = o$

$y = o$

Patet ergo 1. in origine abscissarum curvam secare rectam positione tadam, ad quam ea refertur.

Sit $x = a$

erit $y^2 = ab + \frac{a^2b}{a}$

$= a^2 + ab$

$y = \sqrt{(a^2 + ab)}$

Unde liquet. 2. si abscissa fuerit axi transvero æqualis, semiordinatam fore mediam proportionalem inter axem transversum & compositam ex axe transverso & parametro.

Sit

Sit $x = b$

erit $y^2 = b^2 + \frac{b^3}{a}$

$y = \sqrt{\left(b^2 + \frac{b^3}{a}\right)}$

Patet adeo 3. Si abscissa fuerit parametro æqualis, semiordinatam esse mediam proportionalem inter parametrum & tertiam proportionalem ad axem transversum atque parametrum.

Sit alia abscissa $v$, alia semiordinata eidem respondens $z$; erit per naturam curvæ

$$z^2 = bv + \frac{bv^2}{a}$$

Quare si $v > x$

erit $bv > bx$

$\frac{bv^2}{a} > \frac{bx^2}{a}$

$bv + \frac{bv^2}{a} > bx + \frac{bx^2}{a}$

$y^2 > z^2$

$y > z$

Patet itaque 4. crescente abscissa crescere semiordinatam, adeoque curvam continuo magis magisque ab axe recedere, consequenter in infinitum continuari.

Quodsi æquationem pro hyperbola cum generali pro omnibus algebraicis conferre volueris; cum sit

$ay^m + bx^n + cx^r y^s + df = 0$

$ay^2 - abx - bx^2 = 0$

erit $cx^r y^s + df = 0$

$ay^m = ay^2$

$a = a \quad m = 2$

$bx^n = -abx \qquad bx^n = -bx^2$

$b = -ab \quad n = 1 \qquad b = -b \quad n = 2$

Reliqua in ipsa Analysi reperiuntur.

§. 202. Enimvero applicemus eandem methodum ad æquationem pro hyperbola intra asymptotas. Quoniam $xy = ab$,

erit $x = \frac{ab}{y}$.

Fiat. $x = 0$

erit $\frac{ab}{y} = 0$

adeoq; $y$ = infinit.

Patet itaque 1. in origine abscissarum semiordinatam esse infinitam.

Similiter cum sit $y = \frac{ab}{x}$

Si ponamus $x$ = infinit.

$$\text{erit } \frac{ab}{x} = o$$

$$\text{adeoque } y = o$$

Unde liquet 2. rectam, in qua sumuntur abscissæ cum curva non concurrere nisi intervallo infinito, seu ab eadem non distare nisi intervallo infinite parvo, quatenus $ab$ quantitas ordinaria per infinitam divisa dat particulam infinite parvam, quæ respective nihilum est.

Sit jam alia abscissa $v$, semiordinata alia $z$; erit per naturam curvæ $z = \frac{ab}{v}$.

$$\text{Ponamus } v > x$$

$$\text{erit } \frac{ab}{v} < \frac{ab}{x}$$

$$\text{adeoque } z < x$$

Videmus ergo 3. crescente abscissa decrescere semiordinatam, consequenter lineam curvam continuo magis magisque ad eam appropinquare rectam, in qua sumuntur semiordinatæ.

Quoniam itaque hæc cum curva non concurrit nisi infinito intervallo, aut potius ab eadem non distat nisi quantitate infinite parva, quando illa in infinitum continuatur (*vi num.* 2.), & in origine abscissarum semiordinata infinita (*vi num.* 1.); curva continetur inter duas rectas, quæ in infinitum excurrunt, & ad quas curva continuo propius propiusque accedit, nunquam tamen easdem secat. Continetur adeo inter asymptotos. Ex hoc exemplo apparet, quomodo ex æquatione colligatur, quod curva, quæ per eam definitur, habeat asymptotos.

§. 203. Sed demus etiam exemplum in curva quadam superioris generis, cujus æquatio perplexa videtur. Sit itaque $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + ax^2$, quam invenimus pro conchoide prima sive superiore (§. 538. *Anal.*); erit

$$y^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2 - x^4 - 2bx^3 - b^2x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$$

$$\text{Fiat } x = o$$

$$\text{erit } x^2 - 2bx = o$$

$$\frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} = \frac{a^2b^2}{o^2} + \frac{2a^2b}{o} = \text{infin.}$$

adeo-

adeoque $a^2 - b^2 = o$, respectu $\frac{a^2b^2}{o^2} + \frac{2a^2b}{o}$

Quare $y^2 = infin.$

$y = infin.$

Patet itaque 1. in origine abscissarum semiordinatam esse infinitam, consequenter curvæ asymptotum.

Fiat $x = a$

erit $y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2} + \frac{2a^2b}{a} + a^2 - a^2 - 2ab - b^2$

$= b^2 + 2ab + a^2 - a^2 - 2ab - b^2$

$= o$

$y = o$

Quando igitur 2. abscissa fit ipsi $a$ æqualis, semiordinata nulla est, adeoque curva rectam, in qua sumuntur abscissæ, secat.

Quoniam $y$ ex infinita nulla evadit, dum $x$ ex nihilo degenerat in $a$; necesse est 3. crescente abscissa decrescere semiordinatam.

Quia $y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - x^2 - 2bx - b^2$

$= \left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (x + b)^2$

$y = \sqrt{\left(\left(\frac{ab}{x} + a\right)^2 - (x + b)^2\right)}$

Est igitur $y$ latus trianguli rectanguli, cujus hypothenusa componitur ex $\frac{ab}{x}$ & $a$, crus unum vero ex $b$ & $x$. Unde liquet, 4. Si semiordinata infinita dicatur regula, recta $b$ distantia poli a regula, recta vero $a$ distantia verticis a regula, quemadmodum termini in Conchoide recepti sunt (§. 535. *Anal.*); semiordinatam esse crus trianguli rectanguli, cuius hypothenusa componitur ex tertia proportionali ad abscissam (ejus origine in regula constituta), distantiam regulæ a vertice & ejusdem a polo distantiam atque distantia ejusdem regulæ a vertice, crus vero alterum ex abscissa & distantia regulæ a polo.

Hinc 5. ex data abscissa BP, distantia regulæ a polo BC & a vertice BA reperitur semiordinata PM, si ex P intervallo BA intersecetur regula in O, & recta PO producatur, donec perpendiculari CH in polo erecta in H occurrat; tandemque intervallo CH intersecetur PM ad AB perpendicularis in M. Tab. II. Fig. 24.

Quoniam enim $PB = x$, $PO = a$, $BC = b$; erit $OH = \frac{ab}{x}$, consequen-



NB. Dieses Blat muß an gehörigen Ort gebracht werden.

ſequenter $PH = \frac{ab + a}{x}$, trianguli rectanguli PCH hypothenuſa. Quamobrem cum porro ſit $CP = b + x$; erit $CH = \sqrt{\left(\left(\frac{ab+a}{x}\right)^2 - (b+x)^2\right)} = y$, conſequenter quia PM = CH; erit PM ſemiordinata quæſita. Quodſi fiat CL = PB & CN = BA, ac LN ad BC perpendicularis; recta CN producta ſtatim reſecabit ſemiordinatam PM.

Manifeſtum itaque eſt, quomodo ex æquatione eruatur modus determinandi geometrice punctum curvæ reſpondens cuilibet abſciſſæ, quamvis æquatio primo intuitu videatur admodum perplexa. Ceterum in applicatione methodi generalis adhibentur varia artificia, ex anterioribus equidem nota, quæ tamen tyroni non ſtatim ſuccurrunt. Quamobrem hinc eluceſcit, quod jam ſæpe inculcavimus, artem exercendam eſſe per exempla, non per regulas particulares: etſi particulares annotandæ ſint, ubi occurrunt; ut tanto facilius ſuccurrant, quando denuo iisdem opus habemus. Non addimus de conchoide alia, quæ ex ejus æquatione deduci poterant, ne ſimus juſto prolixiores.

§. 204. Etſi ex dictis appareat, ductum curvæ hac methodo facillime indagari poſſe, ut de reliquis taceamus; non tamen exiſtimandum eſt, idem in qualibet promiſcue curva eadem facilitate ſuccedere. Etenim ſi in æquationibus altioribus occurrunt termini, quos duæ indeterminatæ ingrediuntur, nec earum ſeparatio in promptu eſt, quemadmodum vidimus in Conchoide (§. 203.); hærebit aqua. Sit e. gr. $y^3 - axy = x^3$. Quodſi ponamus $x = a$, prodibit $y^3 - a^2y = a^3$, æquatio cubica affecta, ex qua radicis extractio difficilis & cujus conſtructio geometrica per inferiora demum patet. Similiter, quamvis per calculum algebraicum, quæ quæruntur, haud raro mira facilitate eruantur, quemadmodum ſupra vidimus in circulo (§. 193.) & plurima capitis præſentis problemata loquuntur, quæ de ſectionibus conicis propoſuimus; ſubinde tamen calculus prolixus & intricatus evadit, prouti videre licet in probl. 193. 195. 209. (§. 449. 454. 492. *Anal.*).

§. 205. Nos ſectiones Conicas conſideravimus in plano & æquationes aſſumſimus, quæ eas definiunt. Hinc vero nondum

dum conſtat, curvas iſtas eſſe ſectiones coni, niſi ſupponas theoriam ſectionum Conicarum a veteribus traditam tanquam cognitam. Quamobrem conſultum eſſe duximus analytice demonſtrari, ſectione coni prodire has ipſas curvas, quas in plano conſideravimus, & quarum deſcriptiones, proprietates aliaque ſymptomata ex æquationibus aſſumtis deduximus (§. 511. & ſeqq. *Anal.*). Poteramus æquationes, quas aſſumſimus, eruere ex proprietatibus, quas ex ſectione coni derivavimus: ſed cur hoc minime fecerimus, jam monuimus (§. 514. *Anal.*). Ex. gr. pro Parabola ex ſectione coni deduximus

$$y^2 : q^2 = x : z$$

ubi $y$ & $q$ denotant ſemiordinatas, $x$ & $z$ autem ipſis reſpondentes abſciſſas.

Quoniam etiam eſt

$$y^2 : x = q^2 : z$$

erit $y^2 : ax = q^2 : az.$

Quare ſi ponamus, conſtantem $a$ talem aſſumi, ut ſit $y^2 = ax$; evidens eſt fore etiam $q^2 = az$, atque adeo in omni puncto curvæ eſſe Quadratum ſemiordinatæ æquale rectangulo ex abſciſſa in eandem rectam conſtantem. Poſſe autem $a$ talem aſſumi, ut ſit $y^2 = ax$ patet, quia $a$ tertia proportionalis eſt ad abſciſſam & ſemiordinatam. Idem etiam hoc modo patere poterat. Si alternando eſſe debet $y^2 : x = q^2 : z$ (§. 173. *Arithm.*) cum ratio non ſit niſi homogeneorum (§. 126. *Arithm.*), $x$ & $z$ denotare debent rectangula, quorum latus unum unius eſt $x$, latus unum alterius $z$, latus vero alterum unitas ſeu recta, quæ pro unitate ſumitur (§. 375. *Geom.*), utique eadem utrobique (§. 178. *Arithm.*). Quodſi ergo hæc recta efficere debet rectangulum, $1x$ æquale quadrato $y^2$, unitas iſta degenerare debet in tertiam proportionalem ad $x$ & $y$, quam fore eandem cum tertia proportionali ad $q$ & $z$ per modo demonſtrata patet. Unde manifeſtum eſt, æquationem ad ſectionem coni præſentem eſſe $y^2 = ax$, aut, ſi $a = 1$, $y^2 = x$. Notandum adeo hic eſt, ſi in æquationibus non appareat lex homogeneorum obſervata, termini pauciorum dimenſionum coëfficientem eſſe unitatem, ſeu rectam quandam determinatam, quæ pro unitate

sumitur. Cum autem quælibet recta pro unitate assumi possit, unitatem esse eandem non sumendum, sed demonstrandum est. Ita sumere licet $y^2 = x$, ubi coëfficiens ipsius $x$ est 1; sumere quoque licet $q^2 = z$, ubi coëfficiens ipsius $z$ est 1. Enimvero non licet sumere coëfficientes ipsarum $x$ & $z$ esse æquales; sed hoc demonstrandum, quemadmodum ex modo dictis claret. Nihil hic supponitur, quod non sit ex notione numeri rationalis integri manifestum, quem in communi Arithmetica practica consideramus, modo ad communia perpendenda omnem attentionem afferamus: qua neglecta haud raro hærent tyrones, ubi sumuntur quæ per ea patent, & ad ardua magis applicantur, nisi fide Mathematicorum tanquam vera admittere velint, quorum rationem minime capiunt.

§. 206. Id quoque notandum est, in æquationibus, per quas definiuntur curvæ, originem abscissarum non semper assumendam esse in aliquo curvæ puncto, etiam si recta, ad quam curva refertur, eandem secat vel tangit; sed eandem esse posse quodvis punctum aliud in eadem recta assumtum. Ita ex. gr. in circulo, si peripheriæ puncta referuntur ad diametrum AB, origo abscissarum statui potest in centro C, ut sit PC = $x$, PM = $y$ & radius AC = MC = $a$. Quoniam enim $MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417. *Geom.*); habebimus $a^2 = y^2 + x^2$, adeoque $y^2 = a^2 - x^2$, quæ æquatio non minus circulum definit, quam altera, quam supra dedimus & unde circuli genesin atque proprietates cum aliis symptomatis deduximus (§. 193.). Atque ex hac æquatione eadem deducere licet, quæ ibidem ex altera deduximus, si tanquam data supponatur, ut adhuc ignoretur, ad quamnam curvam ea sit. Etenim si hic ponas Tab. I. Fig. 25.

$$x^2 = o$$

erit $$y^2 = a^2$$

$$y = a$$

Unde liquet 1. in origine abscissarum semiordinatam esse constanti $a$ æqualem.

Si vero ponas $x = a$

erit $$y^2 = a^2 - a^2$$
$$= o$$

$$y = o$$

Unde

Unde patet 2. si abscissa fiat semiordinatæ, quæ in origine abscissarum est (*vi num.* 1.), æqualis, curvam secare rectam positione datam, ad quam refertur.

Quoniam $a^2 = y^2 + x^2$; ideo liquet, 3. Hypothenusam trianguli rectanguli, cujus crura sunt abscissa & semiordinata, ad quodvis punctum curvæ esse eandem, consequenter cum hæc hypothenusa constanter ex origine abscissarum ducatur, rectas omnes ex origine abscissarum ductas ad curvam esse inter se æquales. Æquatio adeo nos deducit ad genesin circuli non minus, quam ad definitionem ejus nominalem, &, ubi definitio circuli ex elementis nota supponitur, hinc discimus, æquationem esse ad circulum. Immo potest origo abscissarum etiam extra centrum statui, veluti in L, ubi AL constans est, & abscissa LP. Sit enim $AL = b$, $AB = a$, $LP = x$, $PM = y$, erit $AP = b + x$, $PB = a - b - x$, consequenter *ob*

Tab. II. Fig. 25.

$$PM^2 = AP . PB$$

$$y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$$

Quodsi hic ponas

$$x = o$$

erit

$$y^2 = ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(ab - b^2)}$$

Unde liquet, 1. in origine abscissarum semiordinatam esse mediam proportionalem inter rectam quandam constantem $b$ & differentiam ejus a constante alia $a$.

Quodsi fiat

$$x = a$$

$$\text{erit } y^2 = ab - b^2 + a^2 - 2ab - a^2$$
$$= -ab - b^2$$

Patet itaque 2. abscissam nunquam fieri posse ipsi $a$ æqualem, sed semper eadem minorem esse debere.

Sit $x = a - b$

$$\text{erit } y^2 = ab - b^2 - 2ab + 2b^2 + a^2 - ab - a^2 + 2ab - b^2$$

$$y^2 = o$$

$$y = o$$

Patet adeo, 3. si abscissa fiat differentiæ quantitatum constantium æqualis, curvam secare rectam positione datam.

Sit $x = \frac{1}{2} a - b$

$$\text{erit } y^2 = ab - b^2 - ab + 2b^2 + \tfrac{1}{2}a^2 - ab - \tfrac{1}{4}a^2 + ab - b^2$$

$y^2 =$

$$y^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$y = \frac{1}{2}a$$

Videmus itaque 4. Si abſciſſa fiat $\frac{1}{2}a - b$, ſemiordinatam eſſe $= \frac{1}{2}a$.

Quodſi ponamus

$$b = o$$

erit $$y^2 = ax - x^2$$

Æquatio igitur degenerat in æquationem ordinariam pro circulo (§. 193).

Licet etiam originem abſciſſarum ſtatuere extra circulum, veluti in D, ut ſit, DP $= x$, adeoque ſi DA $= b$, AP $= x - b$. Et ſimiliter abſciſſas computare licet in aliqua a centro C diſtantia, ut earum origo vel ſit inter A & C, vel inter C & B. Hæc ſi notent tyrones, in doctrina de locis geometricis & conſtructione æquationum altiorum nihil prorſus ſentient difficultatis. Patebit etiam, quomodo ad formulas generales plana ſit via. Quæ vero hic annotamus de relatione curvarum ad rectam, quæ curvam in puncto quodam ſecat, eadem quoque locum habent, ubi eandem referre libuerit ad rectam extra curvam quomodocunque ſitam. Nec oleum atque operam perdunt tyrones, ſi in omni caſu poſſibili æquationem ad circulum inveſtigent, ut methodum definiendi curvas per æquationem intimius inſpiciant beneficio exempli omnium facillimi & notiſſimi, idem imitaturi in curvis aliis, quod in circulo fecere.

§. 207. Enimvero abunde ea docuimus, quæ in hac methodo lucem accendunt tyronibus, ne in tenebris palpitent ad magis ardua progreſſi, quemadmodum vulgo accidere *ſolet*. Sed dicenda quoque nonnulla ſunt de lineis non algebraicis, quarum nonnullæ ſub finem capitis definiuntur. Definimus Quadratricem *Dinoſtratis* per $ay = bx$, ubi $x$ denotat arcum AN, $a$ Quadrantem AB, $b$ radium AC & $y$ portionem radii AP, quæ ad radium eandem rationem habet, quam habet arcus AN ad Quadrantem. Quamobrem etſi æquatio alias definiat triangulum rectangulum æquicrurum, conſequenter in ea ſpectetur relatio rectæ, quæ hypothenuſa eſt ad crus unum, in quo ſumuntur abſciſſæ; præſenti tamen in caſu æquatio, *quæ* Tab. II. Fig. 67. algeb.

eadem

eadem videtur, prorsus diversa est. Etenim in casu priori, quando est ad triangulum rectangulum æquicrurum, $a$ & $x$ denotant lineas rectas; in posteriori autem, quando ad Quadratricem est, $a$ designat quadrantem, $x$ arcum circuli quadrante minorem. Æquatio igitur algebraica non est, cum in ea singulæ literæ denotent totidem rectas. Hoc tamen non obstante æquationes istiusmodi, quas curvæ lineæ ingrediuntur, tractari possunt eodem modo, quo ante tractavimus algebraicas: quod succedere ipsa præsens æquatio docere potest. Etenim

Si fiat $x = o$
erit $ay = o$
$y = o$

Atque adeo patet, quadrantem concurrere cum radio in origine abscissæ.

Si $x = a$
erit $ay = ab$
$y = b$

Unde liquet, quamprimum $x$ fit quadranti æqualis, rectam AP, quæ designatur per $y$, degenerare in radium.

Si $x = \frac{1}{2}a$
$ay = \frac{1}{2}ab$
$y = \frac{1}{2}b$

Evidens igitur est, dimidio quadranti respondere radium dimidium.

Eadem adeo eliciuntur, quæ per genesin Quadratricis manifesta sunt.

Quod vero etiam alia ignota hinc deduci possint, suo patebit loco (§. 55. *Anal.*): id quod omnino notandum, ne nullum in usum æquatio ista data videatur.

Singulare quid habet æquatio, quod non exprimat relationem ipsius curvæ ad rectam positionem datam per se, sed relationem potius curvæ alterius, nimirum Quadrantis circuli, cujus ope determinatur punctum M; quod rectæ AP & arcui AN, hoc est duabus indeterminatis $y$ & $x$ respondet. Exprimit scilicet relationem arcus AN ad rectam AP, qualis esse debeat, ut ipsi AP respondeat punctum M in Quadratrice. Data enim hac relatione datur etiam punctum M. Quoniam vero $y = \frac{ab}{x}$, adeo-

quæ AP quarta proportionalis ad arcum AN, quadrantem AB & radium AC; determinatio puncti M dependet a rectificatione indefinita circuli, consequenter a circuli Quadratura. Ceterum Quadratrix insinuat artificium reductionis constructionis curvarum ad curvas simpliciores, supposita harum quadratura vel rectificatione: neque enim in omnibus curvis rectificatio pendet a quadratura, prouti in circulo obtinet (*vi theor.* 3. §. 128. *Anal.*), quemadmodum suo loco videbimus, ubi de Quadratura & rectificatione curvarum agitur. Artificium hoc maximi momenti est in Analysi infinitorum ad Geometriam sublimiorem applicata, quemadmodum patet per problemata physico mechanica, qualia in Elementis Mechanicæ occurrunt. Quamobrem consultum est, ut tyrones, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, tempestive annotent, quomodo inventa veterum recentioribus Geometris insinuaverint artificia, aut saltem insinuare potuerint, siquidem attentionem suam deficere non fuerunt passi.

§. 208. Notandum adhuc est, posse etiam curvas referri ad curvas alias positione datas, quemadmodum referuntur ad rectas positione datas, ita ut abscissæ sumantur in curva positione data, quemadmodum sumuntur in recta positione data: quod ut facilius intelligatur, dabo exemplum. Sit AMO parabola *Appolloniana* seu primi generis. Producatur semiordionata PM in N, donec recta MN habeat ad arcum parabolicum AM eam relationem, quam habet semiordinata PM ad ejus abscissam AP; evidens est, si arcus AM $= x$, MN $= y$ & recta quædam constans $= a$, fore $y^2 = ax$. Æquatio hæc ab æquatione ad parabolam in eo differt, quod $x$ denotet arcum parabolicum AM, cum in æquatione ad parabolam denotet rectam AP. Ceterum eadem ex æquatione hac deducuntur, quæ ex æquatione ad parabolam, nisi quod theoremata ingrediatur arcus parabolicus. Nimirum cum sit $y = \sqrt{ax}$; semiordinata MN est media proportionalis inter arcum parabolicum datum HM & rectam quandam datam constantem $a$, quæ tertia proportionalis

Tab. II. Fig. 22.

tionalis est ad quemvis arcum parabolicum & ipsi respondentem semiordinatam. Et quemadmodum in parabola quadrata semiordinarum habent rationem abscissarum, ita semiordinatæ curvæ ANR sunt in ratione arcuum parabolicorum ipsis respondentium. Hoc artificio jam usus est *Archimedes* in spiralibus qui eas retulit ad peripheriam circuli tanquam ad axem. Facile autem apparet, relationem semiordinatæ MN ad arcum AN exprimi posse per æquationem curvæ algebraicæ cujuscunque alterius. Ita si arcus AO $= a$, AM $= x$ & MN $= y^2$ curva AMR definiri potest per æquationem $y^2 = ax - x^2$, quæ est æquatio ad circulum (§. 193.).

Si ponamus

$$\begin{aligned} x &= a \\ \hline y^2 &= a^2 - a^2 \\ &= o \\ \hline y &= o \end{aligned}$$

Unde liquet punctum R cum puncto O coincidere, adeoque curvam AR parabolam AO secare in O.

Si fiat

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a \\ \hline y^2 &= \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}a^2 \\ &= \tfrac{1}{4}a^2 \\ \hline y &= \tfrac{1}{2}a \end{aligned}$$

Patet itaque, si arcus parabolicus AO bisecetur, fore MN arcui dimidio æqualem.

Ponamus ex adverso $y = \frac{1}{2}a$; erit

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}a^2 &= ax - x^2 \\ x^2 - ax &= -\tfrac{1}{4}a^2 \\ \hline x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 &= o \\ x - \tfrac{1}{2}a &= o \\ \hline x &= \tfrac{1}{2}a \end{aligned}$$

Unde manifestum est, in nullo alio puncto, quam in medio arcus AO arcum parabolicum AM rectæ MN æqualem esse.

§. 209. Præter sectiones conicas definivimus potissimum eas curvas, quæ a Veteribus fuerunt inventæ, & quas recentiores Geometræ addiderunt, antequam Algebra ad Geometriam sublimiorem applicaretur & doctrina curvarum amplificaretur. Veteres præter Circulum, parabolam, hyperbolam & ellipsin consideraruntt Conchoidem, Cissoidem, Quadratricem atque spirales, & recentiores addiderunt Logarithmicam & Cycloidem, cui deinceps accessit Epicyclois. Tenendum nimirum est, veteres non animum advertisse ad curvas, nisi quatenus problematis geometricis solvendis inserviebant. Duo autem



apud

apud ipſos celebrabantur problemata, alterum ſcilicet de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas datas, alterum de quadratura circuli. In uſum prioris problematis ſolvendi *Nicomedes* invenit Conchoidem, *Diocles* Ciſſoidem: poſterius autem problema per ſpirales ſolvere tentavit *Archimedes*, per Quadratricem *Dinoſtrates.* Recentius Quadratura circuli tentata per cycloidem, ad cujus imitationem, ſi geneſin illius ſpectes, inventa Epicyclois. Cum vero Logarithmi eſſent inventi & tanta utilitate in Matheſin practicam recepti; in uſum Logarithmorum reperta eſt Logarithmica, ad cujus imitationem deinceps excogitata Logiſtica ſpiralis. Noſtrum erat lineas curvas veteribus celebratas non prætermittere ſilentio, qui lectorem noſtrorum Elementorum ad Matheſeos univerſæ cognitionem manuducere intendimus, præſertim cum inventis recentioribus anſam dederint, quæ a veteribus inventa fuerunt, quemadmodum jam hinc inde annotavimus. Logarithmica autem & cyclois uſum præclarum nactæ ſunt in problematis phyſicomechanicis, prouti ſuo loco in Elementis Mechanicæ oſtendimus. Earundem itaque mentionem injicere debuimus. Habet quoque uſum prorſus eximium Epicyclois in Mechanica practica & aliis inventis recentioribus anſam dedit. Quamobrem nec hance ſilentio prætериri fas erat. Quadratricem *Tſchirnhauſianam* & Lineam ſinuum, Tangentium atque ſecantium non alio fine adjecimus, quam ut conſtaret, quomodo curvarum geneſes excogitari poſſint: quem in finem etiam adjecimus problemata ultima hujus capitis (§. 579. & ſeqq. *Anal.*). Ex duobus tamen ultimis (§. 581. 583. *Anal.*) ſimul diſcimus, quomodo curvæ ſuperiorum generum deſcribi poſſint ope curvarum generum inferiorum. Ecce igitur tibi rationem, cur haſce potiſſimum curvas in præſente capite conſideraverimus.

§. 210. Poſtquam oſtendimus, quomodo Algebra utamur in eruendis curvarum deſcriptionibus, proprietatibus aliisque ſymptomatis; ad earum uſum

ſum in conſtruendis problematis exponendum progredimur. Primum itaque docemus, quomodo problemata indeterminata conſtruantur. Atque eo fine capite ſexto agitur de locis geometricis. Doctrinam hanc invenere veteres Geometræ; ſed recentiores ad eandem Algebram applicare cœperunt, ubi conſtabat interſectione duorum locorum conſtrui æquationes altiores. Problemata indeterminata, quemadmodum vidimus ſuperius cap. 2. ſect. 2. duas habent quantitates incognitas, quarum una pro arbitrio aſſumta determinatur altera, quemadmodum vidimus in curvis algebraicis aſſumta abſciſſa pro arbitrio determinari ſemiordinatam: id quod etiam obtinere, ſi recta quædam poſitione data referatur ad rectam aliam itidem poſitione datam ex iis liquet, quæ in Geometria de lineis proportionalibus inveniendis demonſtrata ſunt. Ita in triangulo rectangulo ABC habet PM ad AP rationem conſtantem ipſius BC ad AB, atque adeo ſumta AP pro arbitrio, per rectam AC determinatur PM. Dum itaque problema indeterminatum conſtruimus, omnes reperimus rectas poſſibiles, quæ eandem datam relationem ad ſe invicem habent. Unde ſi ad rectam poſitione datam applicentur parallelæ, & quæritur in recta poſitione data punctum, quod ſit origo unius indeterminatæ, atque linea ſecans omnes iſtas parallelas, ut ad ipſas reſpondentes portiones in linea poſitione data habeant eandem relationem datam; problemati ſatisfactum. Hinc vero patet, cur linea iſta dicatur Locus, quia nempe continet omnes lineas rectas, quæ in problemate in locum indeterminatarum ſubſtitui poſſunt, ſeu quia in ea ſunt ſingula puncta, quibus terminantur rectæ una indeterminatarum pro arbitrio aſſumta determinandæ. Ex. gr. in triangulo rectangulo hypothenuſa AC eſt locus omnium rectarum proportionalium cruribus AB & BC: etenim continuatis rectis AB & AC in infinitum, intra crura hujus anguli continentur omnes iſtæ proportionales, quarum una ſumitur in AB, altera vero determinatur per rectam AC, & in recta AC ſunt omnia puncta M, quibus

Tab. II. Fig. 16.

terminantur indeterminatæ ad AB normales, ut fiant aſſumtis AP in data ratione proportionales. Ratio eſt relatio ſimpliciſſima, quam exhibet recta ad rectam aliam relata. Relationes vero ceteræ conſtantes repræſentantur per lineas curvas, qualis eſt in circulo, ut quadratum ſemiordinatæ ſit æquale rectangulo ex ſegmentis diametri. Videmus adeo æquationes, quæ duas involvunt lineas incognitas, geometrice conſtrui poſſe, quatenus eædem exprimunt relationem conſtantem, quam habent ſingula lineæ curvæ puncta ad rectam poſitione datam, ſeu quatenus eædem ſunt æquationes ad curvam quandam lineam, quam definiunt. Atque ideo æquationes, quas ante diximus æquationes ad curvam, hic vocantur locales.

§. 211. Monuimus in anterioribus, curvam referri poſſe ad quamlibet rectam poſitione datam, ſive ea curvam ſecet in vertice, ſive in alio quocunque puncto, ſive eandem non ſecet, ſed tota extra eam cadat intervallo vel nullo, vel dato ab eadem diſtans, & ſive axi fuerit parallela, ſive ad eundem obliqua. Hinc determinantur omnes caſus poſſibiles æquationum localium: quæ quomodo reperiantur, ex iis patet, quæ de circulo paulo ante oſtendimus. Cum *Sluſius* æquationum localium uſum in conſtruendis æquationibus cubicis & biquadraticis docuiſſet; *Philippus de la Hire* Algebram ad loca geometrica applicavit, & in omni caſu æquationes locales ad rectam, circulum & ſectiones conicas inveſtigare docuit: quod idem fecit *Ozanamus*. Enimvero cum ſic plures prodirent æquationes particulares ad eandem lineam; *Joannes Craigius* æquationes generales inveſtigavit ad ſectiones conicas, quæ omnes particulares eminenter continent: cujus exemplum ſecutus *Hoſpitalius*. Nobis quoque placuit generalia invenire theoremata conſtruendi omnes æquationes locales ad rectam & ſectiones conicas, cum per ea conſtructiones problematum indeterminatorum via vere analytica erui poſſint. Rem penitius examinanti conſtabit, non aliis hic opus eſſe artificiis, quam quæ paulo ante inſinuavimus, cum de æquationibus ad circulum agere-

ag remus. Theoremata generalia inveniuntur, si investigentur theoremata in casu maxime composito, in quo linea, ad quam refertur curva ponitur esse ad axem obliqua & origo abscissarum distare a vertice vel centro curvæ, si quod habet, aliquo intervallo. Etenim si hic quædam lineæ constantes supponantur nullæ, in æquatione termini evanescunt, qui in eas ducuntur, sicque prodit æquatio in casu simpliciori. Hoc fieri debere observavimus superius, cum in circulo origo abscissarum sta-
Tab tueretur in L intra verticem A
II. & centrum C. Vidimus enim si
Fig. ponatur AL $=o$, æquationem
25. in eo casu repertam $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$ degenerare in æquationem ad circulum $y^2 = ax - x^2$ in casu simplicissimo, quando origo abscissarum est in A. Enimvero non modo æquatio magis composita hoc pacto reducitur ad simpliciorem, verum etiam schema, quod exhibet constructionem illius æquationis, degenerat in schema, quod hujus repræsentat constructio-
Tab. nem. Ex. gr. si fuerit LH $=o$,
VII. linea DH incidit in DL, adeo-
Fig. que pars schematis, quæ relin-
75.

quitur, casum istum repræsentat, in quo recta positione data DL, ad quam refertur curva AMB est axi AS parallela. Quodsi porro fiat KD $=o$, relinquitur pars schematis, quæ repræsentat casum, in quo abscissæ computantur in axe ultra verticem continuato KS & origo earum statuitur in aliqua a vertice distantia K. Denique si etiam ponatur AK $=o$, prodit schema casum ordinarium exhibens, in quo abscissæ sumuntur in axe AS & origo abscissarum in vertice. Methodus adeo qua utimur, non modo æquationes locales omnes ad eandem curvam uni æquationi includit eodem artificio, quo æquationes omnes ad curvas algebraicas ad æquationem unicam generalem reduximus (§. 385. *Analys.*), sit ita quod ibidem aliud præterea artificium adhibendum erat, quo hic non habemus opus, quia ibidem æquationes omnes una formula comprehendendæ, non erant ejusdem gradus, quemadmodum in præsenti obtinet; sed etiam unico schemate omnium æquationum localium constructiones comprehendit. Quænam hæc sit prærogativa præ me-

Fig. al geb.

methodo communi, qua ſinguli caſus ſigillatim expenduntur; facillimo negotio animadvertet, qui, quæ de locis geometricis tradimus, cum iis conferre voluerit, quæ de iisdem docet *de la Hire*, vel *Ozanamus*.

§. 212. Unum adhuc ſupereſt, quod de theorematis hiſce generalibus obſervandum, ne eorum applicatio turbet tyrones. In ſchemate noſtro ſupponimus, originem abſciſſarum removeri ultra verticem, ita ut abſciſſa linea quadam data excedat abſciſſam ordinariam. Enimvero vidimus ſupra, originem earundem etiam ſtatui poſſe ex parte altera, veluti in L, ita ut abſciſſa LP deficiat ab abſciſſa ordinaria linea quadam data AL. Similiter rectam axi parallelam, vel ad eum obliquam ponimus ultra eundem, ut augeat ſemiordinatam ordinariam PM recta quadam data, cum tamen etiam hæ lineæ ita duci poſſint ex parte oppoſita, ut ſemiordinata QM vel RM deficiat ab ordinaria PM linea quadam data PQ, vel PR. Æquatio igitur localis generalis non videtur omnes æquationes particulares continere, nec ſchema illi reſpondens comprehendere omnia ſchemata, quæ harum conſtructionem exhibent. Dubium hoc ut tollatur, noſtrum eſt docere, qua ratione innotuerit, quomodo iidem quoque caſus in eo, ad quem computavimus æquationem, contineantur. Supra reperimus æquationem ad circulum, ſi origo abſciſſarum fuerit in L, $y^2 = ab - b^2 + ax - 2bx - x^2$. Ponamus jam originem abſciſſarum eſſe in N, ut ſit NA $= b$, NP $= x$, ſitque AB $= a$, PM $= y$; erit AP $= x - b$, PB $= a + b - x$.

Tab. II. Fig. 25.

Ob PM$^2$ = AP. PB

prodibit

$$y^2 = ax - x^2 + 2bx - ab - b^2$$

Æquationem hanc a ſuperiori non differre videmus niſi ſignis & hanc diverſitatem hinc oriri obſervamus, quod ibi abſciſſa ordinaria AP ſit $x - b$, hic vero $b - x$. Quodſi ergo æquationes iſtæ redigantur ad nihilum, quemadmodum in hac doctrina fieri ſolet; habebimus in eo caſu, ubi abſciſſarum origo in N,

$$\begin{matrix} y^2 + x^2 - ax + ab = 0 \\ -2bx + b^2 \end{matrix}$$

in

in casu autem opposito, ubi origo abscissarum in L,

$$y^2 + x^2 - ax - ab = 0$$
$$+ 2bx + b^2$$

Quare si duas haberes formulas, valor ipsius $b$ in casu particulari dato semper eliceretur positivus, cum in priori coëfficiens negativus comparandus esset cum negativo $-2b$, in posteriori coëfficiens positivus cum $+2b$. Quodsi vero æquationem, quæ cum formula posteriori conferri debebat, cum priori componis, adeoque quantitatem positivam cum negativa, necesse est ut valor ipsius $b$ prodeat negativus. Si $-b$ substituas in locum $+b$ in æquatione altera, pro $+2bx$ habebis $-2bx$, pro $-ab$ vero $+ab$, ducendo scilicet $-a$ in $-b$, ast $b^2$ retinet signum suum, quia $-b$ in $-b$ efficit $+b^2$. Atque sic æquatio posterior degenerat in priorem, ut adeo prior in utroque casu adhiberi possit, modo notes, quoties in casu particulari lege comparationis valor ipsius $b$ elicitur negativus, toties sumendam esse rectam eidem respondentem ex parte opposita, ut sit $AL = b$. Idem cum eodem modo obtineat quoad distantiam parallelæ axi ab eodem PQ; manifestum est, cur una formula satisfaciat in casu utroque, modo observetur, quod de valore negativo in æquationis particularis cum generali comparatione prodeunte annotavimus. Idem adhuc clarius patet in parabola. Etenim si fuerit $NA = b$, $NP = x$, adeoque $AP = x - b$; erit ex natura Parabolæ, si parameter fuerit $a$, Tab. II. Fig. 22.

$$y^2 = ax - ab$$
seu $$y^2 - ax + ab = 0$$

Quodsi fuerint omnia ut ante, sed $AL = b$, adeoque $AP = b + x$, erit

$$y^2 = ax + ab$$
seu $$y^2 = -ax - ab = 0$$

Hic denuo patet, æquationem posteriorem non differre a priori, nisi diversitate signorum in iis terminis, quorum coëfficiens est $b$, in priori enim habemus $+ab$, in posteriori $-ab$. Quamobrem ubi in applicatione formulæ generalis, quæ ad casum priorem spectat, confers terminum negativum æquationis ad casum posteriorem spectantis cum positivo, qui ex formula casus prioris sumitur; valor utique

que prodire debet negativus pro AL. Patet etiam hic, si in æquatione posteriori pro $+b$ substituas $-b$, ducendo $-b$ in $-a$, prodire $+ab$, adeoque æquationem posteriorem degenerare in priorem, quemadmodum ex adverso prior abit in posteriorem, si in priori substituas $-b$ pro $+b$. Quodsi enim ducas $+a$ in $-b$, prodibit $-ab$, quemadmodum habet formula posterior. Videmus adeo, quomodo innotuerit, eandem formulam subire posse vicem duarum, si valoris negativi quantitas sumatur ex parte opposita. Immo videmus, perinde esse, sive in formula generali abscissam & semiordinatam statuas ordinariis AP & PM majorem, sive minorem, ut adeo nulla ratio intrinseca fuerit electionis, sed tantummodo extrinseca: quod ideo monemus, ne quis in Philosophia hinc petat argumentum contra principium rationis sufficientis in electionis casu. Utimur eodem artificio non sine maxima utilitate in Analysi infinitorum seu calculo differentiali & integrali, quemadmodum suo loco videbimus, ubi ex eadem ratione valorem negativum sumimus pro magnitudine ex parte opposita sita. Absit itaque ut tibi persuadeas, hoc fieri ex natura quantitatum privativarum, & hinc colligas, quantitates privativas esse veras quantitates, seu in numero positivarum, cum satis constet eas non denotare nisi defectum quantitatis veræ seu positivæ per positivam, quæ deficit, æstimabilem, quemadmodum pecunia, quæ debetur, non est parata pecunia, quam habes, etsi per paratam pecuniam æstimetur, quæ solvenda, ut debitum tollatur. *Nullæ revera* sunt quantitates negativæ, etsi utiliter in usum calculi universalis fingantur. Cavendum omnino est, ne entia ficta Mathematicorum confundantur cum realibus in detrimentum scientiæ philosophicæ.

§. 213. Hinc simul patet ratio, cur in casu particulari demonstraturi constructionem ex formula generali elicitam, eruendo ex hac æquationem ad construendum propositam, non utamur valoribus negativis, qui per comparationem cum formula generali prodeunt, sed iis substituamus positivos: id quod fieri

fieri non licebat, ſi per naturam quantitatum valor eſſet negativus. Valor negativus v. gr. rectæ AL nonniſi fictitius eſt, quatenus æquatio, unde elicitur, repræſentare fingitur caſum, quem non repræſentat, cum revera non exhibeat niſi eum, in quo origo abſciſſarum eſt in N, propterea quod hac fictione eadem formula ſufficere deprehenditur in utroque caſu, quam absque ea nonniſi in uno adhibere liceret, nimirum quando origo abſciſſarum eſt in N. Extra hanc fictionem utique contradictorium eſt, quantitatem poſitivam eſſe æqualem privativæ, quemadmodum etiam in ipſa Analyſi contradictionem inde colligimus atque ex ea porro notioni impoſſibilis convenienter (§. 97. *Ontol.*) impoſſibilitatem inferimus. Habemus exemplum in æquatione ad circulum $y^2 + x^2 - ax + 2bx - ab + b^2 = 0$. Quodſi enim ponas

Tab. II. Fig. 25.

$$x = a$$

$$\text{erit } y^2 + a^2 - a^2 + 2ab - ab + b^2 = 0$$

$$y^2 = -ab - b^2$$

$$y = \sqrt{(-ab - b^2)}$$

Ex eo itaque, quod valor ipſius $y^2$ prodit negativus, qui producit pro $y$ radicem imaginariam, infertur, impoſſibile eſſe, ut abſciſſa fiat diametro æqualis, recte omnino, cum idem per ſe pateat, ubi ſupponis notum eſſe, quod æquatio ſit ad circulum & origo abſciſſarum in L, cum abſciſſa major eſſe nequeat recta LB $= a - b$. Nimirum hic colligitur, hypotheſin $x = a$ eſſe abſurdam, quia hinc ſequitur, quantitatem poſitivam eſſe æqualem privativæ aut radici imaginariæ, quod abſurdum eſſe ſupponitur.

§. 214. Ut uſus formularum generalium in conſtruendis æquationibus problematum indeterminatorum clarius eluceſceret, aliquot exemplis eundem illuſtrare lubuit (§. 593. & ſeqq. *Anal.*). Patet per ea, ope iſtarum formularum nos via vere analytica deduci ad problematum indeterminatorum conſtructionem, ac conſtructiones ſemper obtineri concinnas, quales in Geometria deſiderantur, ut adeo non ſolius brevitatis gratia eaſdem prætulerimus methodo communi, qua uſi ſunt *de la*

*Hire* & *Ozanamus*. Dedimus quoque exempla, (§. 597. 600 *Anal.*), quibus ostenderemus, quomodo ex constructione locorum deriventur æquationes locales ut appareat ad quamnam curvam sit locus constructus. Quoniam vero id intendimus, ut, dum artificia Analyseos inculcamus, simul doceamus veritates mathematicas cognitu utiles; ideo selegimus constructiones curvarum, quas pro fornicibus commendant Architecti, ut constaret, eas esse ellipses *Apollonianas*. Æquationem primam (§. 597 *Anal.*) $y^2 + \frac{d^2x^2}{a^2} - \frac{d^2x}{a} = o$ esse ad ellipsin, constare poterat ex collatione cum formula generali pro ellipsi (§. 588. *Analys.*). Quodsi consueto more hanc æquationem cum formula ista compares, deprehendes $a$ esse axem majorem, $d$ vero minorem ellipseos. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{2r=o}{q^2} \qquad \frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad 2n=o$$

$$q=s$$

$$\frac{-2tp}{2m} = \frac{-d^2}{a} \qquad m^2 = p^2 = \tfrac{1}{4}a^2$$

$$\frac{2d^2p}{a^2} = \frac{d^2}{a} \qquad m = \tfrac{1}{2}a$$

$$\frac{2p}{a} = 1$$

$$p = \tfrac{1}{2}a$$

Habemus adeo

$$a^2 : d^2 = a : t$$

$$t = \frac{ad^2}{a^2} = \frac{d^2}{a}$$

Quoniam parameter $t$ est tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423. *Analys.*); cum $a$ sit axis major, erit $d$ minor & ob $p = \frac{1}{2}a$ abscissæ computantur $a$ vertice.

Similiter æquationem alteram $y^2 + \frac{ddx^2}{a^2} - \frac{2ddx}{a} = o$ esse ad ellipsin, ejus cum formula generali collatio prodit, & illius cum hac comparatione facta patet, quod $a$ sit axis dimidius major, $d$ vero dimidius minor. Etenim vi formulæ generalis

$$\frac{t}{2m} = \frac{d^2}{a^2} \qquad \frac{2tp}{2m} = \frac{2dd}{a}$$

h. e.

h. e. $\frac{d^2 p}{a^2} = \frac{d^2}{a}$

$$p = a$$

$$m^2 = p^2 = a^2$$

$$m = a$$

$$a^2 : d^2 = 2a : t$$

$$t = \frac{2ad^2}{a^2} = \frac{2d^2}{a}$$

Quoniam $a$ est dimidius axis major & parameter $t$ tertia proportionalis ad axem majorem & minorem (§. 423. *Anal.*), seu quarta ad dimidium axem majorem, minorem dimidium & minorem integram (§. 124. *Analys.*); ideo patet, $d$ esse axem minorem dimidium & ob $p = a$ originem abscissarum esse in vertice ellipseos.

§. 215. Utraque æquatio localis, etsi ex diversis constructionibus eruatur, eadem est, nisi quod in posteriori $a$ & $d$ denotent semiaxes, in priori autem integros axes conjugatos. Forsan non inconsultum erit hic docere, quomodo constructio utraque eruatur ex æquatione ordinaria ad ellipsin. Æquatio hæc est $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$, in qua $b$ parametrum, $a$ vero axem majorem denotat. Quoniam parameter est tertia proportionalis ad axem majorem $a$ & minorem $d$ (§. 423. *Anal.*); erit $b = d^2 : a$. Quodsi ergo in æquatione ordinaria hunc valorem in locum ipsius $b$ surroges; habebis

$$y^2 = \frac{d^2 x}{a} - \frac{d^2 x^2}{a^2} = \frac{d^2 ax - d^2 x^2}{a^2}$$

Quare

$$a^2 : d^2 = ax - x^2 : y^2$$

$$a : d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Patet adeo semiordinatam in ellipsi esse quartam proportionalem ad axem majorem, minorem & semiordinatam circuli super axe majore descripti eidem cum semiordinata ellipseos abscissæ respondentem. Quamobrem cum pro $a$ & $d$ sumi etiam possit $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}d$ (§. 124. *Anal.*); igitur patet, si super axe majore describatur semicirculus & in P erigatur perpendicularis PN, ductaque ex centro C radio CN in eum transferatur CR semiaxi minori æqualis, ac tan- Tab. II. Fig. 26.

 dem

dem ex R demittatur perpendicularis RM; fore punctum M in ellipsi: quæ est ipsa constructio *Serlii* ex æquatione ordinaria elicita. Cum enim sit MR parallela ipsi PC; erit (§. 268 *Geom.*)

$$NC : RC = NP : PM$$

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(ax - x^2)} : y$$

Poteramus itaque constructionem Serlianam ellipseos jam ex æquatione ordinaria elicere in superioribus, cum doctrinam de Ellipsi traderemus. Etsi autem æquatio ex altera constructione elicita eadem sit cum anteriore; ex ea tamen non minus deduci poterat constructio altera. Etenim sit ellipsis ADB, cujus axis major AB, semiaxis minor EF. Describatur radio CD semicirculus EDF & erecta perpendiculari PM ducatur axi AB parallela MN, ex N vero demittatur perpendicularis NQ, quæ erit ipsi PM, æqualis. Si sit AC = $a$, DC = $d$, AP = $x$, erit æquatio ad ellipsin $y^2 = \frac{2addx - d^2x^2}{a^2}$, adeoque

Tab. III. Fig. 27.

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : y^2$$

Sit jam EQ = $z$, erit QF = $2d - z$, adeoque $QN^2 = PM^2 = y^2 = 2dz - z^2$. Habemus itaque

$$a^2 : 2ax - x^2 = d^2 : 2dz - z^2$$

adeoque (§. 124. *Anal.*)

$$a^2 - 2ax + x^2 : a^2 = d^2 - 2dz + z^2 : d^2$$

$$a - x : a = d - z : d$$

$$x : a = z : d$$

$$x : z = a : d$$

hoc est, AP : EQ = AC : EC

Quare si ad semiaxem majorem & minorem ellipseos atque abscissam AP pro arbitrio assumtam quæratur quarta proportionalis, erit ea abscissa EQ, cui respondet semiordiata QN in circulo semiordinatæ ellipseos PM æqualis.

Quodsi displicet *resolutio* per analysin rationum; analogiam, qua nititur constructio per Algebram quoque reperire licet. Etenim

$$\frac{2ad^2x - d^2x^2}{a^2} = 2dz - z^2$$

$$\frac{dx^2 - 2ad^2x}{a^2} = z^2 - 2dz$$

$$\frac{d^2x^2 - 2ad^2x + a^2d^2}{a^2} = z^2 - 2dz + d^2$$

$$\frac{ad - dx}{a} = d - z$$

$$\frac{dx}{a} = z$$

Ha-

Habemus itaque, ut ante:

$$a : d = x : z$$

Notanda hic ſunt artificia, quibus conſtructiones ex æquatione ordinaria eliciuntur. Nimirum in æquatione ordinaria ſubſtituimus valorem parametri, quam ex eadem elicuimus, ut eandem ingrediantur nonniſi lineæ in ipſa contentæ. Ita enim prodibat æquatio, cujus in analogiam reſolutione conſtructio prior erat manifeſta. Ex eadem æquatione in analogiam reſoluta prodit quoque altera, ſubſtituendo valorem quadrati ſemiordinatæ ellipſeos ex circulo circa axem minorem deſcripto. Equidem prævidere non licet, quid per ſubſtitutionem ſit proditurum; non tamen ideo ea negligenda eſt. Ubi enim veritatem quærimus, tentanda ſunt omnia, donec incidamus in theoremata & conſtructiones problematum. Principii ſubſtitutionis magna vis eſt in Analyſi: efficit enim æquationem dependentem a pluribus veritatibus, ut jam ex ea per reductionem eadem erui poſſint, quæ ex iisdem more veterum ratiocinando colliguntur.

Tab. III. §. 216. Enimvero ut intelligant tyrones, idem artificium etiam in aliis curvis adhiberi poſſe, lubet hoc ipſum applicare ad hyperbolam. Pro hyperbola æquatio ordinaria eſt $y^2 = \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x^2$. Eſt etiam hic, ſi axis conjugatus $= d$, parameter $b = \frac{d^2}{a}$. Quodſi ergo hunc valorem in æquatione ordinaria ſubſtituas, habebis Fig. 28.

$$y^2 = \frac{d^2}{a^2} x + \frac{d^2 x^2}{a^2}$$

$$= \frac{d^2 ax + d^2 x}{a^2}$$

Quare $a^2 : d^2 = ax + x^2 : y^2$

$$a : d = \sqrt{(ax + x^2)} : y$$

$$\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{2}d = \sqrt{(ax + x^2)} : y$$

Quodſi ergo ex centro hyperbolæ C erigas CD $= \frac{1}{2}d$, & ſuper BP abſciſſa AP pro lubitu aſſumta deſcribas ſemicirculum ſecantem perpendicularem in A erectam in N, & PN $= \sqrt{(ax + x^2)}$ transferas ex B in L, tandemque in L erigas perpendicularem LI, occurrentem rectæ per B & D ductæ in I; erit LI ſemiordinata $y$ abſciſſæ AP reſpondens. Quamobrem ſi fiat recta PM ad BP perpendicularis $=$ LI; erit punctum M in hyperbola

perbola. Cum in praxi non opus sit semicirculum describi, sed ex medio B tantummodo intersecanda recta AN in N & intervallum PN ex B in L transferendum; quodvis in hyperbola punctum M hoc modo facillime determinatur, ut constructio pro non in eleganti haberi possit. Notent igitur hic tyrones, quod ad artificia, quibus in solutionibus problematum utuntur autores, animum attendere debeant eadem statim adhibituri ad alia, quantum ipsis datur. Nec inconsultum erit, ut Autores, qui de sectionibus Conicis commentati sunt, evolvant & ubi theoremata & problemata elegantia occurrunt, ea analytice investiganda sibi proponant. Ad hoc studium ut eos incitaremus iisdemque viam, qua eundem, commonstraremus ea in medium proferre libuit, quæ de Ellipsi & Hyperbola dicta sunt. Unicum adhuc addendum. In hyperbola æquilatera $a = d$, adeoque $y = \sqrt{(ax + x^2)}$, consequenter PM = PN. Quamobrem punctum M in eadem nullo fere negotio determinatur, scilicet si ex medio BP intervallo $\frac{1}{2}$ BP intersecetur AN in N & intervallo PN intersecetur PM in M, ut adeo non opus sit, nisi in A erigi perpendicularem infinitam.

§. 217. Nos non progredimur ultra loca solida, in quibus acquieverunt veteres: neque enim hæc doctrina ultra hosce limites multum promota. *Newtonus* enumeravit lineas tertii ordinis seu curvas secundi generis, quarum æquationes ad tres dimensiones ascendunt. Eam esse completam demonstravit *Stirlingius* simulque ostendit, quomodo æquatione curvæ tertii ordinis data inveniatur locus, hoc est, species curvarum dignoscatur, ad quam eadem est. Enimvero hæc non sunt ad captum tyronum, in quorum usum conscripsimus Elementa nostra, neque adhuc ea ratione pertractata, ut eadem facilitate intelligantur, qua a nobis proposita capiuntur. Neque etiam opus est, ut hac doctrina sis instructus, ubi ea, quæ in sequentibus tradimus, intelligere volueris, immo eadem ignorata non impeditur progressus in Analysi recentiorum, qua Geometria ad naturam applicatur. Hoc non

non eo fine monemus, ut præclaris inventis laudem suam detrahamus; sed ne tyrones remorentur progressum ad ulteriora, affectantes scientiam eorum, quorum ignorantia eidem minime obstat. Monitum igitur nostrum exigit præsens institutum. Ultra enumerationem linearum tertii ordinis, seu curvarum secundi generis nemo adhuc progressus. Atque adeo doctrina de speciebus curvarum algebraicarum tanto adhuc intervallo distat a perfectione sua, quanto ab eadem distare Algebram monuimus. Abunde tyronibus ad altiora adspirantibus suffic unt ea, quæ de locis geometricis tradidimus. Et ubi ad artificia, quibus in doctrina hac explananda utimur, animum attulerint attentum, ut eadem animo distincte comprehendant; iisdem plurimum juvabuntur in altioribus, quæ deinceps sequuntur. Hoc auxilio methodus comparationis æquationum particularium, in quibus coëfficientes indeterminatarum sunt determinati, cum assumtitiis, in quibus coëfficientes isti indeterminati sunt, familiaris redditur. Ejus autem in Analysi multus est usus.

§. 218. Doctrinam de locis geometricis non solum proposuimus in usum constructionis problematum in determinatorum, cujus ideo dedimus aliquot exempla; sed & in usum constructionis æquationum altiorum, præsertim cubicarum & biquadraticarum. Quamobrem capite septimo docemus primum in genere, quomodo æquationes superiores construantur, & mox in specie, quomodo construantur æquationes cubicæ & biquadraticæ. Methodus autem, qua hic utimur, tota huc redit, ut construantur duo loca, quorum intersectione determinatur radix æquationis, seu linea recta, quæ eidem respondet. Invenit eandem *Slusius*. Etsi enim non desint, qui eam jam *Cartesio* perspectam fuisse contendunt; certo tamen, quod affirmant, probare minime possunt, cum alia quoque via in regulam suam incidere potuerit, quam in Geometria pro construendis æquationibus cubicis & biquadraticis per parabolam & circulum præscribit. Quemadmodum vero inventa veterum profuerunt recentioribus ad invenienda sua, quibus ad ulteriora progressuris

ris usui sunt inventa anteriora; ita dubium non est, quin veterum quoque inventa facem protulerint *Slusio* ad methodum suam construendi æquationes cubicas & biquadraticas inveniendam. Etenim cum veteres multum desudarent in duabus lineis mediis continue proportionalibus inter duas datas inveniendis; *Menechmus* via vere analytica pervenit ad solutionem problematis tantopere celebrati ope intersectionis duarum parabolarum. Atque in hac ipsa constructione continetur idea ejus methodi, quam *Slusius* primus reperit: id quod ut appareat, analysis *Menechmi* paulo disertius explicanda. Quoniam GH tertia proportionalis ad AB & EF, itidemque CD tertia proportionalis ad EF & GH; habemus (Tab. III. Fig. 29.)

$$AB : EF = EF : GH \qquad EF : GH = GH : CD$$

$$EF^2 = AB . GH \qquad GH^2 = CD . EF$$

Patet itaque, quadratum primæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex data prima AB in quæsitam alteram, seu mediarum continuæ proportionalium secundam; quadratum vero secundæ mediarum continue proportionalium esse æquale rectangulo ex datarum altera in primam quæsitarum seu continue proportionalium. Quoniam in parabola quadratum semiordinatæ est æquale rectangulo ex parametro in abscissam; igitur patet, si parametro data una AB describatur parabola, secundam quæsitarum GH fore in numero abscissarum, & eidem respondentem semiordinatam fore primam quæsitarum EF: contra si parametro data altera CD describatur parabola, secundam quæsitarum GH fore in numero semiordinatarum ejusdem & eidem respondentem abscissam fore primam quæsitarum. Quamobrem patet eandem rectam esse abscissam in parabola una & semiordinatam in altera, & quæ in una semiordinata est, eandem esse abscissam in altera. Obtinet hoc si duæ parabolæ AMR & AMO circa axes AD & AE ad angulos rectos junctos describantur, in puncto enim intersectionis semiordinata PM parabolæ AMR æqualis est abscissæ AQ parabolæ alterius AMO (Tab. III. Fig. 30.)

&

& viciſſim ſemiordinata QM parabolæ AMO æqualis eſt abſciſſæ AP Parabolæ AMR. Patet itaque ſi rectæ datæ ſumantur pro parametris parabolarum AMR & AMO, rectas AP & PM fore duas medias continue proportionales inter duas iſtas rectas datas. Hic eſt modus inveniendi duas lineas medias continue proportionales inter duas datas. Quodſi AB $=a$, CD $=b$, EF $=x$, GH $=y$; erit

Tab. III. Fig. 29.

$$x^2 = ay \qquad y^2 = bx$$

$$\frac{y^4}{b^2} = ay \qquad \frac{y^2}{b} = x$$

$$y^4 = ab^2y$$

$$y^3 = ab^2$$

Unde liquet, æquationem cubicam $y^3 - ab^2 = o$ conſtrui per duo loca $x^2 - ay = o$ & $y^2 - bx = o$, quorum interſectione determinatur ſemiordinata PM, quæ radici æquationis $y^3 - ab^2 = o$ reſpondet. Conſtructio adeo *Menechmi* inſinuat ideam methodi *Sluſianæ*.

§. 219. Inventum *Menechmi* anſam quoque dare poterat inveniendæ regulæ *Carteſianæ*, qua æquationes cubicæ & biquadraticæ conſtruuntur. Nimirum cum ex illo conſtet, æquationem cubicam conſtrui per duas parabolas, quarum mutua interſectione determinatur radix, in arte inveniendi autem tentaminibus multa relinquantur, facile animum ſubit cogitatio tentandi, num circulus quoque per verticem parabolæ ductus in puncto interſectionis extra verticem determinet radicem æquationis cubicæ. Sit itaque centrum circuli per verticem parabolæ A deſcripti in C, ſi ex eo in axem parabolæ demittatur perpendicularis CD; evidens eſt per rectas AD & DC determinari & centrum C, & radium AC. Sit itaque PM $=y$, parameter $=a$, AD $=b$, DC $=c$. Demittatur ex C perpendicularis CR ad ſemiordinatam PM; erit RM $=y-c$ & ex natura Parabolæ AP $=\frac{y^2}{a^2}$ (§. 391. *Analyſ.*), adeoque Tab. III. Fig. 31.

$$DP = CR = \frac{y^2}{a^2} - b.$$

Quoniam

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \ \& \ CM^2 = CR^2 + RM^2$$

(§. 417. *Geom.*); erit $AC^2 = b^2 + c^2$ & $CM^2 = \frac{y^4}{a^4}$

$$-\frac{2by^2}{a} + b^2 + y^2 - 2cy + c^2,$$

con-



ſe-

ſequenter ob $CM^2 - AC^2 = o$

$$\frac{y^4}{a^2} - \frac{2by^2}{a} - 2cy = o$$
$$+ y^2$$

$$y^3 - 2aby - 2a^2c = o$$
$$+ a^2y$$

Patet itaque interſectione circuli per verticem parabolæ transeuntis & parabolæ conſtrui poſſe æquationem cubicam, in qua ſecundus terminus deficit.

Ut jam determinetur valor ipſius $b$ ſeu rectæ AD & valor ipſius $c$, ſeu rectæ DC; ſit æquatio alteri æquivalens

$$y^3 - py - q = o$$

erit $-2ab + a^2 = -p$

$$b - \tfrac{1}{2}a = \frac{p}{2a}$$

$$AD = b = \frac{p}{2a} + \tfrac{1}{2}a$$

Similiter $-2a^2c = -q$

$$DC = c = \frac{q}{2a^2}$$

Quodſi cum *Carteſio* ſumas parametrum pro unitate & fiat in axe AH = ſemiparametro, erit

$$HD = \tfrac{1}{2}p$$
$$DC = \tfrac{1}{2}q$$

hoc eſt, recta HD eſt æqualis coëfficienti dimidio termini tertii & DC coëfficienti dimidio quarti, ſecundo deficiente, quemadmodum habet regula *Carteſii.*

Non aliis hic utimur artificiis, quam quibus uſi ſumus in determinanda tangente ſectionum conicarum juxta methodum *Carteſii* (§. 410. 440. 491. *Analyſ.*) *Carteſio* itaque conſtructio *Menechmi*, qua utitur in inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas rectas, anſam dare potuit inveniendi regulam conſtruendi æquationes cubicas, in quibus ſecundus terminus deficit, & artificia ipſi familiaria, quibus hic utitur, animum avertere potuerunt ab idea conſtructionis per combinationem duorum locorum in conſtructione *Menechmi* contenta, ad quam eundem advertit *Sluſius*, ut adeo certo aſſeverari non poſſit, methodum *Sluſianam* cognitam jam fuiſſe *Carteſio*, & eadem hunc perveniſſe ad regulam ſuam. Quicquid ſit, utile tamen eſt tyronibus perpendiſſe, quomodo inventum *Menechmi* analytice expenſum & ideam conſtructionis æquationum ſuperiorum per combinationem duorum locorum, & anſam

anſam inveniendi regulam conſtruendi æquationes cubicas, in quibus ſecundus terminus deficit, ad biquadraticarum conſtructionem deinceps extenſam, præbere potuerit, ſiquidem ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Quoniam ex qualibet æquatione ſecundus terminus auferri poteſt (§. 343. *Analyſ.*) & hoc pacto æquationes cubicæ omnes reducuntur ad tres caſus (§. 345. *Analyſ.*); regula *Carteſii*, quæ ſecundum terminum deficere ſupponit, omnibus omnino æquationibus cubicis conſtruendis ſufficit, etſi haud difficile ſit eandem quoque extendere ad eas æquationes, quæ ſecundum terminum habent, quemadmodum operoſe oſtendit *Bakerus*, nos brevius docuimus (§. 622. *Anal.*). Cur vero methodum *Sluſianam* præferamus regulæ *Carteſianæ* a *Bakero* extenſæ, rationem reddimus in ſcholio probl. 245. (§. 608. *Analyſ.*).

§. 220. Notandum vero eſt, quod conſtructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum vere analyticas tradiderimus, ut adeo in iis induſtriam ſuam utiliter exerceant, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Tanta autem perſpicuitate doctrinam hanc expoſuimus, ut, qui in anterioribus induſtriam ſuam deſiderari non fuerunt paſſi, nihil prorſus difficultatis ſentiant. Inprimis autem hinc diſcere licet, quomodo tollatur omnis difficultas, quæ ex nimis longa rerum meditandarum ſerie naſcitur. Quamobrem huc animum advertant, quotquot meditationibus longis adſueſcere voluerint. Quod qui faciunt, hunc utique percipient fructum, ne longitudine meditationum defatigentur. Id tantummodo adhuc monemus tyrones, ut, ubi locus conſtruendus, formula generalis, cum qua particularis data conferenda, ex ſuperioribus exſcribatur & eidem æquatio localis conſtruenda ſubſcribatur, ut termini comparandi ſibi invicem reſpondeant. E. gr. in problemate 245. (§. 607. *Anal.*) locus ad circulum eſt $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Formulæ igitur generali ea ita ſubſcribitur, quemadmodum hic factum eſſe vides:

$$\begin{array}{cccccccc} y^2 & -\frac{2rxy}{q} & +\frac{r^2x^2}{q^2} & -2ny & +\frac{2nrx}{q} & +n^2 & =0 \\ & & +\frac{s^2x^2}{q^2} & & -\frac{2psx}{q} & -m^2 & \\ & & & & & +p^2 & \\ y^2 & * & +x^2 & -cy & +bx & * & =0 \\ & & & & -ax & & \end{array}$$

Loca vacua replentur ſtellula, ut appareat, quinam termini ſint nihilo æquales in caſu particulari dato. Hoc nimirum pacto ſtatim videmus, quinam coëfficientes ſint invicem comparandi & quinam poni debeant nihilo æquales, ne ex confuſione oriatur error. Quamvis vero prolixitatis evitandæ gratia non omnia combinavimus loca, quorum æquationes ex æquatione cubica vel biquadratica elicuimus; qui tamen ingenium & induſtriam ſuam exercere voluerint, hoc non inutiliter facient. Ubi vero comparatione æquationum particularium cum formula generali facta valores omnes linearum ad conſtructionem loci requiſitarum fuerunt determinati, oculi convertendi ſunt in ſchema formulæ generali reſpondens & delendæ lineæ, quarum valores reperti ſunt nihilo æquales: ita enim relinquitur ſchema æquationi particulari reſpondens. Quamobrem ſi lineis remanentibus adſcribas valores modo repertos; ſtatim videbis, quomodo locus ſit conſtruendus. Et ubi ſchemata duobus locis reſpondentia inter ſe confers, illico patebit, quomodo unum alteri ſit imponendum, ut lineæ, quæ utrobique eædem ſunt, ſibi mutuo congruant, conſequenter quomodo æquatio data ſit conſtruenda. Hac via ſi incedere volueris, non modo aberit moleſtia, quæ ex nimis diu continuanda meditatione ſuboritur; verum etiam conſtructione ad finem perducta voluptate perfundetur animus, quæ ſtudium Matheſeos continuo magis magisq; tibi commendabit & ardorem in eodem progrediendi accendet. Inprimis etiam ſenſum evidentiæ acquires, ſtatim poſthac animadverſurus, ubi diſtincte perceptis quædam permiſcentur, quæ adhuc confuſe percipiuntur: id quod inprimis uſui eſt extra Matheſin, ubi confuſe perceptorum cum diſtincte perceptis commixtio magis nocet, quam in Matheſi, præſertim iis in caſibus, in quibus intellectus ab imaginatione avocandus totus, ut veritatem liquidam perſpicias. Hoc etiam obti-

obtinebis, ne nimia festinatione te præcipites, & ut inter multos strepitus attentionem conserves, eamque interrumpere possis, quotiescunque volueris, certo semper tramite progressurus, quando visum fuerit, quemadmodum viator recta via incedens ab eadem minime aberrat, nec iter jam emensum repetere tenetur, ubi gradum sistit, quotiescunque libuerit. Neque verendum est, ut diuturna meditatione defatigetur animus & sanitati corporis insidiæ struantur. Non opus est, ut in hisce asserendis multum studii collocemus, quamvis ad singula demonstranda a priori principia suppeditet Psychologia nostra. Qui enim dictis obediens fuerit, in seipso experietur, veritati consentanea esse, quæ dicimus non loquentes nisi experta.

§. 221. Quoniam idem problema multis modis construi potest, cum v. gr. eidem æquationi cubicæ satisfaciat non modo cujusvis loci solidi cum loco ad circulum, verum etiam cujusvis loci solidi cum quovis loco solido combinatio; quæri omnino poterat, quænam curvæ sint ceteris præferendæ. *Cartesius* æquationes cubicas & biquadraticas non construit nisi per parabolam & circulum, etsi non ignoraverit, easdem quoque construi posse per ceteras sectiones conicas atque circulum. Videtur utique hoc fecisse, quod æquatio parabolæ & circuli sit simplicior æquationibus ceterarum sectionum conicarum. Cum enim vitium ἀγεωμετρισίας ipsi sit, si æquatio construatur per lineas superioris cujusdam generis, quæ construi potest per lineas generis inferioris veluti si æquatio cubica vel biquadratica construatur per curvas secundi generis, cum construi possint per curvas primi generis; ex ejusdem omnino generis curvis eas præferre debuit, quæ per æquationes simpliciores definiuntur. Recte autem monuit *Newtonus* in constructione problematum geometricorum non respiciendum esse ad æquationes curvarum, sed potius ad earum descriptionem, ita ut hæ præferantur aliis, quæ sunt facilioris descriptionis. Unde ad construenda problemata solida adhibet Conchoidem, etsi ea sit tertii generis. Immo non improbat, si

ſi quis ad datum angulum in data ratione ſecandum utatur cycloide, quæ motu rotæ vel circuli ſuper recta facillime deſcribitur, etſi ea per nullam æquationem algebraicam definiri poſſit. Etſi autem æquationes cubicæ ac biquadraticæ omnes per circulum & parabolam conſtrui poſſint; non tamen ideo conſultum eſt, ut non aliis etiam ſectionibus Conicis in iſtis æquationibus conſtruendis utamur. Etenim ubi problemata algebraice ſolvimus, haud raro incidimus in æquationes locales alterius ſectionis conicæ, quam parabolæ, ut adeo ſua veluti ſponte ſeſe offerat ad conſtructionem, cum parabola demum anxie quærenda eſſet, & per aliam ſectionem conicam, quam parabolam haud raro multo concinnius conſtrui poteſt. Quædam adeo lineæ quibusdam problematis videntur quaſi propriæ, ita ut deſtinentur eorundem conſtructioni, quia pariunt elegantem & ſimpliciorem, ſi linearum rationem habeas, ex quibus datis quæſita determinanda, cum conſtructiones ceteræ evadant intricatiores, & ſchemata pariant confuſa, ſi omnes conſtructiones ſubſidiariæ eidem ſimul inferendæ, nec curva ſupponatur tanquam data, nec lineæ ex coëfficientibus terminorum reperiundæ tanquam jam repertæ.

§. 222. Apud veteres celebrabantur problemata de inveniendis lineis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas & de triſectione anguli. Cum enim per Geometriam elementarem facillime inveniatur media proportionalis inter duas datas, & angulus non minus facile biſecetur per *ſolas* rectas & circulum ſeu per Geometriam elementarem; veteres primum horum problematum ſolutiones interſectione rectarum & circuli quoque tentarunt, ſed fruſtra. Unde ad conſtructiones per alias lineas curvas confugiendum tandem erat. Quamobrem noſtrum quoque erat, ut conſtructiones æquationum cubicarum & biquadraticarum illuſtraturi horum inprimis problematum rationem haberemus. Diſtinxerunt vero ideo veteres problemata in plana, ſolida & linearia. Plana appellarunt, quæ per rectas & circu-

circulum construi possunt, quia hæ lineæ supponuntur in plano descriptæ; solida, ad quorum constructiones adhibendæ sunt sectiones conicæ, quæ, cum per coni dati sectionem prodeant, tanquam in solido datæ supponuntur. Cumque præter rectam, circulum & sectiones conicas lineas alias in Geometriam recipere nollent, problemata plana & solida sola geometrica appellarunt, quemadmodum etiam lineas istas solas geometricas dixerunt. Per alias vero lineas construenda problemata mechanica vocarunt, ipsasque, quarum ope construuntur, lineas mechanicas nuncuparunt. Ast *Cartesius* connubium Arithmeticæ cum Geometria introducens, cum videret sectiones conicas per æquationes definiri posse algebraicas, & præter eas dari curvas innumeras alias, quæ per istiusmodi æquationes definiuntur, hasce omnes illis æquiparavit & in Geometriam recipiendas esse intulit, in numerum mechanicarum rejectis, quæ æquationes istiusmodi respuunt. Invento autem calculo differentiali, cum curvæ *Cartesio* mechanicæ dictæ non minus per æquationes differentiales definiantur, quam ceteræ per ordinarias & ad constructiones problematum utilissimorum adhibeantur, quemadmodum in Mechanicis videbimus, his quoque aditus, in Geomemetriam factus. Unde multo amplior evasit speculationum geometricarum campus, qui a veteribus intra nimis arctos limites coërcebatur. Sane inventa longe præclarissima ex Mathesi exularent, si recentiores Geometræ vestigiis vel veterum, vel *Cartesii* insistere voluissent.

§. 223. Non omnia problemata per rectam & circulum construi posse, inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium inter duas datas & trisectio anguli docuit, & ex æquationibus algebraicis, ad quas ducunt solutiones problematum, patet ratio. Quemadmodum enim æquationum quadraticarum constructio pendet ab invenienda una linea media proportionali inter duas alias quomodocunque datas; ita constructio cubicarum supponit duas medias continue proportionales, constructio biquadra-

ticarum tres inveniendas & ita porro. In æquationibus puris hoc ipsum obvium est; in affectis non minus ostendi potest. Sufficiat nobis in gratiam tyronum id ostendisse in æquationibus puris. Æquatio quadratica pura est $x^2 = ab$. Patet hic esse

$$a : x = x : b$$

adeoque constructurus æquationem invenire debet mediam proportionalem inter $a$ & $b$.

Æquatio cubica pura est

$$x^3 = a^2 b$$

$$\text{adeoque } x^4 = a^2 b x$$

$$a^2 : x^2 = x^2 : b x$$

$$\text{fit } b x = y^2$$

$$\text{erit } x : y = y : b$$

$$\& \quad a^2 : x^2 = x^2 : y^2$$

$$a : x = x : y = y : b$$

Igitur $a.\ x.\ y.\ b$ sunt continue proportionales. Æquationem ergo cubicam puram constructurus invenire debet duas medias continue proportionales inter datas $a$ & $b$, quarum prima $x$ est radix æquationis cubicæ puræ.

Similiter æquatio biquadratica pura est

$$x^4 = a^3 b$$

$$\text{Quare } a^3 : x^3 = x : b$$

$$= x^3 : bx^2,$$

$$\text{fit } bx^2 = y^3$$

$$\text{erit } a^3 : x^3 = x^3 : y^3,$$

$$a : x = x : y$$

$$\& \quad x^2 : y^2 = y : b$$

$$= y^2 : by$$

$$\text{fit } by = z^2$$

$$\text{erit } x^2 : y^2 = y^2 : z^2,$$

$$x : y = y : z$$

$$\& \quad y : z = z : b$$

Habemus adeo

$$a : x = x : y = y : z = z : b$$

consequenter $a.\ x.\ y.\ z.\ b$ sunt continue proportionales & æquationem biquadraticam puram constructurus invenire debet tres medias continue proportionales inter duas datas $a$ & $b$, quarum prima $x$ est radix æquationis. Interfectio rectæ & circuli nonnisi unam exhibet lineam mediam continue proportionalem inter duas. Quamobrem si plures inveniendæ supponuntur, sola rectæ ac circuli interfectione obtineri minime possunt. Hinc duarum inventio deduxit *Menechmum* ad interfectionem duarum parabolarum, quemadmodum vidimus supra (§. 218.).

§. 224.

§. 224. Forsan autem non inutile erit, si hic exemplo aliquo ostendamus, quomodo inventio duarum linearum mediarum continue proportionalium ad æquationes cubicas affectas deducat, ne quæ de extremis quomodocunque datis diximus obscura videantur, nec satis a tyronibus intelligantur. Sit igitur problema tale: *Data quatuor quantitatum continue proportionalium prima & differentia quartæ a secunda; invenire singulas.* Resolutio hæc erit.

Sit Quant. I. $= a$ Quant. II $= x$
Differ. II & IV $= b$ III $= y$
erit IV $= x - b$

& per conditionem problematis

$$a : x = x : y \qquad a : x = y : x - b$$

$$x^2 = ay \qquad xy = ax - ab$$

$$\frac{x^2}{a} = y \qquad y = \frac{ax - ab}{x}$$

adeoque

$$\frac{x^2}{a} = \frac{ax - ab}{x}$$

$$x^3 = ax^2 - a^2 b$$

$$x^3 - ax^2 + a^2 b = o$$

Videmus itaque constructionem æquationis cubicæ affectæ dependere ab inventione duarum mediarum proportionalium inter duas extremas, quarum prima simpliciter datur, altera autem per differentiam a prima mediarum. Ad constructionem vero sese offerunt æquatio ad parabolam $x^2 - ay = o$, & æquatio ad hyperbolam intra asymptotos $xy - ax + ab = o$. Cum vero etiam sit $x : y = y : x - b$ adeoque $y^2 = x^2 - bx$, consequenter $y^2 - x^2 + bx = o$; loco hyperbolæ intra asymptotos offert etiam sese hyperbola æquilatera.

Eodem modo ex sequente problemate liquet, quomodo inventio unius mediæ proportionalis ducat ad æquationem quadraticam affectam. Scilicet *data quantitatum continue proportionalium prima & differentia tertiæ a secunda, invenienda sit secunda.* Sit itaque

Quantitas I $= a$ Quant. II $= x$
Differ. II & III $= b$ erit III $= x - b$

adeoque per conditionem problematis

$$a : x = x : x - b$$

$$x^2 = ax - ab$$

$$x^2 - ax + ab = o$$

Non sine ratione addimus exemplum æquationis quadraticæ affectæ, propterea quod harum æqua-

æquationem conſtructionum reduximus ad inventionem linearum reciprocarum ( §. 265. *Anal.*), ne exiſtiment tyrones veritati conſentaneum non eſſe, quod eadem pendeat ab inventione mediæ proportionalis inter duas extremas quomodocunque datas. Poterant caſus omnes æquationum cubicarum per inventionem duarum, caſus vero omnes æquationum biquadraticarum per inventionem trium mediarum continue proportionalium illuſtrari, ſiquidem prolixioribus eſſe licuiſſet.

§. 225. Doctrina de numeris irrationalibus illuſtratur problemate 259 ( §. 630. *Anal.*), in quo oſtendimus, quomodo numerus irrationalis quicunque per lineam exprimatur, ut intelligatur, cur veteres quantitates irrationales non in numeris, ſed in continuo conſiderarent, unde oriuntur, adeoque eas ad Geometriam retulerint. Attentionem denique meretur uſus conſtructionis æquationum ad curvas datarum per combinationem locorum, cum hoc pacto ope curvarum inferioris generis conſtrui poſſint curvæ ſuperioris, quemadmodum ope parabolæ & circuli conſtruximus parabolam cubicam & circulum ſecundi generis. Etſi enim hæ conſtructiones ſint moleſtiores, quam ut in uſum recipiantur; ſufficit tamen quod per easdem in curva, quæ deſcripta ſupponitur, quodvis punctum datum ad examen revocari poſſit, num rite fuerit determinatum, & ſaltem ex poſſibilitate conſtructionis pateat curvæ poſſibilitas.

§. 226. Satis oſtendimus, quomodo in Elementis noſtris Analyſeos finitorum verſari debeat, qui artem hanc intimius perſpicere ſibique familiarem reddere voluerit, quamvis longe plura annotare poteramus, ſi ſingula accuratius perpendenda proponere viſum nobis fuiſſet, nec acquieſcere voluiſſemus in ſpeciminibus, quæ in aliis imitari poterit attentione ſufficiente uſus. Reſtat igitur ut doceamus, quomodo in Analyſi finitorum ſit verſandum. Initio tyrones non ſcrupuloſiores eſſe debent in notione quantitatis infinite parvæ expendenda, modo notent eas non in ſe eſſe nihilum, ſed tantummodo reſpectu aliarum

rum pro nihilo haberi: quo facit Scholion def. 2. (§. 5. *Analys. infin.*). Quodsi enim difficultates quædam supersunt, quæ assensum remorantur; eædem in progressu evanescent: tollentur autem penitus, ubi ea perpenderis, quæ in Methaphysicis de ente infinito Mathematicorum imaginario demonstrantur (§. 796. & seqq. *Ontol.*) Dudum Mathematici ex differentiis quæsivere quadrata & cubos, quemadmodum docuimus in applicatione calculi literalis ad Arithmeticam (§. 81 & seqq. *Anal.*). Inventum hoc ansam dedit *Leibnitio* investigandi methodum ex differentiis colligendi terminos seriei cujuscunque continue crescentis, vel decrescentis, cum ignoraret, id jam in literas fuisse relatum a D. *Mouton*, Canonico Lugdunensi, ex observatione *Francisci Regnaldi*, Lugdunensis, quemadmodum constat ex epistola *Leibnitii* ad *Oldenburgium* scripta, quæ legitur in Commercio epistolico D. *Joannis Collins* & aliorum de Analysi promota jussu Societatis Regiæ Britannicæ in lucem edito, p. 32 & seqq. Calculum adeo differentialem primum exercuit in numeris, ubi differentiæ sunt finitæ seu assignabiles. Cum deinde opus præclarum de Quadratura circuli & sectionibus Conicis *Gregorii a S. Vincentio* ab *Hugenio* sibi commendatum legeret, in quo differentiæ magnitudinum infinite parvæ considerantur, quarum summæ exhibent ipsas magnitudines; hæc observans in calculum differentialem incidit, de quo hic nobis sermo est, methodo *Cavaleriana*, qua felicissime usus *Gregorius a S. Vincentio*, ad calculum perducta. In hoc calculo omnia pendent a differentiatione rectanguli $xy$. Quamobrem ad eam omnem attentionem afferre debent tyrones, ne in ceteris supersit ulla difficultas. Etenim si supponas, quomodo differentiale rectanguli $xy$ inveniatur, nullo negotio cetera erues per Algebram communem, quemadmodum ostendimus tum in ipso problemate primo n. II & seqq. tum in problemate secundo atque tertio. Constat lineam generari motu continuo puncti ab uno termino ad alterum, qualis est motus li quidi fluentis; unde a *Newtono* appellatur *Fluxus*. Con-

ſtat etiam ſuperficies iſtiusmodi motu linearum, ſolida vero modu ſuperficierum gigni. Quodſi ergo ad geneſin magnitudinum animum advertas; per ea, quæ ab *Euclide* & *Archimede* demonſtrata ſunt (§. 5. *Anal. infin.*), animadvertes, magnitudines creſcere vel decreſcere per incrementa vel decrementa inaſſignabilia, quæ ipſæ ſunt quantitates infinite parvæ, cum quibus hic nobis negotium eſt, a *Newtono* ad geneſin magnitudinum reſpiciente *Fluxiones* appellatæ, quemadmodum ipſas magnitudines, quæ hoc modo creſcunt vel deſcreſcunt, *Fluentes* vocat. Unde quantitatem differentiare ſtylo *Newtoniano* eſt invenire fluentis datæ fluxionem. Ut hæc rectius intelligantur, perpendant velim tyrones, ſi recta quædam AB juxta ductum alterius rectæ AC motu ſibi ſemper parallelo atque æquabili moveatur deorſum, dum interea punctum quoddam motu quomodocunque accelerato in ipſa recta AB a termino A verſus alterum B progreditur; punctum deſcribet lineam curvam AM, recta vero ſpatium curvilineum APM. Quodſi ponamus rectam ex P pervenire in *p*, adeoque abſciſſam AP augeri incremento P*p*; evidens eſt eodem, quo hoc accidit, momento ſemiordinatam PM augeri incremento *m*R, arcum AM incremento M*m*, & ſpatium curvilineum APM incremento P*pm*M. Arcus adeo AM differt ab arcu A*m* arculo M*m*, ſemiordinata PM a ſemiordinata *pm* particula *m*R, ſpatium curvilineum ſive area APM ab area A*pm* particula P*pm*M dum differentia abſciſſæ AP ab abſciſſa A*p* eſt P*p*. Unde ſtylo *Leibnitiano*, ſi in tempuſculo infinite parvo incrementum P*p* eſt inaſſignabile, hoc ipſum incrementum P*p* dicitur differentiale abſciſſæ A*p*, *m*R differentiale ſemiordinatæ PM & M*m* differentiale arcus AM & tandem P*pm*M differentiale areæ APM: ſtylo autem *Newtoniano* P*p* abſciſſæ, *m*R ſemiordinatæ, M*m* arcus, P*p*M*m* areæ fluxio eſt. Atque adeo patet, cur calculus differentialis ſeu methodus fluxionum in Geometria ſublimiori tantæ ſit utilitatis: id quod ex ejus applicatione clarius eluceſcet. Incrementa abſciſſæ P*p* generantur motu æquabili, adeoque æquali tempore ſive tempuſcu-

Tab. III. Fig. 32.

pusculo æqualia sunt: ast cum incrementa semiordinatæ *m*R eodem tempusculo generentur motu inæquabili & incrementa lineæ curvæ sive arcus M*m* atque areæ P*pm* M motu mixto ex æquabili & inæquabili, singula inæqualia esse debent. Unde liquet in hoc calculo magnitudinis unius incrementum sumi ut æquale, dum reliqua inæqualia sunt, quæ simul generantur. Non autem necesse est, ut abscissa ponatur crescere per incrementa æqualia; sed sumi etiam possunt momentanea incrementa magnitudinis alterius tanquam æqualia, quo casu abscissa crescit per inæqualia incrementa. Ponamus enim rectam AC æquabiliter moveri motu sibi semper parallelo juxta ductum rectæ AB, dum interea punctum motu continuo accelerato in illa descendit; patet incrementa Q*q* sive R*m* eodem tempusculo æqualia esse debere, dum interea incrementa S*m* sive P*p* inæqualia gignuntur. Hactenus dicta qui perpendit, is non modo animadvertet calculum differentialem niti methodo genetica & rigorem acquirere ex demonstratis ab *Euclide* & *Archimede* (§. 5. *Anal. infin.*); verum etiam in applicatione hujus calculi ad Geometriam sublimiorem nihil deprehendet obscuritatis.

Tab. III. Fig. 33.

§. 227. Ope calculi differentialis tangentes curvarum facillime determinantur hancque methodum non modo ad omnes curvas algebraicas extendi patet ex formula generali, quam dedimus (§. 32 *Anal. infin.*), verum etiam eandem ad alias curvas, quæ mechanicæ non sunt, applicari posse exemplo spiralium, cycloidis, Logarithmicæ & Quadratricis *Dinostratis* docuimus. Non opus hic est perplexis longisque calculis, nec methodum hanc irrationales quantitates remorantur, ut adeo nihil in eadem desiderari possit. Tota nititur ratione differentialium semiordinatæ ac abscissæ quæ sunt inter se in ratione semiordinatæ ad subtangentem, quemadmodum in resolutione probl. 4. (§. 20. *Anal. infin.*) demonstravimus. Quoniam enim quantitatibus proportionalibus infinite parvis substitui possunt aliæ finitæ, valor subtangentis, qua tangens determinatur, ex quantitatibus assignabilibus

libus componitur. Artificio hoc usus est *Barrowius* in sua Tangentium methodo: quod ut appareat, exemplo parabolæ Apollonianæ perfacili docere lubet. Tab. III. Fig. 34. Sit QN $= y$, AQ $= x$, PT $= t$. Sit semiordinata alia PM, & ei respondens abscissa AP, differentia earundem semiordinatarum adeo exigua, quantum desideratur, & differentiæ abscissarum MR exiguæ parvitatis. Sit PQ = MR $= e$, NR $= a$; erit PM $= y - a$ AP $= x - e$. Si parameter parabolæ fuerit $p$; habebimus

$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$
$$\& \; y^2 = px$$

adeoq; $-2ay + a^2 = -ep$

$$2ay = ep, \; ob \; a^2 = 0.$$

Est vero $e : a = t : y$

& $e : a = 2y : p$

adeoq; $t : y = 2y : p$

$$t = 2y^2 : p$$

Nemo non videt, si pro $a$ substituas $dy$, & pro $e$ ponas $dx$, prodire $2ydy = pdx$ & $t = \frac{ydy}{dx}$.

Unde resultat $t = \frac{2y^2}{p}$: Methodus itaque *Barrowiana* tangentium a præsenti, quam proponimus, non differt, & calculus, quo utitur *Barowius*, non differt a calculo differentiali nisi characteristica. Hæc sane ratio est, cur *Jacobus Bernoulli* primum existimaret calculum differentialem *Leibnitii* non differre a *Barrowiano* & DN. *de Tschirnhausen* contenderet, calculum differentialem *Barrowiano* ortum suum debere, præsertim cum *Leibnitius*, ubi eundem in Actis Eruditorum primum publicavit, non nisi ad methodum de maximis & minimis, quæ specialis casus est methodi tangentium, applicaret. Enimvero cum usus calculi differentialis in problematis magis arduis solvendis conspiceretur, aliter de eodem sentire cœperunt Geometræ, ipse etiam *Hugenius*, qui sibi persuadebat aliis methodis detecta tantummodo aliter exprimi hoc calculo.

§. 228. Methodus *Barrowiana* nititur artificiis *Cartesii* in determinanda tangente curvarum & principiis Geometriæ indivisibilium *Cavallerii* atque Algebræ ordinariæ. Etenim si curva AMNO secatur recta TO, erit Tab. III. Fig. 25.

erit NR: MR = PM, TP, quemadmodum demonstravimus in resolutione probl. 4. (§. 20.). Quamobrem si sit NR = $a$, MR = $e$, PM = $y$, TP = $t$. erit $a : e = y - ta : t$, & *e. gr. ex natura* parabolæ, cujus parameter $p$,

$$y^2 = px$$
$$y^2 - 2ay + a^2 = px - ep$$
$$- 2ay + a^2 = o - ep$$

Quodsi semiordinatæ PM & QN continuo propius ad se invicem accedant, ut differentiæ semiordinatarum NR & abscissarum MR sive PQ tandem degenerent in partes infinite parvas seu momentanea incrementa, recta MN degenerat in arculum cognominem, TN degenerat in tangentem & TP in subtangentem. Tum vero ex principiis Geometriæ indivisibilium $a^2 = o$ respectu $2ay$ & $ep$, & $y - a$ atque $y$ habentur pro æqualibus in contactu. Unde habemus:

$$- 2ay = - ep$$
seu $$2ay = ep$$
& $$a : e = y : t$$
quemadmodum ante (§. 227).

Ad methodum *Barrowianam* si applicatur vera characteristica infinitesimarum seu quantitatum infinite parvarum, sine qua algorithmus infinitesimalis non subsistit, qui est ipse sic dictus calculus differentialis, prodit methodus tangentium, quam hic applicamus. Ope autem hujus calculi non modo expedita redditur, verum etiam extenditur, ut ultimum suum complementum ab eodem accepisse dicenda sit. Obiter hic annotamus, quando quæstio est de inventore calculi differentialis, id potissimum quæri, quinam primus Algorithmum quantitatum infinite parvarum invenerit, & in solvendis problematis exercuerit, cum antea adhiberetur calculus literalis communis & vi principiorum Geometriæ indivisibilium termini quidam expungerentur respectu ceterorum evanescentes. Similis quodammodo est hæc quæstio alteri communi, qua quæritur, quinam sit inventor veræ characteristicæ numerorum & Algorithmi communis, quo hodie utimur in Arithmetica tanta calculi commoditate & amplitudine. Habuere veteres numerorum signa, sed parum apta. Usi iisdem sunt in Arithmetica practica. Non tamen ideo dici potest, quod habuerint veram numerorum chara-

racteriſticam, & Arithmeticam practicam talem, qualem nunc habemus, nec quisquam hodie inventis notis numericis, quorum ſignificatus ex ipſa numerorum natura deductus, aliis quam hiſce ſignis uti vult: quemadmodum nec hodie inventa vera characteriſtica quantitatum infinite parvarum, qua calculus infiniteſimalis in Analyſin introductus, ut per modum Algorithmi exerceri poſſit, quisquam calculum literalem communem adhibere mavult in ſolvendis problematis, quorum ſolutio a quantitatibus infinite parvis pendet. Equidem ex ore ipſius DN. *de Tſchirnhauſen* hauſi, quod contenderet, ſe per Algebram communem eadem præſtare poſſe, quæ per calculum differentialem adeo feliciter eruuntur, nec calculum hunc eſſe veram methodum, ſed tantummodo veræ methodi compendium, qualia complura, immo, ut ipſe confidenter admodum loquebatur, infinita excogitari poſſint, hocque ſeſe oſtenſurum in ſecunda parte Medicinæ Mentis; nunquam tamen dictis fidem fecit, quin potius morti vicinus Schedas ſuas MSC. Vulcano tradidit, ne publicum ſtatueret, quo ſucceſſu in vera, quam pollicebatur, methodo detegenda fuerit verſatus & quousque fuerit progreſſus. Conſtat autem ex iis, quæ dedit in Actis Eruditorum, quod nimia in ſe ipſum confidentia de iis, quæ animo verſabatur, locutus fuerit, quaſi a ſe jam eſſent inventa, etſi re penitius examinata impoſſibilia deprehenderentur. Oſtendi in Arithmetica, calculum numeroſum ita inſtitui poſſe, ut conſervetur univerſalitas, quemadmodum in literali, & hoc pacto inveniri per calculum numeroſum, quæ per literalem eruuntur. Oſtendi ſuperius, quomodo Algebra numeroſa ad ſolvenda problemata geometrice applicari poſſit, ut prodeant formulæ algebraicæ geometrice conſtruendæ (§. 194). Immo oſtendi, quomodo retenta communi linearum deſignatione regulæ Algebræ ad ſolutiones problematum geometricorum applicari potuerint (§. *cit.*). Ecquis vero dixerit, ſi quis hoc feciſſet, ante inventam Arithmeticam literalem, eum jam habuiſſe Algorithnum univerſalem & Algebram ſpecioſam? Immo ſi hanc methodum ad tractandas

ctandas curvas adhibuisset, ecquis dixerit, eum habuisse methodum *Cartesii* tractandi curvas per æquationes algebraicas? Habuisset similem quandam methodum, sed non eandem, ut adeo in multis paria præstare potuisset, ast non eadem facilitate. Ars characteristica differt a methodo & pro illius diversitate hæc prorsus aliam induit formam, ita ut non modo facilius præstentur, quæ fieri debent, verum etiam plura in potestate sint, quam si alia characteristica adhiberetur. Patebunt hæc clarius, ubi Ars inveniendi ad formam artis fuerit redacta, quemadmodum Logica & qui ad diversitatem methodorum, prouti hæ per artem characteristicam modificantur, animum adverterit, prouti in hac commentatione inculcamus, eadem perspiciet. Talia autem observasse non tantum proderit ei, qui artem inveniendi ad formam artis reducere voluerit; sed etiam qui in Mathesi addiscenda ad tertium cognitionis gradum adspirat, ut methodos, quæ ipsi innotuerunt, limare iisdemque omnem suam amplitudinem tribuere possit, quam suscipere valent, ne a casu expectandum sit, quod artis est, usu facultatum huc requisito non occasione sponte oblata, sed ex scientia determinato, nec tentaminibus subjiciatur, quod certa lege regitur. Nihil hic asserimus, quod non obvium sit ei, qui in Mathesi addiscenda præscripto a nobis modo fuerit versatus. Multa hic annotare poteramus, siquidem prolixioribus esse liceret, nec a præsenti instituto digressio longior videretur aliena.

§. 229. Notandum vero est, formulas algebraicas, quæ pro subtangente prodeunt, geometrice esse construendas, siquidem tangentem curvæ actu ducere volueris. Omittimus istas constructiones brevitatis gratia, propterea quod in Analysi finitorum satis perspicue docuimus, quomodo istiusmodi fomulæ construantur. Tyronibus tamen, quorum est exercere artem, eædem negligendæ non sunt. E. gr. subtangens ellipsis est

$$\frac{ax - x^2}{\frac{1}{2}a - x}$$

(§. 25. *Anal. infin.*). Est itaque Tab.
$\frac{1}{2}a - x : a - x = x : PT$ III.
h. e. $PC : PB = AP : PT$ Fig. 36.

Quodsi ergo fiat PQ = PC & PR = PB, ductæque rectæ AQ agatur parallela TR; erit

$$PQ : PR = AP : PT$$

h. e. $PC : PB = AP : PT$

adeoque subtangens PT rite determinata, consequenter TM tangens quæsita.

Quoniam subtangens pro omnibus ellipsibus in infinitum $\frac{(m+n)(ax-x^2)}{ma-mx-nx} = \frac{ax-x^2}{ma:(m+n)-x}$ habemus:

$$\frac{ma}{m+n} - x : a - x = x : PT$$

Patet itaque non absimili modo tangentem pro omnibus ellipsibus in infinitum determinari posse. Et quia pro circulo eadem subtangentis formula reperitur, quæ pro ellipsi *Apolloniana*, & pro infinitis circulis eadem formula, quæ pro ellipsibus infinitis, nisi quod isthic $n = 1$; eodem etiam modo tangens omnium circulorum in infinitum determinatur. Immo cum formula subtangentis hyperbolarum a formula subtangentis ellipseos non differat nisi signis, tangens etiam hyperbolarum in infinitum non absimili modo determinatur. Subtangens curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$, est

$$\frac{3y^3 - axy}{3x^2 + ay} = \frac{y^3 - \frac{1}{3}axy}{x^2 + \frac{1}{3}ay.}$$

Habemus itaque

$$x^2 + \tfrac{1}{3}ay : y^2 - \tfrac{1}{3}ax = y : PT$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x = y : PT$$

Quantitates $\frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$ & $\frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$ concinna admodum constructione reperiuntur hunc in modum. Tab. III. Fig. 37. Fiat $CA = \frac{1}{3}a$, sitque $AP = x$, $PM = y$. Erigatur in A perpendicularis AN ipsi PM æqualis, seu construatur parallelogrammum rectangulum AP MN. Ducta recta CN erigatur ad eandem perpendicularis NR. Erit $PR = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x$. Est enim

$$CA : AN = AN : AR$$

$$\tfrac{1}{3}a : y = y : \frac{y^2}{\frac{1}{3}a}$$

$$\text{Ergo } PR = AR - AP = \frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x.$$

Fiat porro AO = CA, ductaque OP erigatur PS ad eandem perpen-

pendicularis occurrens ipſi NA ultra rectam CP continuatæ in S. Erit NS $= \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$. Eſt enim

$$AO : AP = AP : AS$$
$$\tfrac{1}{3}a : x = x : \frac{x^2}{\frac{1}{3}a}$$

Ergo NS = SA + AN $= \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y$.

Quodſi curva ſupponatur data ſeu in plano deſcripta, datis jam NS & PR ſubtangens nullo negotio determinatur.

§. 230. Quoniam normalis ad tangentem perpendicularis, tangens quoque determinatur per normalem, conſequenter etiam per ſubnormalem, per quam normalis determinatur. Subinde ſubnormalis per conſtructionem faciliorem reperitur, adeoque præſtat tangentem determinare per normalem, quam per ſubtangentem. Exemplum habemus in circulo, ubi radius ad tangentem perpendicularis, quemadmodum per præſentem quoque methodum calculo eruitur (§. 38. *Anal. infin.*), vi cujus ſubnormalis reperitur diſtantiæ ſemiordinatæ a centro æqualis, adeoque datur data abſciſſa, cum ſubtangens eandem requirat conſtructionem, quam Ellipſis exigit (§. 229.). Enimvero ſubinde etiam ſubnormalis poſtulat conſtructionem magis compoſitam quam ſubtangens; ſubinde utraque eadem ſimplicitate gaudet. Illius exemplum præbet ellipſis; hujus vero curva, ad quam eſt æquatio $y^3 - x^3 = axy$. Etenim in Ellipſi eſt (§. 40. *Anal. infin.*

$$ax - x^2 : y^2 = \tfrac{1}{2}a - x : PH$$ Tab. III. Fig. 38.
$$a - x : \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PH$$

Fiat itaque AQ = PM = $y$, & in Q erigatur perpendicularis QN rectæ per A & M ductæ in N occurrens, erit QN $= \frac{y^2}{x}$.

Eſt enim

$$AP : PM = AQ : QN$$
$$x : y = y : \frac{y^2}{x}$$

Continuetur PM in O, donec PO = QN, & ex centro C ducatur recta RC ipſi OB parallela, erit PR ſubnormali æqualis. Eſt enim

$$PB : PO = PC : PR$$
$$a - x : \frac{y^2}{x} = \tfrac{1}{2}a - x : PR$$

 Quare

Quare si fiat PH = PR, habebis subnormalem, eritque HM normalis quæsita. Hanc constructionem si cum ea conferre volueris, quam pro subtangente dedimus (§. 229.); patebit eam esse magis compositam. Subnormalis curvæ, quæ definitur per æquationem $y^3 - x^3 = axy$ reperitur $= \frac{x^2 y + \frac{1}{3}ay^2}{y^2 - \frac{1}{3}ax.}$

Habemus itaque

$$y^2 - \tfrac{1}{3}ax : x^2 + \tfrac{1}{3}ay = y : PH$$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{3}a} - x : \frac{x^2}{\frac{1}{3}a} + y = y : PH$$

Analogia hæc ab altera, quam pro subtangente elicuimus (§. 229.), non differt, nisi quod termini in ratione priori invertantur, consequenter constructio eadem fere manet, nec simplicior est pro subnormali, quam pro subtangente.

§. 231. Methodus determinandi asymptotos curvarum nititur principio reductionis. Asymptoti enim considerantur instar tangentium in puncto a vertice infinito intervallo distante, ut abscissa eidem respondens sit infinita, consequenter axis $a$ habeat ad eandem rationem inassignabilem, adeoque fiat respective nihilum. Hanc suppositionem a veritate non recedere, tyrones inde intelligunt, quod in hac hypothesi eruantur eædem quantitates linearum, per quas asymptoti determinantur, quas supra in Analysi finitorum aliter demonstravimus. Novarum enim methodorum examina haberi debent, si applicentur ad jam nota. Ceterum attendant tyrones ad differentiam, quæ inter absolute nihilum seu nihilum verum, & inter respective nihilum seu quod respectu quantitatis alterius pro nihilo habetur, intercedit. Etenim si qua quantitas per absolute nihilum multiplicatur, nihilo æqualis est: sed quæ ducitur in respective nihilum non evadit nihilo æqualis. Hinc (§. 47. *Anal. infin.*) in valore $ax : (a + 2x)$, recta $a$ non quidem auget valorem rectæ $2x$, ut adeo sit $a + 2x = 2x$, attamen non efficit $ax$ nihilo æquale, sed hoc factum spectatur tanquam quantitas $a$ infinities sumta, quia $a$ quantitas finita, $x$ infinita. Idem patet in æquatione $ay^2 = bx(a + x)$, quæ, quia $a$ respective nihilum, reducitur ad æquationem $ay^2 = bx^2$. Unde simul liquet, si sumatur $ay^2 = abx + bx^2$, cur infinitum

finitum primi gradus $abx$ habeatur pro nihilo respectu infiniti secundi gradus $ay^2$ & $bx^2$, quippe quod infinitum primi gradus infinities superat, quemadmodum infinitum primi gradus quantitatem finitam. Non nego, hæc in numerum fictionum referenda esse; sunt tamen toleranter vera, ut cum *Jungio* loquamur, & in calculo quemadmodum fictiones aliæ utiliter adhibentur. Cavendum itaque, ne in præjudicium veritatis talia in Physicam inferantur principia, ex qua imaginaria exulare debent, quippe ubi in veras phænomenorum causas inquirimus.

§. 232. Attentionem quoque peculiarem meretur problema 7. (§. 49 *Anal. infin.*) in quo subtangens & subnormalis in Conchoide determinatur. Curva hæc ex numero algebraicarum est: unde semiordinatæ ejus sumi possunt ad axem AB normales.
Tab. I. Anal. infin. Fig. 5. Habet vero eadem etiam polum C: unde pro semiordinatis quoque haberi possunt rectæ CM ex polo C ad punctum curvæ M ductæ. Quamobrem duplicem explicamus methodum determinandi ejus tangentem & normalem. Prima eadem est, qua utimur in curvis algebraicis ceteris, nisi quod valor ipsius $dx$ non ex æquatione ad curvam, sed aliis artificiis eruatur, ne formulæ pro subtangente & subnormali prodeant nimis perplexæ, constructionem minus concinnam parientes. Formula autem pro subnormali expeditior est, quam pro subtangente, adeoque in constructione præferenda. Cum enim sit subnormalis $= t + \frac{z^2 - az}{v} = t + \frac{(z-a)z}{v}$; erit

$$v : z = z - a : \frac{z^2 - az}{v}$$

$$PB : MC = QC : \frac{z^2 - az}{v}$$

cui si addatur $PC = t$; prodibit subnormalis. Formula subtangentis $\frac{v(z^2 - t^2)}{z^2 - az + tv} = \frac{z^2 - t^2}{\frac{z^2 - az}{v} + t}$

resolvitur in hanc analogiam:

$$\frac{z^2 - az}{v} + t : z + t = z - t : PT$$

Atque adeo patet, si formula subtangentis construenda, ante inveniendam esse subnormalem. Data

Data autem subnormali, datur etiam tangens, ut adeo ulteriori constructione non habeamus opus. Altera methodus nititur hypothesi semiordinatarum in puncto quodam concurrentium, quam ideo addere visum est, ut idea ejus animo ingeneretur ad alia profutura.

§. 233. Notanda vero sunt artificia, quibus subtangens determinatur in iis curvis, quarum semiordinatæ in puncto quodam coëunt. Nimirum quia in curvis algebraicis subtangens intercipitur inter tangentem & semiordinatam, in puncto communi concursus excitatur perpendicularis tangentem, cui occurrit, secans, quemadmodum videre est in methodo altera pro conchoide & in methodo pro spiralibus. In Cycloide subtangens determinatur per intersectionem tangentis cycloidis & tangentis circuli genitoris, quia portio illa tangentis intercipitur inter semiordinatam & tangentem cyclodis, etsi ad illam non sit perpendicularis, ut adeo hic a significatu termini tantisper recedatur, quem is in curvis algebraicis habet, quemadmodum etiam non retinetur significatus prorsus idem semiordinatæ, ubi eædem in puncto quodam concurrunt. Nimirum definitiones terminorum inventæ sunt pro curvis algebraicis; deinceps per analogiam quandam aptantur ad curvas alias termini, ut in iisdem proprias sibi nanciscantur definitiones. Absit itaque, ut tibi persuadeas, ipsos Geometras alere significatum terminorum vagum. Ita *subtangentem cycloidis* definire licet per portionem tangentis circuli in puncto intersectionis circuli & semiordinatæ cycloidis inter semiordinatam & tangentem cycloidis interceptam, & cum definitiones nominales sint arbitrariæ, utique hoc facere licet. Nec ideo dicere licet, quod vocabulum *Subtangens* varios habeat significatus. *Subtangens* enim *cycloidis* non est subtangens curvarum simpliciter ita dicta. In Quadratrice *Dinostratis* abscissa sumitur in circulo genitore & portio radii quadratricem secantis pro semiordinata. Quoniam hic recta ad semiordinatam perpendicularis cum tangente in puncto contactus concurrit quæ adeo extra ipsum eam non secat, ideo necesarium fuit, ut

eo,

eo, quem explicavimus (§. 55. *Anal. infin.*) modo determinaretur. Ad hoc animum probe advertere debent tyrones, ne notione subtangentis confundantur, ubi ipsimet tangentes in curvis non algebraicis determinare voluerint.

§. 234. Methodus de maximis & minimis nititur principio reductionis: maximæ enim & minimæ applicatæ reducuntur ad casum tangentium. Et similititer applicatio hujus methodi ad problemata particularia eodem principio nititur, quatenus quantitatum series ad certum quendam terminum continuo cresentium vel decrescentium, deinceps rursus decrescentium vel crescentium exponitur per semiordinatas curvæ cujusdam algebraicæ, in qua semiordinatæ eandem constantem relationem habent ad abscissas, quæ convenit quantitatibus crescentibus vel decrescentibus. E. gr. Si linea recta ita secanda, ut rectangulum ex segmentis sit maximum eorum, quæ hac ratione construi possunt, constans relatio quantitatis continuo crescentis usque ad terminum maximum exprimitur per factum segmentorum in se invicem. Quamobrem si segmentum minus sumas pro abscissa; problema hoc reducitur ad circulum, in quo maxima semiordinata determinanda.

§. 235. Ut ideam calculi summatorii, qui vulgo integralis dicitur, animo concipiant tyrones, repetendum est ex superioribus, magnitudines crescere per momentanea incrementa. Nimirum si tempusculo quodam abscissa augetur incremento Pp, semiordinatæ accedit incrementum mR, arcui incrementum Mm & areæ incrementum PpmM. Unde si Abscissa AP = $x$, constare concipitur ex infinitis istiusmodi incrementis successivis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per $dx$, ita ut summa omnium $dx$ sive $\int dx = x$. Similiter semiordinata PM = $y$ constare concipitur ex infinitis istiusmodi incrementis, quorum unumquodque indefinite exprimitur per $dy$, ita ut summa omnium $dy$ sive $\int dy = y$. Arcus AM = $v$ constare concipitur ex infinitis istiusmodi incrementis, quorum unumquodque $dv$, ita ut Tab. III. Fig. 32.

ut $\int dv = v$ & area APM conſtare concipitur ex innumeris iſtiusmodi areolis, quarum unumquodque, quemadmodum oſtendimus, exprimitur per $ydy$, ita ut ſumma omnium iſtarum areolarum ſive $\int ydy$ ſit areæ æqualis. Calculo adeo ſummatorio quæritur ſumma omnium incrementorum momentaneorum, ut habeatur magnitudo, cujus incrementum indefnite datur. Quamobrem ſi valor incrementi exprimatur per relationem, quam habet ſemiordinata ad abſciſſam; per ſummationem reperitur valor ſemiordinatæ, arcus & areæ curvæ datæ. E. gr. in parabola $dy = \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx$. Quare $\int \frac{1}{2} a^{1:2} x^{-1:2} dx = a^{1:2} x^{1:2} = \sqrt{ax}$ eſt ſemiordinata parabolæ. Similiter in circulo $dy = \frac{1}{2}(a-2x) dx \, (ax - x^2)^{-1:2}$. Quare $\int \frac{1}{2} (a-2x)(ax-x^2)^{-1:2} dx = (ax-x^2)^{1:2} = \sqrt{(ax-x^2)}$ eſt ſemiordinata circuli. Et in hyperbola intra aſymptotos $dy = ax^{-2}dx$. Quare $ax^{-1} = \frac{a}{x}$ eſt ſemiordinata hyperbolæ intra aſymptotos. Patet adeo per calculum ſummatorium reſtitui quantitatem variabilem, cujus differentiatione prodiit magnitudinis elementum, ſeu momentaneum in ejus geneſi incrementum. Unde Angli methodum fluxionum inverſam vocant, quia ex data fluxione reperitur fluens, quemadmodum per directam ex fluente fluxio. Regreſſus autem iſte non ubivis obvius eſt. Unde hodienum Mathematicorum ingenia exercet. Conſtabit autem ex problematis phyſico-mechanicis, qualia exempli loco in Mechanica dabimus, ſolutiones problematum ſæpe nos deducere ad æquationes differentiales, quarum integratione detegitur natura curvæ, vel ubi hoc fieri nequit ope æquationum differentialium curvæ conſtruuntur. Ope igitur hujus calculi multa in poteſtate ſunt, ad quæ alias non pateret aditus. Ceterum tyrones ad exemplum trianguli, quod primo loco (§. 101. *Anal. infin.*) exhibuimus, animum probe attendant, ut non modo idea methodi quadrandi curvas in eodem naſcatur, verum etiam dubium evaneſcat, quaſi ex neglectu trianguli characteriſtici oriri debeat in ſummatione error aſſignabilis; quod ubi fieret, impoſſi-

possibile erat, ut prodiret area trianguli tanta, quantam esse debere demonstratur in Elementis Geometriæ. Præstantia autem hujus calculi inde elucescit, quod paucis lineis non modo exhibeatur quadratura parabolæ Apollonianæ, sed & omnium parabolarum & curvarum ipsis agnatarum in infinitum, cum methodo Archimedea difficillime eruatur tantummodo prior.

§. 236. Cum nobis proposuerimus exemplis potius docere regulas, quam earum multitudine obruere memoriam tyronum, præceptis omnibus in unum locum congestis, antequam ad exempla accedatur; quæ de quantitate in summatione adjicienda tenenda sunt, exemplo quadraturæ segmenti parabolici inculcare lubuit (§. 107. *Anal. infin.*): ita enim ratio, cur adjicienda veniat, clarius percipitur, manifestior in casu particulari, quam si generalis detur. Ratio nimirum generalis est, quod in differentiatione, cum differentiale quantitatum constantium sit $= o$, quantitates constantes in composita variabilibus adjectæ evanescant, ita ut idem sit differentiale quantitatum $x + a$ atque $x$, & quantitatum $x - a$ atque $x$. Est enim & $d(x + a) = dx$, & $d(x - a) = dx$ & differentiale ipsius $x = dx$. Unde in summatione summæ adjiciendum, quod in differentiatione evanuit. Quomodo vero appareat, utrum aliqua quantitas constans sit adjicienda, nec ne, & num ea, quæ adjicienda venit, signum habere debeat positivum, an privativum, in exemplo particulari multo clarius elucet, quam si idem generaliter doceri deberet. Vidimus in doctrina de locis geometricis, initium abscissæ non modo statui posse in vertice A, ubi cum abscissa evanescit etiam semiordinata, evanescit arcus, evanescit spatium curvilineum abscissa, semiordinata & arcu contentum; verum etiam in puncto L infra verticem, vel in puncto N ultra eundem. Per hoc ipsum vero non variatur elementum abscissæ Pp, quod in omni casu idem est. Ne igitur in summatione obscurum sit, quod de quantitate adjicienda hic præcipitur, probe perpendant velim tyrones, quæ in scholio (§. 108. *Anal. infin.*) habentur. Inven-

Tab. II. Fig. 22.

tores talia non animadverterunt, nisi ubi animum ad solutionem particularium applicarunt, neque enim methodi repertæ sunt, nisi dum solutiones problematum tentatæ ad easdem deduxerunt inventores. Quamobrem qui Analysi tertii cognitionis gradus acquirendi gratia operam navat, eadem via incedere debet, quam calcarunt inventores, utut evitentur avia, in quæ haud raro inciderunt, cum in terris adhuc incognitis versarentur, antequam in viam regiam pervenirent. Ea quoque de causa non dedimus nisi particularium problematum solutiones, etsi facillimum fuisset generales huc transcribere. Neque enim existimandum est, generales solutiones fuisse particularibus priores, sed illæ potius ex his enatæ sunt. Plerumque majoris artis est solvere problemata in casu particulari, quam universaliter.

§. 237. Quadraturam parabolarum omnium, immo curvarum aliarum eidem agnatarum in infinitum nullo negotio dari per calculum integralem patet (§. 103. 105. *Anal. infin.*). Curvæ autem ceteræ, quas deinceps quadramus, tum etiam segmenta parabolica, quæ quadrantur, reducuntur ad parabolas, sive elementum per se non integrabile juxta canones generales reducatur ad integrabile, terminis finitis aut nonnisi uno constans, sive resolvatur in seriem infinitam, quæ terminos numero infinitos habet. Etenim in casu priore area curvæ reducitur ad areas tot parabolarum, quot sunt termini, in casu posteriori autem ad areas parabolarum infinitarum, quemadmodum in Geometria elementari figurarum rectilinearum & ipsius circuli areæ reducuntur ad areas triangulorum. E. gr. ubi segmentum parabolicum, cujus elementum est $dx \sqrt{(ab + ax)}$ quadrare jubemur, $dx \sqrt{(ab + ax)}$ reducimus ad $2v^2 dv = a$. Quodsi $dv$ sumatur pro differentiali abscissæ & $v$ pro abscissa erit $\frac{2v^2}{a} = z$, adeoque $v^2 = \frac{1}{2}az$. Unde liquet segmentum parabolicum quadrandum reduci ad parabolam externam, cujus parameter est $\frac{1}{2}a$, seu dimidio parametri parabolæ æqualis, cujus segmentum quadrandum. Similiter

liter patet aream curvæ *Cartesii* (§. 111. *Anal. infin.*) esse differentiam arearum Parabolæ externæ *Apollonianæ*, ad quam $x^2 = bz$, & Parabolæ externæ secundi generis, ad quam $x^3 = b^2 v$. Non absimili modo patet, in elemento hyperbolæ intra asymptotos $dx - xdx + x^2dx - x^3dx + x^4dx$ &c. in termino primo semiordinatam esse = 1, in secundo = $x$, in tertio si $1 = a$ esse $x^2 = ay$, in quarto $x^3 = a^2y$, in quinto $x^4 = a^2y$ &c. consequenter terminum primum esse elementum parallelogrammi rectanguli, secundum elementum trianguli æquicruri, tertium parabolæ externæ Apollonianæ seu primi generis, quartum elementum parabolæ externæ secundi generis, quintum elementum pabolæ externæ tertii generis & ita porro in infinitum. Quadratura igitur hyperbolæ reducitur ad quadraturam parallegrammi rectanguli, trianguli æquicruri & infinitarum parabolarum. Inde est quod hyperbola & circuli quadraturam per infinitas parabolas demonstraverit *Guido Grandus*. Equidem data hyperbolæ area intra asymptotos datur etiam area interna inter axem & curvam interjacens; placuit tamen (§. 123. *Anal. infin.*) etiam ostendere, quomodo area interna quadretur. Enimvero patet quadraturam areæ intra asymptotos esse simpliciorem quadratura internæ, in qua $\sqrt{ax}$ ducenda est in seriem infinitam.

§. 238. Exemplo circuli docuimus (§. 124. *Anal. infin.*) quadraturam non uno modo absolvi posse. Quadravimus enim circulum ex dato sinu verso, ex dato sinu complementi & ex tangente. Notanda hic sunt artificia, quibus progressus terminorum in infinitum redditur conspicuus: id quod inprimis ostendimus in quadratura *Newtoniana*. Artificia etsi eadem sint, quibus jam in Analysi infinitorum usi sumus, scilicet ut in numeris conservetur universalitas calculi & ut terminus sequens efficiatur dependens ab antecedente; applicatio tamen eorundem non statim cuivis succurrit. Unde meminini quosdam seriem *Leibnitianam* aut, si mavis, *Gregorianam* pro circulo prætulisse *Newtonianæ*, quæ tamen citius convergit, seu celerius

rius appropinquat, quod illa constantem servet legem, in hac vero termini nulla certa lege progrediantur, etsi *Newtoniana* non modo manifestam legem admittat, qua termini in infinitum progrediuntur, verum etiam hoc habet, ut terminus quilibet sequens ex proxime antecedente inveniri possit. Id potius attentionem tyronum meretur, quod quadratura *Newtoniana* exhibeat quadraturam segmentorum circuli, *Leibnitiana* vero quadraturam sectorum, atque adeo hæc insinuet ideam quadrandi sectores curvarum, quæ centrum habent, animo jam obversata *Archimedi*, dum circuli aream ad aream trianguli reduxit, quemadmodum clarissime docuit *Keplerus* in Stereometria dolii Austriaci. Notandum porro est, quod docuit *Leibnitius* in Actis Eruditorum A. 1682, p. 45. cum termini $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{17}$, &c. itemque termini $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{19}$, &c. progrediantur inprogressione harmonica; aream circuli esse differentiam duarum serierum proprogressionis harmonicæ. Præterea si binos quosque terminos ad eandem denominationem reducas, quia $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$, $\frac{1}{9}-\frac{1}{11}=\frac{2}{99}$, $\frac{1}{13}-\frac{1}{15}=\frac{2}{195}$, $\frac{1}{17}-\frac{1}{19}=\frac{2}{323}$ &c. area circuli, quadrato diametri existente 1, erit $\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}+\frac{2}{195}+\frac{2}{323}$ &c. in infinitum. Jam si diameter circuli = 1, erit semidiameter = $\frac{1}{2}$, adeoque quadratum inscriptum = $\frac{1}{2}$ (§. 21. *Trigon.*). Quoniam itaque quadratum circumscriptum est inscripti duplum, si quadratum inscriptum fuerit $\frac{1}{4}$, erit circumscriptum $\frac{1}{2}$, adeoque area circuli $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{39}+\frac{1}{195}+\frac{1}{323}$ &c. in infinitum (§. 181. *Arithm.*). Statim patet 3, 35, 99 esse numeros quadratos unitate mulctatos, nempe 4 − 1, 36 − 1, 100 − 1, & inter quadratum 4 & 36 interjacere tres numeros quadratos 9, 16, 25, similiterque inter 36 & 100 interjacere tres 49, 64, 81. Quodsi seriem pro circulo continues & cum numeris in Tabula quadratorum numerorum compares; videbis eam constante hac lege progredi, ut denominator fractionis sit quartus quisque numerus excerptus ex serie numerorum quadratorum unitate mulctatorum numeratore semper existente unitate. Quando vero quadratum inscriptum $\frac{1}{4}$, radius est

$\sqrt{.}\frac{1}{8}$

$\sqrt{\frac{1}{8}}$ (§. 21. *Trigon.*), adeoque diameter $= 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Hæc ideo monemus, ut diſcant tyrones dari etiam artificia particularia legem progreſſionis terminorum in infinitum detegendi præter generalia, de quibus diximus ante: quamvis iſtiusmodi quoque artificiis jam uſi fuerimus in inveniendo generali theoremate pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo (§. 95. *Anal. infin.*). Neque enim inutile eſt eadem atrificia variis exemplis illuſtrari.

§. 239. Quemadmodum vero quadraturæ curvarum per ſeries infinitas reducuntur ad Quadraturam infinitarum parabolarum; ita quoque curvarum aliarum quadratura ad quadraturam circuli atque hyperbolæ reduci ſolent: id quod non uno modo fieri ſolet. Exemplum habemus in Ellipſi (§. 126. *Anal. infin.*), ubi ratio areæ ellipticæ ad aream circuli ſua veluti ſponte ſeſe offert. Exempla alia præbent Cyclois, Ciſſois, Spiralis *Archimedea*. Non ſine ratione addidimus hanc reductionem, cum eadem utamur in altioribus, prouti ſuo loco conſtabit in Mechanicis, ubi problemata phyſico-mechanica ſolvuntur. Probe autem notandæ ſunt hæ reductiones iis, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, ut vim principii reductionis per omnem artem inveniendi utiliſſimi rectius percipiant. Ceterum eodem inſtituto (§. 147. *Anal. infin.*) rectificationem parabolæ reducimus ad quadraturam parabolæ: id quod ideo attentionem meretur, ut diſcamus ſubinde ſummationem ejusdem elementi dependere & a quadratura curvæ, & a rectificatione arcus cujusdam. Habet enim hoc uſum non contemnendum in methodo tangentium inverſa, ubi æquationes differentiales conſtruere jubemur ſuppoſita curvæ cujusdam quadratura, vel rectificatione arcus. Exempla occurrunt in Mechanicis, ubi problemata phyſico-mechanica ſolvimus. Quodſi enim tempeſtive animum advertamus ad talia, quæ in progreſſu uſum præclarum habent; quæ alias difficilia videntur, facilia evadunt, nec perturbatur animus, quando applicantur ea, quorum idea nobis jam familiaris evaſit, præſertim cum haud

haud raro insolita nondumque perspecta videantur, quæ ex anterioribus nota esse poterant, si attentione sufficiente in iisdem usi fuissemus.

§. 240. Rectificatio curvarum, perinde ac inventio sectorum ellipticorum & hyperbolicorum, interdum requirit calculos admodum prolixos. Ne igitur prolixitate tyrones redderentur perplexi & a solutione problematis deterrerentur, calculos integros admodum distincte explicatos exhibuimus. Consulent autem sibi tyrones, si initio generalem quandam ideam solutionis animo concipiant, veluti quod in rectificatione arcus elliptici (§. 172. *Anal. infin.*) primum quæratur valor ex æquatione ad curvam, deinde tam ex Numeratore, quam Denominatore in valore isto emergente extrahatur radix per theorema *Newtonianum* & tandem series pro numeratore emergens dividatur per seriem, quæ emergit pro Denominatore. Hoc pacto enim in usum solutionis problematis problema unum resolvitur quasi in plura, quorum unumquodque sigillatim solvi potest. Circa divisionem attentionem meretur artificium, quo calculus a perplexitate liberatur, ut distincte singula ipsis oculis exhibeantur: quod non modo facit ad facilius evitandum errorem, qui in calculum perplexum facile irrepit defectu attentionis, verum etiam omnem molestiam aufert, qua attentio turbatur. Distincta perceptio intellectus est: unde qui intellectus perficiendi gratia Mathesi operam navant, non modo nostro more singula distincte sibi repræsentare, verum etiam ad diversa artificia, quibus eo fine hinc inde utimur, animum sollicite advertere tenentur. Ceterum ne quis aliorum libros evolvens, in quibus eorundem Problematum solutio occurrit, existimet, paucis ibidem explicari, quæ a nobis tanta prolixitate expediuntur; monendum esse duco, autores plerosque scribere peritis, non tyronibus, quorum utilitati nos velificamur, adeoque multa omittere, quæ a lectore supplenda sunt, siquidem veritatem assequi voluerit. Unde non modo tyrones, verum etiam haud raro exercitatiores multum temporis fallunt, antequam

quam multo labore ab altero dicta aſſequantur. Nobis vero, qui tempus rerum omnium pretioſiſſimum exiſtimamus, propoſitum eſt, ut ſine omni temporis diſpendio ſciendi cupidos ad ſcientiam perducamus, cumque aliorum felicitati omni modo ſtudere nos jubeat philoſophia noſtra, id quoque agendum eſſe arbitramur, ut in diſcendo omnem a diſcentibus moleſtiam arceamus.

§. 241. Inprimis autem in doctrina de rectificatione curvarum attentionem meretur methodus, qua ex quantitate per ſeriem data invenitur ſeries pro quantitate variabili, ex quibus formantur ſeriei prioris termini, veluti dum ex arcu dato ſinus quæritur. Etenim arcus datur per ſeriem infinitam, cujus termini formantur ex ſinu, & ſinus quæritur in ſerie, cujus termini formantur ex arcu. Nititur ea methodo extrahendi radicem ex ſerie infinita, quam eum in finem explicavimus in Analyſi finitorum. Inventa eſt a *Newtono*, quemadmodum conſtat ex literis ad *Leibnitium* datis, quæ leguntur apud *Walliſium* volumine tertio Operum, diciturque Regreſſus ſerierum. Subinde tamen artis eſt applicare methodum extrahendi radicem ex æquatione infinita in regreſſu ſerierum. Exempli loco eſt problema 56. (§. 163. *Anal. infin.*), quo ex dato arcu invenitur ſinus verſus. Solutio igitur problematis iſtius attentionem meretur, ut artificium, quo hic utimur, in aliis caſibus ſimilibus adhiberi poſſit. Neque enim ſufficit, ut intelligantur, quæ docentur, ſi quis ad tertium cognitionis gradum adſpirat; ſed artificia quoque analytica addiſcenda in uſum futurum, cum regulas doceamus per exempla. Ad hactenus dicta qui animum attendit, in ceteris ſeſe ſatis attentum atque acutum præbebit, ut plura moneri non ſit opus. Immo ſi quis ea attentione in diſcenda Matheſi uti voluerit, quam tantopere inculcamus, acumen ſingulare acquiret, quo facile, nullo quaſi negotio, diſcernet artificia in ſolutionibns problematum adhibita eorundemque a ſe invicem dependentiam animadvertet: id quod utile erit iis, qui ſtudio Matheſeos ac in ſpecie Algebræ in arte inve-

inveniendi generali proficere student ad recte philosophandum necessaria.

§. 242. Circuli rectificatio etiam deduci potest ex quadratura circuli. Quoniam enim area circuli prodit ducta peripheria in quartam diametri partem (§. 429 *Geom.*), peripheria prodit, si seriem, quæ exprimit aream circuli, dividas per $\frac{1}{4}$. Inde est, quod, si diameter fuerit 1, pro quadrante eadem prodeat series $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. (§. 158. *Anal. infin.*), quam pro circuli area repereramus, quadrato diametri existente 1. Etenim si seriem per $\frac{1}{4}$ dividere volueris, Numeratores terminorum ducendi sunt in 4. (§. 243. *Arithm.*). Notandum adhuc est ex formulis indefinitis erui posse adhuc alias formulas pro circulo integro vel ejus peripheria integra, si valor ipsius $x$ non explicetur per diametrum 1, sed per sinum, sinum versum, cosinum vel tangentem alicujus arcus: quo in casu sæpius prodit series magis convergens, cum priori modo inventa minus convergeret & contra. E. gr. Si tangens fuerit $x$, pro arcu prodit $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. Ponamus arcum $x$ esse 30. Si fuerit radius CA = CB = 1, erit sinus BI = $\frac{1}{2}$ (§. 15. *Trigon.*), consequenter ob $IC^2 = BC^2 - BI^2$ (§. 417. *Geom.*) $IC^2 = \frac{3}{4}$. Quamobrem cum sit Tab. III. Fig. 39.

IC : IB = CA : AD (§. 26. *Trigon.*)
& $IC^2 : IB^2 = CA^2 : AD^2$ (§. 124. *Anal.*)
erit $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 1 :$
sive $3 : 1 = 1 :$ (§. *cit.*)
Unde reperitur AD = $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Quod si hunc valorem pro $x$ substituas, cum sit

$$x^2 = \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{9}$$
$$x^4 = \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{5}x^4 = \frac{1}{45}$$
$$x^6 = \frac{1}{27} \qquad \frac{1}{7}x^6 = \frac{1}{189}$$
$$x^8 = \frac{1}{81} \qquad \frac{1}{9}x^8 = \frac{1}{729}$$
$$x^{10} = \frac{1}{243} \qquad \frac{1}{11}x^{10} = \frac{1}{2673};$$

series $x\,(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \frac{1}{9}x^8 - \frac{1}{11}x^{10}$ &c.) degenerat in sequentem

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{45} - \tfrac{1}{189} + \tfrac{1}{729} - \tfrac{1}{2673}\ \&c.\right)$$

quæ exprimit arcum 30 graduum. Si vero diameter fuerit 1, eadem exprimit arcum 60 graduum. Quamobrem si seriem hanc ducas in 6, hoc est, si $\sqrt{\frac{1}{3}}$ multiplices per 6, cum sit $6\sqrt{3} = \sqrt{\frac{36}{3}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; pro area circuli habebis

$2\sqrt{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}-\frac{1}{2673}\ \&c.\right)$

Quodsi porro binos quosque terminos reducere volueris ad eandem denominationem, erit

$$-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}=-\frac{45+9}{405}=-\frac{36}{405}=-\frac{12}{135}$$

$$-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}=\frac{-729+189}{189\cdot 729}=\frac{-81+21}{21\cdot 729}=-\frac{60}{21\cdot 729}=-\frac{20}{7\cdot 729}=-\frac{20}{5103}$$

Si adhuc addas terminum seriei sequentem $+\frac{1}{9477}$; eodem modo reperies

$$-\frac{1}{2673}+\frac{1}{9477}=-\frac{28}{104247}.$$

Unde series pro circulo resultat

$$2\sqrt{3}\left(1-\frac{12}{135}-\frac{20}{5103}-\frac{28}{104247}\ \&c.\right)$$

Quodsi eandem seriem dividas per 4, & factorem $2\sqrt{3}$ per 4 multiplices; habebis pro circulo

$$8\sqrt{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{135}-\frac{5}{5103}-\frac{7}{104247}\ \&c.\right.$$

seu $\sqrt{192}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{135}-\frac{5}{5103}-\frac{7}{104247}\ \&c.\right)$

Est vero $135 = 15\cdot 9$

$$5103 = 63\cdot 81 = 63\cdot 9^2$$

$$104247 = 143\cdot 729 = 143\cdot 9^3$$

Quamobrem series pro circulo

$$\sqrt{192}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{15\cdot 9}-\frac{5}{63\cdot 9^2}-\frac{7}{143\cdot 9^3}\ \&c.\right)$$

Unde patet lex progressionis in infinitum. Etenim numeratores progediuntur secundum Numeros impares, denominatores componuntur ex binis factoribus, quorum unus sumitur ex progressione geometrica, cujus terminus primus 9, & exponens rationis eidem æqualis; alter vero per saltum excerpitur ex serie numerorum quadratorum unitate mulctatorum, quorum radices sunt 4. 8. 12. &c. hoc est, progrediuntur in progressione arithmetica, cujus terminus primus est 4 & differentia terminorum eidem æqualis.

Nisi formulam abbreviare voluissemus reductione binorum terminorum diversis signis præditorum ad eandem denominationem; lex progressionis in infinitum manifestari quoque poterat in formula

$$2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}-\frac{1}{2673}\ \&c.\right)$$

 resol-

reſolvendo denominatores in ſuos factores. Cum enim ſit

$$45 = 5 \cdot 9$$
$$189 = 7 \cdot 27$$
$$729 = 9 \cdot 81$$
$$2673 = 11 \cdot 24$$

erit pro circulo ſeries, ſi diameter = 1

$$\sqrt{12}\left(\frac{1}{1.1} - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.9} - \frac{1}{7.27} + \frac{1}{9.81} - \frac{1}{11.243}\ \&c.\right)$$

Una hic ſeries factorum progreditur ſecundum numeros impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. altera vero in progreſſione geometrica, cujus exponens rationis 3, nimirum 1. 3. 9. 27. 81. 143.

§. 243. Patet hinc non temere eſſe judicandum, utrum ſeries aliqua citius appropinquet altera, nec ne, & num conſtanſtante quadam lege progrediatur. Neque enim eadem formula indefinita in omni caſu particulari æque appropinquat, & lex progreſſionis ſæpius latet, atque in caſu particulari non eadem eſt, quæ in univerſali. Liquet etiam ad detegendam legem progreſſionis facere Arithmeticam ſeu numerorum ſcientiam, quæ ſubinde etiam compendia ſummationis quotlibet terminorum ſeriei ſubminiſtrat, ut adeo inutile exiſtimari minime debeat ſtudium, quod in ſpeciebus numerorum certa lege progredientibus & in iis ſummandis collocatur, ſit ita quod hodie Geometria magis excolatur Arithmetica, immo Geometriæ ad Mechanicam applicatæ magis habeatur ratio, quam puræ. Apparet etiam uſui formularum minime obſtare, quod irrationalitati obnoxiæ ſint, & in caſu particulari formulam ab irrationalitate liberam eidem implicari poſſe citra ullum incommodum, immo uſum ejus per hoc fieri poſſe expeditiorem. Hæc probe notanda ſunt, ne judicium de formulis diverſis præcipitemus, quando de unius præ altera prærogativa agitur. Etſi itaque jam in ſuperioribus (§.238.) de transmutatione ſeriei *Leibnitianæ* ſeu *Gregorianæ* pro circulo in alias quædam monuerimus; non tamen piguit plura in eam rem dicere (§.241.), tum ut intelligatur, ex eadem formula per transmutationem communi Arithmetica nixam varias deduci poſſe alias,

tum

tum ut conſtet, hoc non inutiliter fieri, ubi eædem ad praxin ſunt transferendæ, tum ut excitaremus attentionem eorum & juvaremus eorundem acumen, qui de ſeriebus infinitis ad uſum aptandis forſan commentari decreverint. Neque enim inutilem operam ſumeret, ſi quis hoc argumentum pro dignitate tractaret, ne inanes viderentur ſpeculationes, quæ certum ſui pollicentur uſum. Nec eſt quod excipias talia peritis nullum facere negotium. Nam quibus ſeſe commendat uſus, ii non ſemper, immo rariſſime adeo periti ſunt, ut talia per ſe aſſequantur.

§. 244. Ut hæc rectius intelligantur, lubet exemplo quodam docere, quomodo per ſeries infinitas inveniantur approximationes in numeris quantalibet exactitudine, prouti plures vel pauciores terminos ſummare libuerit. Reſolvuntur autem termini ſinguli in fractiones decimales per diviſionem, quemadmodum fecimus in extractione radicum ex æquationibus per approximationem (§. 363. *Anal. finit.*). Ne autem in numero cyphrarum quoto præfigendis aberres; tenendum eſt, tot præfigendas eſſe cyphras, quot numeratori cyphræ adjiciendæ, ut prima diviſio ſuccedat. E. gr. ſi fractio fuerit $\frac{1}{8}$, diviſio non ſuccedit niſi unitati adjecta cyphra. Quoto igitur præfigitur cyphra una, ut conſtet deficere integra, ſeu locum integrorum eſſe vacuum, & fractionem incipere a partibus decimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{40}$, diviſio inchoari nequit, niſi numeratori 1 adjectis duabus cyphris. Unde liquet quoto præfigendas eſſe duas cyphras: id quod indicio eſt, fractionem decimalem incipere a partibus centeſimis. Si fractio fuerit $\frac{1}{112}$, diviſio non poteſt inchoari, niſi tribus cyphris numeratori 1 adjectis. Quoto igitur præfiguntur tres cyphræ, & fractio decimalis incipit a milleſimis. Similiter ſi fractio fuerit $\frac{1}{1152}$; quoto denuo adjiciendæ ſunt cyphræ tres & fractio incipit itidem a milleſimis. In caſu tamen particulari dantur compendia ſingulos terminos per diviſionem in fractiones decimales reſolvendi, quando ſcilicet alii ex aliis jam inventis inveniri poſſunt. Quamobrem ſumamus ſeriem pro circulo

$\sqrt{192}\,(\frac{1}{4} - \frac{3}{15.9} - \frac{5}{63.9^2} - \frac{7}{143.9^3}$ &c.) quam ex *Leibnitiana* deduximus (§. 242.). Patet ex 192 extrahendam esse radicem in fractionibus decimalibus (§. 274. *Arithm.*), continuata operatione ad tot loca, quot visum fuerit. Quodsi hanc dividas per 4 habebis $\frac{1}{4}\sqrt{192}$, consequenter numerum, a quo summa terminorum signo negativo affectorum subtrahenda venit. Dividatnr jam eadem radix per 9, $9^2$ sive 81, $9^3$ sive 729. &c. ut habeatur $\frac{1}{9}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^2}\sqrt{192}$, $\frac{1}{9^3}\sqrt{192}$, &c. aut, quod perinde est, quotus anterior semper per 9 pro obtinendo proxime sequente. Porro numerus $= \frac{1}{9}\sqrt{192}$ multiplicetur per 3 & factum dividatur per 15, ita prodibit numerus respondens $\frac{3}{15.9}\sqrt{192}$. Similiter numerus $= \frac{1}{9^2}\sqrt{192}$ multiplicetur per 5 & factum dividatur per 63, ur prodeat numerus $= \frac{5}{63.9^2}\sqrt{192}$, atque ita porro. Quodsi enim terminos hosce in unam summam collectos subtrahas a numero $= \frac{1}{4}\sqrt{192}$, relinquetur numerus peripheriæ circuli respondens, posita diametro 1. Cum sit $\sqrt{192} = 13.\ 856406460551018348219$; erit $\frac{1}{4}\sqrt{192} = 3.\ 4641016151377545870\,55$ & porro, $\sqrt{192}$ per R designata & $\frac{1}{9}$ R per A, $\frac{1}{9^2}$ R per B, $\frac{1}{9^3}$ R per C, $\frac{1}{9^4}$ R per D & ita porro, sive $\frac{1}{9}\,R = A$, $\frac{1}{9}\,A = B$, $\frac{1}{9}\,B = C$, $\frac{1}{9}\,C = D$ & ita porro,

| | | |
|---:|---|---|
| 1. 5 3 9 6 0 0 7 1 7 8 3 9 0 0 2 0 3 8 6 9 1 | = | A |
| 1 7 1 0 6 6 7 4 6 4 2 6 5 5 5 7 8 2 0 7 6 | = | B |
| 1 9 0 0 7 4 1 6 2 6 9 6 1 7 3 0 9 1 1 9 | = | C |
| 2 1 1 1 9 3 5 1 4 1 0 6 8 5 8 9 9 0 2 | = | D |
| 2 3 4 6 5 9 4 6 0 1 1 8 7 3 2 2 1 1 | = | E |
| 2 6 0 7 3 2 7 3 3 4 6 5 2 5 8 0 1 | = | F |
| 2 8 9 7 0 3 0 3 7 1 8 3 6 2 0 0 | = | G |
| 3 2 1 8 9 2 2 6 3 5 3 7 3 5 5 | = | H |
| 3 5 7 6 5 8 0 7 0 5 9 7 0 6 | = | I |
| 3 9 7 3 9 7 8 5 6 2 1 8 9 | = | K |
| 4 4 1 5 5 3 1 7 3 5 7 6 | = | L |
| 4 9 0 6 1 4 6 3 7 3 0 | = | M |
| 5 4 5 1 2 7 3 7 4 8 | = | N |
| 6 0 5 6 9 7 0 8 3 | = | O |
| 6 7 2 9 9 6 7 6 | = | P |
| 7 4 7 7 7 4 1 | = | Q |
| 8 3 0 8 6 0 | = | R |
| 9 2 3 1 8 | = | S |
| 1 0 2 5 7 | = | T |
| 1 1 3 9 | = | V |
| 1 2 6 | = | X |
| 1 4 | = | Y |

Quodsi jam sit $a = \frac{3}{15}$, $b = \frac{5}{63}$, $c = \frac{7}{143}$, $d = \frac{9}{255}$, $e = \frac{11}{399}$ &c. continuata serie juxta legem progressionis, ut porro inveniantur valores $f$, $g$, $h$, &c. sitque $A.a = \frac{3}{15.9}\sqrt{192}$, $B.b = \frac{5}{63.9^2}\sqrt{192}$, $C.c = \frac{7}{143.9^3}\sqrt{192}$ &c. prodibit

| | |
|---:|:---|
| 3 0 7 9 2 0 1 4 3 5 6 8 7 0 0 4 0 7 7 3 8 | = A. *a* |
| 1 3 5 7 6 7 2 5 9 0 6 8 6 9 5 0 6 5 1 4 | = B. *b* |
| 9 3 0 4 3 2 9 6 4 2 4 7 0 0 1 1 4 5 | = C. *c* |
| 7 4 5 3 8 8 8 7 3 3 1 8 3 2 5 8 4 | = D. *d* |
| 6 4 6 9 3 0 8 4 2 4 3 2 5 9 5 0 | = E. *e* |
| 5 8 9 4 8 2 7 0 1 7 4 7 5 3 9 | = F. *f* |
| 5 5 4 9 8 6 6 6 1 2 7 1 3 0 | = G. *g* |
| 5 3 4 9 1 3 8 2 9 9 2 5 2 | = H. *h* |
| 5 2 4 7 4 9 2 9 2 7 6 8 | = I. *i* |
| 5 2 1 9 1 0 8 8 0 5 8 | = K. *k* |
| 5 2 4 8 4 3 5 6 5 4 | = L. *l* |
| 5 3 2 5 8 2 1 0 7 | = M *m* |
| 5 4 4 5 2 2 3 5 | = N. *n* |
| 5 6 0 2 9 3 9 | = O. *o* |
| 5 7 9 6 8 5 | = P. *p* |
| 6 0 2 6 0 | = Q. *q* |
| 6 2 9 0 | = R. *r* |
| 6 5 9 | = S. *s* |
| 6 9 | = T. *t* |
| 7 | = V. *v* |
| 9 | = X. *x* |
| | + Y. *y* |
| 3 2 2 5 0 8 9 6 1 5 4 7 9 6 1 3 4 8 5 9 2 | Summa, |
| = 3· 4 6 4 1 0 1 6 1 5 1 3 7 7 5 4 5 8 7 0 5 5 | |
| 3· 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 3 | Periph. Circ. |

Series hæc cum numeris *Ludolphi* prorſus conſentit: notæ enim ultimæ non habetur ratio, quia accurata non eſt, ſaltem dubia, propterea quod ignoratur, qualis ſit proditurus, ſi calculus produceretur. Equidem calculus hic videtur admodum prolixus; quod ſi tamen quis eundem conferre voluerit cum calculo *Ludolphi* in Libro de circulo & adſcriptis, facile intelligit, quanto *Ludolphinus* ſit operoſior & moſtior. Immo ſi quis ſeriem *Leibnitianam* in fractiones decimales reſolvere vellet, multo prolixiore calculo

calculo haberet opus, antequam peripheriam circuli ad tot loca produceret.

§. 245. Quamvis autem ex allato exemplo abunde perspiciatur, quomodo seriebus infinitis sit utendum; non inconsultum tamen existimamus alterum adhuc addere exemplum. Si sinus arcus sit $y$, sinus totus seu radius circuli 1; erit arcus $= y + \frac{1.1}{2.3} Ay^2 + \frac{3.3}{4.5} By^2 + \frac{5.5}{6.7} Cy^2 + \frac{7.7}{8.9} Dy^2 + \frac{9.9}{10.11} Ey^2$ &c. in infinitum. Sit $y$ sinus arcus 30°; erit is $= \frac{1}{2}$; adeoque series degenerat in sequentem $\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3.4} A + \frac{3.3}{4.5.4} B + \frac{5.5}{6.7.4} C + \frac{7.7}{8.9.4} D + \frac{9.9}{10.11.4} E$ &c. in infinitum, consequenter si diameter fuerit 1, eadem series exprimit arcum 60°. Quodsi ergo terminum primum ducas in 6, & qui hinc prodit 3 in $\frac{1.1}{2.3.4}$ coëfficientem secundi ut habeas $\frac{1}{8}$, obtinebitur series pro circulo $3 + \frac{1}{8} + \frac{3.3}{4.5.4} B + \frac{5.5.}{6.7.4} C + \frac{7.7}{8.9.4} D + \frac{9.9}{10.11.4} E$ &c. Neque enim hic opus est, ut termini singuli multiplicentur per 6, quia sequentem semper ingreditur proxime præcedens, adeoque primus, qui est sextuplus primi in anteriore serie, terminos omnes seqneutes. Non igitur alia re opus est, quam ut $\frac{1}{8}$ resolvas in fractionem decimalem 1250000000000000000, ut habeas terminum secundum, hunc porro ducas in $\frac{3.3}{4.5.4}$ sive $\frac{9}{80}$, hoc est, multiplices per 9 & dividas per 80, ut obtineas tertium 140625000000000000, tertium vero ducas in $\frac{5.5}{6.7.4}$, seu multiplices per 25, & dividas per 168, ut, prodeat quartus 209263 3928571428 & ita porro. Quodsi enim terminos omnes addas,

addas, aggregatum erit peripheria circuli cum numeris *Ludolphinis* conſentiens. Sane ſi quatuor ſaltem terminos addis poſita diametro 10000, prout hic factum eſſe vides,

| | | |
|---|---|---|
| 3. 0000 | = | A |
| 1250 | = | B |
| 140 | = | C |
| 20 | = | D |

Summa 3. 1410

habebimus pro peripheria 3141, cum nota ultima non ſit accurata. Reperitur adeo ratio diametri ad peripheriam ut 1000 ad 3141 cum *Ludolphinis* numeris conſentiens. Niſi adeo fractiones decimales ad multa loca extendere volueris, ſed in paucis numeris acquieſcas, quemadmodum fecere *Archimedes*, *Ptolomæus*, alii; exiguo tantum calculo opus eſt. Similiter brevi calculo iidem numeri inveniri poterant ex ſerie præcedente. Cum enim ſit $\frac{1}{4}\sqrt{1192}$ = 3. 46410 &

| | | |
|---|---|---|
| 1. 53960 | = | $\frac{1}{9}$ R = A |
| 17106 | = | $\frac{1}{9}$ A = B |
| 1900 | = | $\frac{1}{9}$ B = C |
| 211 | = | $\frac{1}{9}$ C = D |

reperietur ut ante (§. 244)

| | | |
|---|---|---|
| 30792 | = | A *a* |
| 1357 | = | B. *b* |
| 93 | = | C. *c* |
| 7 | = | D. *d* |

32249 Summa

346410 = $\frac{1}{4}\sqrt{192}$

314161 Peripheria circuli, in qua quatuor numeri 3141 ut ante cum *Ludolphinis* conſentiunt.

§. 246. Quod ſi reſolutio ſerierum infinitarum hic data probe perpendatur, nullus dubito fore ut in ſeriebus ad uſum aptandis nihil poſthac ſuperſit difficultatis. Inprimis autem hinc perſpicitur, quantum interſit, ut lex progreſſionis in infinitum ſit manifeſta, ne multo labore demum inveſtigandi ſint termini, quibus habemus opus, & ut termini ſequentes inveniantur ex antecedentibus, ſive id fiat per dependentiam eorundem a ſe invicem in formula generali, quemadmodum in exemplo altero (§. 245.), ſive id ſingulari quadam ratione contingat in caſu particulari, quemadmodum in exemplo primo (§. 244.). Intelligimus etiam quanta in tractandis altioribus attentione opus

opus sit ad maxime vulgaria, ne ea eidem sese subducant & per ambages incedamus, ubi brevior ducit ad scopum via. E. gr. notissimum est ex communi Algorithmo fractorum, si $\frac{1}{9}$ dividas per 9, quotum esse $\frac{1}{9^2}$; si $\frac{1}{9^2}$ porro dividas per 9, quotum esse $\frac{1}{9^3}$ & sic porro in infinitium. Enimvero si in exemplo primo huc animum minime advertas, & $\sqrt{192}$ sive 13. 8564064605 5101834821 9 dividere velis per 9, per $9^2$ sive 81, per $9^3$ sive 279 & ita porro, operoso calculo invenies numeros A, B, C, D &c. qui continua divisione antecedentis per 9 multo facilius eruuntur. Immo si quis una divisione terminum quemcunque resolvere vellet, v. gr. secundum $\frac{3}{15.9}\sqrt{192}$ sive $\frac{3}{135}\sqrt{192}$, multiplicando scilicet 13. 85640 &c. per 3, & factum dividendo per 135, in ambages multo longiores incideret, adhuc longiores futuras, si terminus quilibet reduceretur ad pure irrationalem & ex eo extraheretur radix, veluti si fieret $\frac{3}{135}\sqrt{192} = \sqrt{\frac{1728}{18225}}$ atque inde extraheretur radix. Non existimandum est, talia inutiliter moneri: nisi enim ad ea animum reflectamus, ubi obvia sunt, attentioni nostræ sese subducent, ubi magis latent. Illustria dare poteramus exempla, nisi nostrum foret ab invidiosis abstinere, quæ nulla necessitas imperat. Ad vitandam itaque ἀβλεψίαν sedato opus est animo, ne appetitus influat in determinationem operationum intellectus, in qua nullæ ipsius sunt partes. Distinctæ notiones nullibi negligendæ sunt, ubi earum participes fieri possumus, præsertim si quis philosophari constituit, & ad vitæ perfectionem tanquam ad scopum tendit. Diximus insuper, quam difficile sit de prærogativa formulæ unius præ altera statuere, nisi utriusque resolutione observatis omnibus, quæ observari possunt, facta. Sane si formula posteriore utaris pro circulo, & terminos resolutos sibi invicem legitime subordines, & idem facias cum priori; videbitur posterior priori longe anteponenda. Enimvero

vero ſi totam operationem in caſu priori conferas cum tota in altero, præſertim ubi diviſionem per novenarium transmutes in ſubſtractionem (116. *Arithm.*); longe aliter ſenties. Nolo addere plura, ne videar in levioribus commendandis nimius, præſertim iis, qui, cum in calculis conſeneſcere decreverint, nec ſtudii Matheſeos utilitatem extra Matheſin quærant, illorum fructum proſpicere nequeant.

§. 247. In capite de cubatione ſolidorum & complanatione ſuperficierum tantummodo notandum eſt, quomodo elementa ſolidorum & ſuperficierum eorundem inveniantur, & quomodo per calculum ſummatorium eruta ſoliditate vel ſuperficie corporis rotundi inveſtigentur per calculum literalem theoremata praxi inſervientia. Inprimis hic attentionem meretur, quomodo ſolidum unum transformetur in aliud ipſi æquale. Ea cum facilia ſint, pauca tantummodo ſpeciminis loco exhibuimus, cum unusquisque per ſe plura addere poſſit.

§. 248. Methodus tangentium inverſa maximæ ubilitatis eſt in ſublimioribus, atque ideo maximam quoque meretur attentionem. Ejus ſaltem primas lineas duximus, ut naſcatur methodi hujus idea in animis tyronum, ne hæſitent in problematis, quæ in Mechanica traduntur. Duo autem hic præ ceteris notanda ſunt, primum quomodo conſtructio æquationum reducatur ad quadraturam curvarum ſimpliciorum & earundem rectificationem, ut appareat, quomodo ſolvantur problemata ſuppoſita quadratura curvæ vel rectificatione arcus; deinde quomodo ex æquatione differentiali ad Logarithmicam deducatur modus differentiandi quanitates, quas Logarithmi ingrediuntur (§.243. *Anal. infin.*), Hujus enim uſus inſignis eſt in inveniendis Logarithmis tam numerorum vulgarium, quam ſinuum atque tangentium, quemadmodum capite ſexto docetur. Eodem quoque artificio nititur calculus exponentialis, quem integra ſectione tertia expoſuimus, & conſtructio curvarum exponentialium ope Logarithmicæ atque quantitatum, quas Logarithmi ingrediuntur, cujus exempla dedimus capite altero

altero hujus sectionis. Hinc vero elucet insignis lineæ Logarithmicæ utilitas, quam nemo prævidere poterat, iis probe notanda, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant. Rationem jam dedimus in superioribus (§. 176).

§. 249. Artificia, quibus utimur in investigando modo differentiandi differentialia (§. 297. *Anal. infin.*), eadem sunt, quæ ante adhibuimus ad investigandas regulas differentiandi quantitates finitas, & quæ jam nobis innotuere in calculo literali, ubi algorithmum fractorum ex algorithmo integrorum & algorithmum irrationalium ex algorithmo rationalium deduximus, ut adeo hinc appareat, qnomodo quæ vulgaria videntur, haud raro prosint ad altiora, & quam utile sit ad artificia, quibus utimur in facilioribus, animum attendere, ne impervia nobis videantur magis ardua. Cum Methodus determinandi puncta flexus contrarii curvarum non minus utilis sit ad ductum curvarum repræsentandum, quarum præter æquationem nihil novimus, quam methodus de maximis & minimis, & methodus determinandi puncta, in quibus curva rectam positione datam secat, quam in superioribus illustravimus, illa vero a calculo differentio-differentiali pendeat, eandem quoque exemplis nonnullis illustrare lubuit. Etsi enim curva integra nondum construi possit, ope tamen punctorum, quæ per eas methodos determinantur, ductum ejus imaginari licet. Exempla occurrent in Mechanica.

§. 250. In doctrina de evolutione curvarum, quam capite tertio proponimus, notatu maxime dignum est, quod cyclois sua evolutione seipsam describat (§. 350. *Anal. infin.*), cum hoc faciat ad perfectionem motus penduli, quo horologia automata ad maximam perfectionem perducuntur, quemadmodum in Mechanicis demonstratur. Sane ea ipsa permovit *Hugenium*, ut de evolutione curvarum cogitaret, sicuti ex egregio Mathematici summi Tractatu de horologio oscillatorio intelligitur. Notandum præterea, quod inserviat rectificationi curvarum & ipsam curvedinem curvæ discer-

nat, ut arcus circuli osculatoris pro arcu curvæ alterius in praxi substitui possit (§. 331. *Anal. infin.*). Applicatio calculi differentialis in hoc argumento nihil habet, quod non sit ex anterioribus manifestum. Hoc tamen adhuc attentionem meretur, quod determinatio radii osculi seu evolutæ interdum faciat ad theoremata selecta eruenda, quemadmodum exemplo Logarithmicæ docemus (§. 332. *Anal. infin.*)

§. 251. Arithmetica infinitorum, invento calculo differentiali & summatorio, non amplius eum habet usum, quem habere poterat, si is nondum fuisset inventus. Eam tamen prætermittendam esse non duximus, ne quod sit inventum celebre inter recentiores Mathematicos nomen adeptum, quod a nobis non illustretur. Etsi autem pauca tantummodo de ea tradidisse videamur, plura tamen dedimus, quam in prolixo opere *Ismaëlis Bullialdi* continentur. Eam illustrare voluerat *Joannes Christophorus Sturmius* in Mathesi enucleata; sed cum esset artificiorum recentiorum, ignarus, quod sibi proposuerat non perfecit. Quæ de termino ultimo seriei continuatæ evanescente notanda sunt, satis perspicue exposuimus (§. 345. *Anal. infin.*), ut plura eam in rem annotari minime sit opus. Ratio, cur usum Arithmeticæ infinitorum extendi quasi in infinitum licuerit ultra terminos, intra quos a *Bullialdo* coërcetur, in summatione potentiarum & numerorum pyramidalium consistit, quam in Analysi finitorum universali quadam ratione absolvimus (§. 200. & seqq. & §. 216.). In Arithmetica enim infinitorum semiordinatæ curvarum spectantur tanquam in certa numerorum serie progredientium, veluti potentiarum dati cujusdam gradus in curvis parabolici generis (§. 349. 350 *Anal. infin.*). Unde analysi ad analysin veterum propius accedente quadraturæ curvarum quadrabilium deducuntur in Arithmetica infinitorum. Atque hoc artificium heuristicum notari meretur.

CAPUT

# CAPUT V.

## De Studio Mechanicæ.

§. 252.

Mechanica a veteribus inventa fuit in uſum machinarum: veteres enim laudabili exemplo in theoria ſemper reſpiciebant ad uſum in praxin, quippe cum in omni theoriæ genere intendenda ſit praxis, quemadmodum in Philoſophia ſedulo inculcamus. Primas ejus lineas duxit *Archimedes* in libris de æquiponderantibus, nec ultra eos terminos progreſſi ſunt Mathematici usque ad *Galilæum*. Quoniam machinæ omnes ex paucis quibusdam machinis ſimplicibus componuntur, quas potentias mechanicas appellare ſolent, nos machinas ſimplices diximus; in Mechanica non conſiderarunt niſi machinas ſimplices, vectem, axem in peritrochio, trochleam, cochleam, planum inclinatum & cuneum, quarum theoriam ampliſſimam, ſed nimis diffuſam dedit *Varignonius* in opere poſthumo. Conſiderarunt autem machinas haſce ſimplices in ſtatu æquilibrii, in quo nonniſi adeſt conatus ad motum, quam vim mortuam vocat *Leibnitius*, propterea quod ſublato æquilibrio, dum potentia motrix augetur, naſcitur motus diverſæ celeritatis pro diverſo illius incremento ſeu exceſſu potentiæ motricis ſupra pondus movendum. Inde eſt quod in agitandis machinis non modo potentiæ motrices conferantur cum pondere movendo, verum etiam ipſæmet ad pondus ipſis æquale & reſiſtentiæ in motu machinarum ſuperandæ ad pondus æquivalens reducuntur, quatenus potentiæ cuilibet motrici quoad effectum ſubſtitui poteſt aliquod pondus vi gravitatis, qua ad deſcenſum urgetur, in machinam agens ſeu eandem animans, & reſiſtentiis ſuperandis ſubſtituere licet pondus eandem potentiam motricem requirens, ſi elevari debet. Atque hæc probe notanda ſunt tyronibus, ut & men-

mentem veterum plenius aſſequantur, & in applicatione theoriæ machinarum ſimplicium ad praxin, hoc eſt, ad machinas compoſitas explicandas nihil ſententiant difficultatis. Patet hinc, quod *Leibnitius* aſſeruit, veteres nonniſi vis mortuæ notionem habuiſſe. *Galilæus* in Dialogis de motu ulterius primum progreſſus & motum gravium deſcendentium & projectorum explicare cœpit non infeliciter: eum vero in finem præmiſit theoriam motus æquabilis. Attingit etiam nonnulla de motu pendulorum, ſed quaſi obiter. Accuratius vero & data opera in eundem inquiſivit *Hugenius* in Tractatu de Horologio oſcillatorio, & theoriam inprimis centri oſcillationis ſuperaddidit. Occaſione motus pendulorum idem incidit in vim centrifugam, quam in circulo ad examen revocavit adjectis in fine Tractatus de horologio oſcillatorio theorematis de vi centrifuga, quorum demonſtrationes demum publici juris factæ ſunt in poſthumis. Inde *Newtonus* vires centrales tam centripetas, quam centrifugas conſiderare cœpit etiam in curvis aliis, præſertim centripetis & ad explicandum motum Planetarum theoriam tranſtulit in Principiis Philoſophiæ naturalis mathematicis. *Carteſius* in Principiis Philoſophiæ leges motus ex percuſſione explicare aggrediebatur, ſed non ſatis feliciter, cum ad veritatem liquidam pertingere non potuerit. Poſtea vero *Walliſio*, *Chriſtophoro Wren* & *Hugenio* negotium felicius ceſſit, quorum ille leges motus corporum non elaſticorum, hi vero corporum elaſticorum bene explicarunt. Quoniam autem motus corporum diminuuntur propter reſiſtentiam medii, in quo moventur, in eandem quoque inquirere cœpit *Walliſius*, deinde vero hoc argumentum ulterius proſecutus eſt *Newtonus* in Principiis modo laudatis. Denique cum calculus diffirentialis eſſet inventus & a Geometris præclaris, quos inter eminent *Bernnoullii* fratres, ad ſolutionem problematum phyſico-mechanicorum transferretur; deſcenſus & aſcenſus corporum in lineis curvis expendi cœpit. Atque ſic tandem latiſſimus evaſit Mechanicæ campus, qui arctis nimium limitibus a veteribus inclu-

includebatur. Nos igitur Elementa Mechanicæ daturi, quæ satisfacerent, non minus inventorum antiquorum, quam recentiorum rationem habuimus. Hæc probe notanda sunt, ut idea quædam Mechanicæ animo concipiatur, definitio rectius intelligatur, nec quisquam miretur, ubi viderit, in Elementis nostris Mechanicæ longe alia pertractari, quam quæ vulgo in libellis hujus nominis reperiuntur.

§. 253. Qui solam praxin mechanicam curæ cordique habent, ii prætermissis ceteris omnibus ad caput decimum quintum statim digrediantur: in eo enim & sequentibus continentur, quæ ad machinarum intellectum faciunt. Quoniam nobis theoriam cum praxi semper conjungere proposuimus, potentiarum quoque motricium ad machinas applicationem & machinarum usitatiorum constructionem explicare voluimus: quæ duo vulgo in libellis mechanicis negliguntur. A potentiarum motricium ad machinas applicatione pendet structura externa machinarum, quæ absque illa intelligi nequit, quemadmodum structura interna non intelligitur absque notitia machinarum simplicium. Libellatio vulgo in Geometria practica docetur: sed cum nos Geometriam practicam a theoretica non separaverimus, libellationis vero indispensabilis usus sit in construendis molendinis, quæ aquarum vi agitantur, eandem quoque hic explicare visum fuit, ubi de applicatione potentiarum ad machinas agitur. Quoniamtamen ad machinas applicantur, quæ de æquilibrio solidorum c.3, quod de centro gravitatis agit, demonstrantur in prima ejus parte, & quæ c.4. de quiete & lapsu corporum gravium docentur, expensis definitionibus machinarum simplicium addendæ sunt definitiones ac propositiones horum capitum eo modo, qui ad primum cognitionis gradum acquirendum sufficit. Ubi vero animo satis comprehenderis, quæ ad machinas tam simplices, quam compositas spectant, non inutile fuerit, si ceterorum quoque theorematum notitiam quandam tibi compares ex anterioribus, prætermissis tantummodo problematis, quæ analytice solvuntur per calculum, ne ignores principia,

quæ in praxi accuratiori uſui ſunt.

§. 254. Qui praxin mechanicam demonſtratam expetit, ad ſecundum cognitionis gradum adſpirans; eum addere debere demonſtrationes per ſe patet. Non tamen ideo neceſſe eſt, ut omnis theoriæ campum emetiatur; ſed ſufficiunt ea, quæ ad intellectum machinarum faciunt. Quænam vero ea ſint, facta demonſtrationum cap. 15. contentarum analyſis eo quidem modo, quam in Logica §. 922. ſatis diſtincte explicavimus, & exemplis illuſtravimus, docet. Quodſi quis praxin ante hauſerit, quam ad theoriam accedat, quemadmodum modo (§. 253.) inculcavimus; ei haud difficile fuerit ea, quæ ſibi uſui ſunt, diſcernere a ceteris, quæ inſuper habere poteſt. Nec nocet, ſi vel maxime quædam addiſcat, quorum in machinis uſum nullum perſpicit: neque enim ſolum fieri poteſt, ut in poſterum uſus quidam ſeſe offerat, qui prævideri haud quaquam poterat; verum etiam omnis theoriæ tractatio certiſſimam ſpondet in firmandis ratiociniis mechanicis utilitatem & menti accumen quoddam conciliat, ut perſpicacius videamus aliis in iis, quæ ad machinas ſpectant. Acumen vero mechanicum & prompta de machinis ratiocinatio non nullius cenſeri debet momenti.

§. 255. Qui denique ad tertium cognitionis gradum aditum ſibi parare geſtit, is nihil eorum prætermittere debet, quæ in Elementis noſtris Mechanicæ continentur, ſed omnia potius accurata induſtria perſequi tenetur, quemadmodum in ſuperioribus in genere præcepimus. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirat, intendit habitum ex iis, quæ cognovit, inveniendi alia ſibi adhuc incognita. Opus igitur habet principiis, quibus in ratiocinando utatur; opus habet artificiis heuriſticis, quæ data occaſione imitetur. Quæ a nobis demonſtrantur vel analytice eruuntur ſunt principia, per quæ aditus patet ad ulteriora. Reſolutiones analyticæ problematum, quas damus, continent artificia heuriſtica a lectore attento annotanda vi perſpicaciæ, quam inculcavimus, cum de ſtudio Algebræ ageremus. Atque ea ratio eſt, cur problemata phy-

physico-mechanica in casu particulari solverimus, in quo soluta a primis inventoribus, etsi subinde quoque docuerimus, quomodo problemata particularia ad universalitatem reducantur. Plus enim artis plerumque deprehenditur in solutionibus particularibus, quam in universalibus, multoque difficilius fuit primis inventoribus dare solutiones particulares, quam deinceps aliis, qui iisdem omnem universalitatem conciliare voluerunt. Quamobrem qui non ad pompam scripsimus, levitate quadam animi in ambitionem adducti, quæ cum condonanda sit homini in lineis & calculis ætatem omnem consumenti ob egregia in scientiam merita, in Philosopho tamen ferenda non est, qui non minus appetitum, quam intellectum seu facultatem cognoscitivam perficere tenetur; sed utilitatem discentis unice respicimus, ad quam tanquam ad metam contendimus, eundem quoque a via regia deducere non debuimus, quam calcarunt, qui ad inaccessa aditum pararunt, ut appareat, quomodo quæ impervia videntur, humano ingenio pervia reddantur. Id inprimis cognitu utilissimum, si non necessarium dicendum iis, qui artem inveniendi extra Mathesin exercere sibi propositum habent. Postquam enim abunde convicti sumus, quam necessarium sit studio Matheseos etiam sublimioris perficere intellectum, ut extra ejus pomœria inoffenso pede progrediaris; hanc quoque utilitatem vulgo non satis animadversam, etsi a multis commendatam, in conscribendis Elementis nostris intendimus, operamque dedimus, ne vana spe lactaremus lectoris animum.

§. 256. Enimvero non opus est, ut ad particularia descendamus: neque enim alia re opus de est, quam ut ea, quæ superius de studio Matheseos in genere & de studio præsertim Algebræ in specie præcipimus, ad lectionem Mechanicæ transferantur. Quamvis enim hinc inde nonnulla scitu non inutilia annotari poterant; tantam tamen prolixitatem non fert præsens institutum, & qui per superiora ad ea, quæ sunt methodi, sufficientem attentionem cum acumine ubivis afferre didicit, perspicil-

lis propriis uſus animadvertet, quæ eam ſubterfugere non debent, nec manuductione alterius indiget, qui firmo pede incedere valet. De duobus tamen artificiis, quibus utimur in Mechanicis, prorſus ſilere nefas eſt, propterea quod in Matheſi pura iisdem locus non eſt, in Philoſophia tamen naturali & in ipſa quoque morali maximam id utilitatem habet. Ut facilius intelligantur, quæ dicenda ſunt; ſumamus caſum particularem. Gravia moventur in rerum natura per medium reſiſtens, veluti per aërem aut aquam. Enimvero in Mechanicis conſideramus primo motum gravium in medio non reſiſtente, qualis nempe foret, ſi nihil adeſſet, quod motum ejus quomodocunque impediret, ſeu quatenus a ſola gravitate tanquam cauſa dependet. Ubi enim conſtat, qualis ſit per ſe, nec difficile eſt poſtea quoque definire, quid per reſiſtentiam medii detrahatur, ut intelligatur, qualis ſit in medio reſiſtente. Similiter in æquilibrio ſolidorum pondera primum conſideramus tanquam lineis gravitatis expertibus applicata, ut quale in ſe ſit pateat. Deinde vero idem applicamus ad pondera ex gravibus ſuſpenſa, veluti longurione aut haſta quadam ferrea. Eodem prorſus modo in Philoſophia morali appetitus ſenſitivus conſideratur in ſe, independenter a rationali, deinde vero etiam quatenus ab eodem dependet & vice verſa. Similiter appetitus ſpectatur ut dependens a ſolo ſenſu, deinde vero ut ſimul dependens ab imaginatione. Qui concurſum plurium facultatum ad eandem actionem non diſtincte expendunt, ut ſigillatim inquirant, quid ab unaquaque proficiſcatur, nunquam ad veritatem liquidam pertingunt, ſed ſumma imis miſcent, aut cœcutientes hæſitant, quid ſtatuere debeant, & veritatem vel nullam agnoſcunt, vel eam rationi humanæ imperviam temere pronunciant. Deinde probe quoque notandum venit artificium, quo problemata phyſico-mechanica reducuntur ad Geometriam puram, ut per eandem ſolutio in poteſtatem redigatur: id quod inprimis locum habet in tranſitu Geometriæ ad Phyſicam, ut tractare naturam mathematice liceat. Utile eſt hoc artificium

in

in omni cognitione mathematica, qualis etiam locum habet in Psychologia & in variis Philosophiæ practicæ capitibus, etsi hactenus de ea non cogitarint Mathematici, quippe principiorum philosophicorum ignari, nec Philosophi, qui subtilitates mathematicas a se alienas existimarunt. Erit autem tempus, quo, Philosophia nostro more magis exculta, cognitionem mathematicam ultra eos, intra quos hactenus coarctatur, terminos etiam ad talia provehent, in quibus quod locum habeat, hactenus vix sibi persuadere patiuntur. Quæ hic speciminis loco in medium afferuntur, excitare debent attentionem lectoris ad ea artificia, quibus methodus amplificatur & quæ pauci in Mathesi imitantur in casu simili, extra eandem vero ut adhibeat nemo cogitat.

§. 257. In resolutione problematum Physico-mechanicorum id quoque considerandum est, utrum solvatur in hypothesi naturæ, an vero in aliena. Illud obtinet, si quod sumitur in rerum natura revera ita sese habet; hoc autem, si minus. Exempli loco esto acceleratio gravium. Motum gravium continuo accelerari, experientia constat, nec minus liquet, naturæ conveniens esse, ut certa lege acceleretur. Quodsi in solutionibus problematum de motu gravium lex accelerationis sumatur, qualis obtinet in rerum natura; eadem in hypothesi naturæ solvuntur. Si vero alia sumatur, quam quæ in rerum natura obtinet; eadem solvi dicimus in hypothesi aliena. Geometræ perinde est, in quacunque hypothesi problema solvat, modo hypothesis non sit impossibilis, libera nimirum a contradictione. Enimvero in Physica non sunt usui nisi solutiones, quæ hypothesi naturæ nituntur. Hinc qui nonnisi Geometram agit, problema solvit in omni hypothesi possibili, Physico relinquens ut hypothesin naturæ definiat, & ad eandem solutionem generalem applicet, vel ex pluribus particularibus eam seligat, quæ instituto suo convenit. Quodsi dicas, solutiones in hypothesi aliena nullius esse utilitatis; lubens concedo, si non de alia utilitate sermo fuerit, quam quæ in Physica locum habet; nego

 autem,

autem, ſi de utilitate ſimpliciter ſermo fuerit. Neque enim deſtituitur ſuo in Matheſi pura uſu, qualis eſt incrementum artis analyticæ magni omnino faciendum. Non igitur contemnenda ſunt magna Geometrarum molimina, quæ per ſe ad cognitionem naturæ mathematicam nil conferunt. Sufficit enim detegi methodos, per quas ea in poteſtate noſtra conſtituitur, quam primum hypotheſes naturæ innotuerunt. Quid quod ſolutiones problematum in alienis hypotheſibus factæ conducant ad illas inveſtigandas, quatenus ad experimenta ducunt, de quibus alias non cogitare daretur. Quoniam principia Philoſophiæ naturalis mathematica cognitioni Naturæ mathematicæ inſervire debent; rigoroſe loquendo talia non ſunt, niſi quæ hypotheſibus naturæ nituntur. Et ſi certam deſideres cognitionem, hypotheſes naturæ evinci debent, ne de earum veritate ullum ſuperſit dubium. Quoniam tamen indirecte ad cognitionem naturæ mathematicam proſunt, quæ ex alienis quoque hypotheſibus ducuntur, quemadmodum modo annotavimus, & in Phyſicam quoque admittuntur hypotheſes philoſophicæ, etſi nondum certæ, probabilitate tamen non deſtitutæ, quatenus ad veritatem liquidam inveniendam viam ſternunt (§. 127 *Diſc. prælim.*), ſit ita, quod non ingredi debeant tanquam principia demonſtrationem propoſitionum, quæ in Phyſicam tanquam dogmata admittuntur (§. 128. *Diſc. prælim.*); imprudens reprehenderit, quod principia Philoſophiæ naturalis mathematica dicantur, quæ ex hypotheſibus alienis & ex aliis, quas Naturæ hypotheſes eſſe nondum certo conſtat, deducuntur. Ecquis propterea invideret titulum Principiorum Philoſophiæ naturalis mathematicorum celebratiſſimo operi viri ſummi *Iſaaci Newtoni*, quo magno ſuo merito tantam nominis celebritatem conſecutus? Cauti tamen ac circumſpecti eſſe debemus, ne quæ ob uſum, quem indirecte habent, principia Philoſophiæ naturalis mathematica tolerando ſenſu dicuntur, pro principiis proprie ac rigoroſe dictis habeantur: hoc enim cederet in detrimentum ſcientiæ philoſophicæ. Nemo igitur Philoſophus pro-

probaverit, ſi qui hypotheſes *Newtonianas*, eas præſertim, quibus nonniſi in Matheſi locus conceditur, pro principiis Philoſophiæ naturalis ſumunt & neſcio quam Philoſophiam *Newtonianam* exſculpunt, non modo Phyſicam cum Philoſophia, hoc eſt, cum genere ſpeciem, verum etiam cognitionem mathematicam cum philoſophica confundentes. Etſi in virorum magnorum meritis extollendis liberales ſimus; non tamen eorum laudes in præjudicium veritatis producimus: id quod ne quidem in adulatore ferendum. Valet hic quam maxime tritiſſimum illud: Amicus Socrates, amicus Plato, amicus Ariſtoteles, ſed magis amica veritas. Ceterum notandum eſt, inter hypotheſes alienas & hypotheſes naturæ dari genus quoddam earum intermedium, quæ non invita experientia ob commoditatem praxeos in locum hypotheſium naturæ aſſumi poſſunt, immo debent, ne præter neceſſitatem difficultatibus praxin immergas, quam ſimplicem ac expeditam eſſe oportet, & quas adeo convenienter admodum *Vicarias* dixeris. Exemplum habemus in motu gravium. Cum gravia vi gravitatis ferantur ad centrum terræ, in motu projectorum directiones ſunt convergentes, utpote in centro Terræ concurrentes. Hypotheſis adeo directionum convergentium naturæ hypotheſis eſt. Hoc tamen non obſtante recte cum *Galilæo* in ejus locum ſurrogatur hypotheſis directionum parallelarum, propterea quod in iis diſtantiis, in quibus experimenta ſumere licet, lineæ convergentes pro parallelis citra errorem aſſignabilem in praxi inde metuendum haberi poſſunt. Referendæ ſunt hypotheſes iſtæ vicariæ ad ea, quæ ſunt toleranter vera & quorum plurima in Matheſi occurrunt exempla, ex ea in Philoſophiam minime inferenda.

§. 258. Quoniam in rerum natura nulla niſi motu contingit mutatio, Mechanica vero motus ſcientia eſt, ad quam etiam recte refertur ſtatus æquilibrii, quo ſublato oritur motus; dubium ſupereſſe poteſt nullum, quod Mechanicæ principia in explicandis naturæ phænomenis uſum habeant. Quamobrem qui in uſum Phyſicæ Mechanicam addiſcit,

addiſcit, definitiones ac theoremata de motu & æquilibrio ſolidorum cognita atque perſpecta ſibi reddere debet. Quodſi demonſtrationes difficiliores videantur, quam ut eas capere poſſit, vel ſi tantum temporis impendere nolit, quantum iis percipiendis ſufficit; ſatis erit, ſi hiſtoricam ſaltem cognitionem ſibi acquiſiverit in eo cognitionis gradu acquieſcens, quem ſupra primum diximus. Quando enim principia mechanica in Phyſica applicantur, non attenta demonſtratione ſumuntur tanquam vera, adeoque quoad applicationem perinde eſt, ſive demonſtrationem animo comprehenderis, ſive eam non attigeris. Abſit autem, ut quis ſibi perſuadeat, nos Philoſophum a demonſtrationibus mathematicis arcere velle, quas non modo neceſſarias agnoſcimus, ne ſine convictione tanquam verum ſumas, quod ad reddendam rationem phænomenorum naturæ applicas, conſequenter ut certa tibi ſit rerum naturalium cognitio; verum etiam quia habitus demonſtrandi omni modo perficiendus ad recte philoſophandum in Phyſica conducit, immo nec in eadem demonſtrationibus geometricis ſemper ſuperſedere licet, etſi cognitionem mathematicam a philoſophica ſeparaveris. Ceterum non inutile eſt præcipua theoremata mechanica in eorum gratiam, qui demonſtrationes capere vel non poſſunt, vel nolunt, experimentis comprobari, ut veritatem a poſteriori agnoſcant, quam a priori agnoſcere minime valent: id quod in Phyſica tanto magis ſatisfacit, quanto plura in eadem aſſumenda ſunt nonniſi experientiæ fide. Proſunt autem experimenta mechanica etiam Mathematicis, ut conſtet de rationis cum experientia conſenſu, tantoque magis exploratum ſit, quod ratiocinando veritatem fuerint aſſecuti. Eadem commendanda ſunt iis, qui ſolam praxin Mechanicæ curant, ne in reddendis rationibus ſumere teneantur, ſola autoritate aliena confiſi, quæ nullo modo vera perſpiciunt.

§. 259. Qui ad Matheſin ſublimiorem adſpirant, iis imprimis commendanda ſunt, quæ in capite primo usque ad decimum quartum incluſive leguntur.

Etenim

Etenim iis familiaria esse debent theoremata de motu, quemadmodum theoremata de ratione quantitatum & theoremata Geometriæ elementaris familiaria experiri debet, qui in Mathesi inoffenso pede progredi voluerit. Dedimus præterea problematum physico-mechanicorum solutiones, quæ Analyseos applicationem insinuant, qualis in Mathesi sublimiori requiritur, ut adeo artem doceamus per exempla, quemadmodum in Algebra fecimus. Quemadmodum adeo, cum de studio Algebræ ageremus, docuimus, quomodo enotanda sint artificia in futurum usum, & hinc inde memoriæ infigenda theoremata, quæ analytice eruuntur; ita utrumque etiam quoad problemata in Mechanica soluta notandum. Prolixum nimis foret, si eadem industria, qua in explicando Algebræ studio usi sumus, hic quoque singula perlustrare vellemus. Quamobrem hoc propriæ lectoris ad superiora satis attenti meditationi relinquimus.

§. 260. Denique demonstrationes syntheticas analyticis miscuimus, cum ad utrumque genus præparare voluerimus lectorem nostrum. In demonstrationibus autem syntheticis accuratam servavimus formam, quam vi regularum logicarum habere debent: id quod facile experietur, qui easdem eodem modo resolvere voluerit, quo supra geometricas resolvere docuimus. Proposuimus quoque demonstrationes completas, ne quid divinandum lectori relinquatur, quemadmodum faciunt qui peritis scribunt, ac ideo citamus, quæcunque ex Arithmetica & Geometria elementari sumuntur, ne a studio Mechanicæ arceantur, qui Mathesin puram nondum adeo familiarem experiuntur, ut per se assequantur, quæ ex anterioribus supponuntur. Ac idem observamus in problematum analytica resolutione, ne quid desit, quod ad facilitandum eorum intellectum conducere possit. Neque enim hoc pacto solum consequimur, ut lector nostrorum Elementorum absque multo laboris ac temporis dispendio addiscat, quæ discenda sunt; verum etiam ut meditationibus consum-

matis adſueſcat, quibus in Philoſophia & ſuperioribus, quæ dicuntur, Facultatibus opus habet.

## CAPUT VI.

### De

# Studio Hydroſtaticæ, Aerometriæ & Hydraulicæ.

§. 261.

Hydroſtatica tota cognitu utilis iis, qui praxi Mechanicæ ſtudent. Sufficit autem iisdem primus cognitionis gradus. Enimvero ne ſenſus theorematum videatur obſcurus, ſingula exemplis numericis illuſtranda. E. gr. Theorema 14. §. 55. hujus tenoris eſt: *Corpus ſpecifice gravius in fluido leviori eam ponderis ſui partem amittit, quantum eſt pondus fluidi ſub eodem volumine.* Ponatur itaque corpus ſpecifice gravius, quod aquæ immergitur, eſſe cubum, cujus latus unius pedis. Cum juxta *Morlandum* (§. 65) pes cubicus aquæ ſit 70 librarum cum 2 unciis; quodlibet corpus aqua ſpecifice gravius amittet pondus 70 librarum & 2 unciarum. Quodſi ergo totum pondus fuerit 100 librarum; intra aquam ſuſpenſum non erit niſi 29 librarum 14 unciarum. Siquidem veritatem principiorum hydroſtaticorum a poſteriori cognoſcere volueris; facillime ſingula experimentis comprobari poſſunt, qualia deſcripſi Tomo primo Experimentorum idiomate patrio evulgatorum. Theoremata, quæ capite primo de corporum gravitate & levitate ſpecifica leguntur, ſolis exemplis numericis illuſtrari ſufficit. E. gr. Theorema 1 §. 17 tale eſt: *ſi duo corpora eandem denſitatem habuerint, maſſæ ſunt ut volumina.* Sumamus adeo duos dari globos plumbeos, quorum unus 5, alter 9 librarum. Quoniam maſſæ ſeu quantitates materiæ æſtimantur pondere, quemadmodum in vulgus notum eſt; erunt etiam volumina ſeu magnitudines horum

glo-

globorum ut 5 ad 9, nempe ſi magnitudo minoris diviſa concipiatur in partes quinque æquales, iſtiusmodi partium 9 erit magnitudo majoris. Quodſi ergo magnitudo unius conſtiterit in menſura abſoluta, veluti ſi detur in digitis cubicis Rhenanis, per regulam trium invenietur in eadem menſura alteræ. Iſtiusmodi exempla ſimul oſtendunt theorematum uſum, quem facere poſſunt, qui praxi operam dant. Erunt autem tanto utiliora & tanto certiorem ſpondent uſum in praxi, ſi fuerint vera, numeris per experimenta definitis.

§. 262. Multum quoque uſum habet Hydroſtatica in Philoſophia naturali, cum multorum phænomenorum inde reddatur ratio. Quamobrem ſi quis Mathematum imperitus ad Phyſicam accedit, principiorum tamen hydroſtaticorum ignarus eſſe non debet. Conſultum igitur eſt, ut primum ſaltem cognitionis gradum acquirat eadem obſervans, quæ modo præcepimus (§. 258). Inprimis autem qui Phyſicæ operam navare decrevit, principia hydroſtatica experimentorum fide tanquam vera amplecti ſibique familiaria reddere debet. Experimenta huc facientia dabimus ſuo loco, quando ordo in Philoſophia nos ad experimenta phyſica deſcribenda & principia, quæ in ſcientia naturali uſui ſunt, inde ſtabilienda deducet. Quinam vero ſit horum principiorum in Philoſophia naturali uſus, ſuo patebit loco, ubi eandem eadem methodo trademus, qua hactenus in Metaphyſica uſi ſumus, & nuc in Philoſophia practica utimur. Quodſi quis in omni Matheſi fuerit prorſus peregrinus ac hoſpes, hiſtoricam tamen propoſitionum hydroſtaticarum cognitionem acquirere valet obſervans ea, quæ de primo cognitionis gradu ſupra capite, docuimus, & breviter præcedente paragrapho annotavimus, modo ſibi terminos quosdam perſpectos reddat: id quod facile fieri poterit, ſi indicis auxilio evolvat definitiones, quibus explicantur, veluti quid ſibi velit ratio compoſita, quid directa, quid reciproca, qui termini in Arithmetica explicantur. Sane etiam Mathematum imperitus terminis tamen mathematicis uti debet,

quoties aliis verbis mentem suam commode exprimere non licet, seu quoties loquendum de iis, quæ ad objectum Mathematicorum spectant, quemadmodum Physicus terminis Medicorum utitur, si de rebus ad Medicinam pertinentibus ipsi dicendum. Qui enim de re quadam loqui vult, nosse quoque debet nomen ejus.

§. 263. Equidem demonstrationes hydrostaticæ nihil prorsus habent difficultatis, præsertis si quis in anterioribus, multo difficilioribus, jam fuerit versatus; negandum tamen non est, quod, cum subsidio figurarum destituamur, quæ imaginationem juvant, termini generales, quibus hic utimur, eas reddant captu difficiliores, quemadmodum ipsas propositiones intellectu. Consultum igitur est, ut demonstratio applicetur ad casum particularem, quemadmodum fecimus in theoremate 14 §. 55, ubi pro corpore specifice graviori sumsimus cubum pollicarem plumbeum, pro fluido leviori aquam, adeoque pro volumine cubum pollicarem seu digitum cubicum. Hoc pacto enim idea imaginationi suggeritur, qualem in Geometria sistit figura. Immo si ita visum fuerit, schema quoque delineari potest, quod cubum intra aquam in vase vitreo suspensum repræsentat. Neque vero verendum est, demonstrationibus hoc pacto detrahi suam universalitatem & probato casu particulari argumentando a particulari ad universale colligi veritatem theorematis universaliter enunciati. Etsi enim idea, ad quam dirigitur demonstratio, repræsentet casum maxime particularem; cum tamen in demonstrando non sumamus nisi universalia, quæ insunt, ut eodem successu particulare quodcunque aliud in illius locum surrogari possit, quod ex universalibus concluditur utique universale est. Sane in Geometria quoque figura, ad quam refertur demonstratio, singulare quid est, cujus idea particulare refert, v. gr. triangulum, cujus anguli sunt datæ magnitudinis & latera in data quadam ratione. Enimvero cum non ex particulari, sed universali, quod ideæ inest, procedat demonstratio; universalitati non officit, quod,

quod, dum intellectus concipit universale, in imaginatione hæret idea quædam singularis, quæ casum quendam particularem repræsentat quoad ea, quæ ipsius vi facile distinguuntur, nudo reflexionis actu accedente. Quamdiu in ratiocinando nonnisi vocabulis utimur, universalia ab imaginibus separare non licet, quippe quæ non intelliguntur, nisi quatenus universalia in singularibus seu imaginibus intuemur. Hæc satis aperta sunt iis, qui in Psychologia nostra fuerunt versati. Ceterum eodem artificio utendum est in Physica, siquidem demonstrationes facilitare volueris, quales hactenus dare neglexerunt Physici. Etsi enim hoc intenderit *Honoratus Fabry*, qui in præfatione methodum sibi optime perspectam, immo tritam affirmat; si tamen in iis, quæ mathematica non sunt, prætensas demonstrationes examines, quantum diffideant a genuina earum forma, superiorum gnarus facile deprehendet. Eidem quoque artificio locus est in ipsa philosophia practica, si casum theorematis vel problematis exemplo quodam sive vero, sive ficto explices, quod imaginem quandam imaginationi præsentem sistit, & ad idem demonstrationem referas, quemadmodum in Geometria ad figuras, quatenus nempe in imagine, quæ exemplum repræsentat, attentionem non dirigis nisi ad universalia, quæ hypothesis theorematis vel resolutio problematis continet. Immo in ipsis Metaphysicis idem imitari licet, quidni debemus? quamdiu desideratur Characteristica generalis, vi cujus notiones abstractæ qualitatum ab imaginibus separantur, & calculus qualitatum a calculo magnitudinum utique diversus, quem literalem vulgo vocamus, ut characterum combinationes in locum ratiociniorum succedant. In hisce enim continetur Algebra philosophica, cujus aliam prorsus ideam sibi finxit *Robertus Hooke* in Posthumis, & quam speciosam generalem appellavit *Leibnitius*. Sed de hac dixi, quæ sufficiunt, ut intelligantur termini, in Psychologia empirica.

§. 264. Elementa Aërometriæ eo fine conscripsimus, ut specimine quodam non admodum difficili doceremus, quomodo

modo Matheſis ad experimenta applicetur, & ideam quandam cognitionis mathematicæ in ſcientia naturali animo legentium inſinuaremus, ſimulque uſum Algebræ in Phyſica exemplis non nimis difficilibus demonſtraremus. Cum poſtea Elementa Matheſeos univerſæ ederemus, Aërometriam in numerum diſciplinarum mathematicarum referre nulli dubitavimus, præſertim quia principiis ejus opus habemus in Hydraulica, quæ dudum inter diſciplinas mathematicas locum obtinuit. Eodem nimirum jure, quo Hydroſtatica & Mechanica, immo etiam Optica pro partibus Matheſeos habentur, Aërometria quoque pars ejusdem habetur. Quamobrem facile patet, hanc Matheſeos partem inprimis commendandam eſſe iis, qui ſcientiæ naturali operam navare decreverunt, maxime ubi in cognitione philoſophica ſubſiſtere non voluerint, ſed ad mathematicam aſcendendi animum habuerint. Supponit autem Hydroſtaticam, cujus principia ad aërem tanquam fluidum grave applicantur. Quamobrem illi ſtudere ante debes, quam ad Aërometriam accedas. Supponuntur etiam pauca ex Mechanica, quemadmodum ex citationibus videre eſt. Etſi autem Aërometria potiſſimum ad cognitionem Naturæ mathematicam manuducit tyrones; in genere tamen docet, quomodo Phyſica methodo demonſtrativa tractari debeat, quatenus in ea etiam continentur, quæ absque principiis mathematicis demonſtrantur. Diſcimus præterea ex ea, quamvis in reliqua Philoſophia cognitio philoſophica a mathematica ſeparari poſſit; in Phyſica tamen, niſi certitudini deeſſe velis, fieri non poſſe, quin ſubinde nonnulla ex principiis mathematicis domonſtrentur.

§. 265. Quibus ſola praxis ſatisfacit, illis inſervient problemata de antliæ pneumaticæ, barometrorum, thermometrorum & hygroſcopiorum conſtructionibus, una cum ſcholiis, quibus horum inſtrumentorum uſus dilucidatur. Non tamen negligenda ſunt theoremata & corollaria, quibus tum fabrica, tum uſus iſtorum inſtrumentorum perfectius intelligitur. Definitiones quoque expendendas

eſſe

esse perse patet. Cum in Elementis Matheseos Germanicis ea potissimum tradiderimus, quæ ad praxin faciunt, etsi oculatam, non omissis scilicet demonstrationibus; ex Aërometriæ quoque Elementis ea excerpsimus, quæ praxin propius respiciunt, & ad theoriam uberiorem præparant lectorem ex Latinis deinceps hauriendam.

§. 266. Inprimis autem Aërometria inservire potest illis, qui ad tertium cognitionis gradum contendunt. Si enim animum ad ea attendunt, quæ sunt methodi, ideam quandam exemplarem applicationis Matheseos puræ, Algebræ præsertim ad experimenta & observationes inde haurient, ut in cognitione rerum naturalium certo tramite progrediantur. Multo enim clarius etiam tyrones hinc perspiciunt utilitatem cognitionis mathematicæ tum ad certitudinem in scientia naturali consequendam, tum ad praxin accuratissime exercendam, quam ex sublimibus istis problematis Physicomechanicis, qualia in Mechanica complura explicavimus. Quamobrem cum pauca sint, quæ ex Mechanicis in Hydrostatica & Aërometria sumuntur, demonstrandi principia; non inconsultum erit, si, qui ex Mechanica tantummodo principium de æquilibrio solidorum perspexerunt, sepositis ceteris ad Hydrostaticam & Aërometriam statim se conferant. Quodsi enim in hisce disciplinis intellectu non adeo difficilibus applicationem Matheseos puræ & Algebræ inprimis ad Naturæ cognitionem didicerint; minus difficultatis experientur in sublimioribus, quæ in Mechanica traduntur. Non est quod objicias, Elementa Matheseos cum sint in tyronum gratiam conscripta, ut scientiam inde hauriant, in iis quoque faciliora difficilioribus fuisse præmittenda, adeoque Elementa Hydrostaticæ & Aërometriæ Elementis Mechanicæ fuisse anteponenda. Etenim methodus studendi non per omnia consentit cum methodo tradendi disciplinas & eas sibi mutuo subordinandi atque in singulis veritati unicuique locum suum assignandi. Nimirum qui scientiis operam navat a facilioribus incipit, & inde continuo ad difficiliora progreditur, quam

legem

legem præscribit methodus studendi. Ast disciplinæ integræ & in iis veritates singulæ eo ordine collocandæ, ut sequentia ex antecedentibus intelligi & demonstrari possint. Non autem semper contingit ut disciplina, quæ continet intellectu faciliora, non dependeat ab alia, in qua occurrunt multo difficiliora. Unde methodo studendi convenit, ut difficilia initio seponantur & ad faciliora properetur. Immo hac de causa in gratiam primorum tyronum conscribuntur compendia, in quibus nonnisi facillima & scitu maxime necessaria continentur, ut animum imbuant principiis & ad profundiora haurienda præparent. Memini me olim cum disciplinis operam navarem, iis quæ captu difficilia videbantur non immoratum fuisse, sed ad sequentia progressum, si vel maxime eorum veritas ab istis penderet: quando enim postea sequentibus intellectis ea denuo expendebam, sine ulla mora obvium erat, quod antea impervium videbatur. Nec ignoro rationes, cur hoc contigerit, quippe quas Phylologia suppeditat, quas tamen hic commemorari parum refert. Absit itaque, ut, ubi quædam a te percipi non posse tibi videtur, de viribus tuis desperans efficiaris studii desertor. Nocet non minus desperatio, quam nimia de viribus suis confidentia, nec ardor sciendi, qui accendere debet cupiditatem discendi, producendus in nocumentum.

§. 267. Hydraulica olim machinarum hydraulicarum & fontium salientium constructione tota absolvebatur, atque adeo non erat nisi pars Matheseos practicæ. Enimvero postquam theoria Mechanicæ ad omnem motum solidorum fuit extensa; in Hydraulica quoque in motum fluidorum inquirere cœperunt Geometræ. Unde hæc Matheseos pars longe aliam induit formam, qua etiam sese commendat Theoristis, quibus nauseam movet praxis, ne quid commune habere videantur cum hominibus, quibus natura manus loco ingenii dedisse censetur. Nos & theoriam, & praxin æstimamus, quamvis non eodem, sed suo unamquamque pretio, ut utrique suus habeatur honor. Quamobrem in Hydrau-

draulica quoque praxin cum theoria copulavimus, nec hanc illa dehonestari opinamur. Etsi enim Mathematicus, Geometra præsertim profundus, qui arduis meditationibus sufficit, longo intervallo post se reliquat machinarum fabrum, & hic perperam pro Mathematico habeatur; non tamen ideo praxis contemnenda, quin potius Geometra profundis suis meditationibus hunc fructum deberi agnoscere debet, ut illa perficiatur. Ex Hydraulica facillime perspicere licet, quod auxilio Geometrarum indigeant, qui praxi operam navant. Exempli loco esto determinatio situs alarum molendini vi venti agitandi (§. 316 *& seqq. Hydraul.*). Quodsi non deessent, qui inventa Geometrarum profunda ad praxin communem aptarent, illud adhuc magis pateret. Dolendum vero, quod nemo ea de re cogitare velit.

§. 268. Qui soli praxi operam navant, iis sufficit, ut distincta notione constructionem machinarum hydraulicarum & fontium salientium animo concipiant. Non tamen inconsultum est, ut theoremata quoque sive synthetice demonstrata, sive analytice investigata percurrant, visuri num in iis quid contineatur, quod praxin juvet. Idem quoque facere tenentur, ubi praxin desiderant oculatam, hoc est, rationem quandam eorum perspicere volunt, quæ faciunt, ne subinde cœcutientes in praxi aberrent. Exemplum illustre habemus in siphonibus, quos aquis per montium vertices in oppositam planitiem deducendis sufficere existimarunt, qui caussam ascensus in crure breviori ignorarunt (§. 68 *Hydraul.*). Istiusmodi exemplis convincendi sunt, qui theoriam omnem contemnunt, quantum sibi noceant, si ne historicam quidem ejus notitiam sibi comparare velint. Quamobrem in genere suademus, ne illi, quos praxis juvat, theoriam Matheseos prorsus negligant, sed primum cognitionis gradum suum esse credant. Ipso nimirum usu experientur, quænam hinc utilitas in eos sit redundatura.

§. 269. Theoria non modo Hydraulicæ, verum etiam praxis multa continet, quæ usui esse possunt

poſſunt in Phyſica. Quamobrem ſi quis vel maxime ſe minus aptum ſentiat ad demonſtrationes & reſolutiones analyticas capiendas, qui ſcientiæ naturali incumbere decrevit; ei tamen maxime commendanda eſt hiſtorica ſaltem Hydraulicæ cognitio. Enimvero quia in ſcientia quoque naturali methodo demonſtrativa utendum, ſi certitudinis metam attingere velis, quantum datur; conſultius omnino eſt, ut demonſtrationes quoque expendat. Et qui Matheſin ad Phyſicam applicare voluerit; ei huic inſtituto non minus inſervire poterit Hydraulica, quam Aërometria, ut, quæ paulo ante de hac dicta ſunt, ad hanc quoque applicanda veniant.

§. 270. Hydraulica autem, ſive theoriam, ſive praxin ſpectes, attentionem eorum meretur, qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant. Ubivis enim annotare licet artificia heuriſtica, quibus feliciſſime uſi ſunt, aut uti ſaltem potuerunt inventores veritatum tam theoreticarum, quam practicarum. Cum de Algebræ ſtudio ageremus, ad nauſeam forſan inculcavimus, qua attentione artificia iſta ſint detegenda, ut in caſu ſimili poſthac iisdem utaris. Quamobrem nolumus hic ad particularia deſcendere; ſed nobis ſufficit monito generali excitaſſe attentionem, quam afferre debent, qui artem inveniendi curæ cordique habent. Ne tamen quis exiſtimet, laudari artificia, quæ in Hydraulica non reperiuntur, ſingularia; exempli loco ad unum provocare licet, nimirum quo ad menſuram reducuntur, quæ menſuram reſpuere videntur. Obtinet hoc in doctrina de curſu fluminum, ubi, cum aqua omnis per totam ſectionem non eadem celeritate fluit, aquæ per eandem fluenti tribuitur celeritas quædam media, qua ſi per totam ſectionem flueret, eodem tempore tantundem per eam effunderetur, quantum celeritate inæquali per eandem fertur, & quomodo media iſta celeritas inveniri poſſit docetur. Ceterum ex ſuperioribus abunde conſtat, nos ubique in ſtudio Matheſeos urgere diſtinctam eorum cognitionem, quæ actu reflexo intellectus detegenda præcipimus, cum id maxime conducat ad recte philoſophandum:

dum: quem finem intendimus, dum in studio Matheseos intellectus perficiendi causa versamur.

## CAPUT VII.

## DE

# Studio Opticæ, Perspectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ.

§. 271.

In Optica strictiori sensu sumta pauca occurrunt, quæ ad praxin faciunt. Præter ea enim, quæ de camera obscura (§. 79 *Opt.*) & de quadrato geometrico ejusque usu (§. 172 *& seqq. Opt.*) & tesselatis imaginibus construendis (§. 312 *Opt.*) docentur, nonnisi problemata non nulla de magnitudine visa *cap.* 5. & theoremata nonnulla de lumine solis per foramen augustum radiante *cap.* 6. praxin directe respiciunt. Palmaria praxis Opticæ directæ in Perspectiva continetur. Quoniam tamen indirecte omnia, quæ de visu demonstrantur, usui esse possunt, qui praxi catoptrica & dioptrica delectantur, & quos exercitia Perspectivæ juvant; non male sibi consulunt, qui, si non omnium, præcipuorum tamen theorematum opticorum cognitionem historicam acquirere student.

§. 272. Qui ad Physicam animum appellunt, iis studium Opticæ maximopere commendandum. Non tamen sufficit nuda ejus cognitio historica, quam iis commendavimus, qui praxi student (§. 271); sed requiritur scientifica, quæ non sine accurata demonstrationum evolutione acquiritur. Visus phænomenon naturæ est, ad objectum adeo Physicæ, rerum naturalium scientiam, referendum. Nec minus lumen, umbra & colores ad idem spectant, quæ hic tanquam visibilia considerantur. Etsi enim in Mathesi potissimum ratio habeatur cognitionis mathematicæ, ut tamen hæc in potestate sit, multa

declarantur, quæ explicare Phyſici eſt, quemadmodum & modum viſionis Phyſicus explicare debet. Quodſi ergo in Optica ea animi attentione utaris, quam hactenus in ceteris diſciplinis mathematicis commendavimus; ex hac Matheſeos parte diſcere licebit, quomodo res naturales ſint explicandæ, ut certam earum cognitionem acquiras. Dum vero Geometria elementaris applicatur ad phænomena viſus accurate determinanda; Optica prima & facillima cognitionis mathematicæ rerum naturalium exempla exhibet. Quamobrem ſi quis nullam adhuc hujus cognitionis habeat ideam, is omnium facillime ex Optica eandem hauriet. Unde ſuademus, ut, quamprimum principiis Arithmethicæ, Gemetriæ elementaris ac Trigonometriæ planæ imbutum habet animum, ad lectionem Opticæ accedat, intellectu multo faciliorem, quam Mechanica, Hydroſtatica, Aërometria & Hydraulica, ac præterea jucunditate ſua animum lectoris in ſe trahentem. Accedit quod ex Optica etiam innoteſcant fallaciæ viſus, a quibus ſibi cavere debet Naturæ ſcrutator ab obſervationibus inquiſitionem omnem exordiens.

§. 273. Cum Perſpectiva ſit praxis Opticæ directæ, qua docetur delineatio objecti cujuslibet in tabula, quale ad datam diſtantiam & in data altitudine oculo ſuper tabula tranſparente inter ipſum & objectum ad horizontem perpendiculariter erecta apparet (§. 1 *Perſpect.*); qui ſolam praxin curant ſchemata juxta ea, quæ in ſingulis problematis præcipiuntur, delineare & deinceps in aliis figuris delineandis imitari debent. Quodſi quis in Architectura fuerit verſatus, exempla quoque inde petere poteſt ac debet. Exercitia hæc facilitabis, ſi Anonymi Galli Perſpectivam practicam, cujus ſupra in recenſione Autorum c. 8. §. 23 mentionem injecimus, in ſubſidium adhibeas & deinde exempla ex *Andreæ Putei* Architectura Pictorum & Sculptorum (§. 24. *cap. cit.*) petas. Satisfacient ubivis regulæ, quas dedimus. Hic labor continuandus, donec habitum conſequaris. Nemo autem non videt, artem pictoriam cum praxi Perſpectivæ eſſe conjungendam.

Hæc

Hæc enim ad illam perficiendam unice tendit. Qui vero nonnisi scientiam expetunt, iis sufficit demonstrationes praxium percepisse, quas in usum potissimum Philosophorum addidimus, quorum cum sit rationem reddere eorum, quæ sunt atque fiunt, rationem quoque perspicere debent delineationum objecti cujuscunque juxta regulas Perspectivæ factarum. Qui tertium cognitionis gradum intendunt, iis notandum est atificium, quo tota Perspectiva in potestatem Geometræ redacta (§. 2. *Perspect.*) & praxin mechanicam eodem fundamento nixam, quam problemate primo exposuimus, conferant cum regulis geometricis, quæ in sequentibus problematis exponuntur, ut applicatione Geometriæ praxis perficiatur & certa scientia eorum acquiratur, quæ nonnisi confuse percipiuntur. Eodem fine conducunt, quæ de anamorphosibus capite ultimo proponuntur.

§. 274. Catoptrica phænomena visionis reflexæ demonstrat, quæ fit ope speculorum. Specula communissima sunt plana, quorum ideo usus ceteris præfertur, quia objectum ea forma & magnitudine spectandum exhibent, quale & quantum est, ut adeo teipsum videre ac contemplari possis. Visio reflexa variat pro diversitate superficiei reflectentis: unde alia sunt speculorum planorum, alia concavorum, alia convexorum, alia ex hisce compositorum phænomena. Cumque figuræ concavæ ac convexæ in infinitum varient, phænomena quoque in infinitum variare debent. Artifices hactenus parare nequeunt nisi specula plana, convexa sphærica, cylindrica & conica, concava sphærica & cylindrica, prismatica enim & pyramidalia ex planis componuntur. Quamobrem contenti sumus horum speculorum phænomena demonstrasse, quæ ante experientia innotuisse, quam via demonstrationis in eadem inquisiverint Mathematici, facile largior. Fuere tamen artifices, qui specula parabolica conficere conati sunt. Unde horum quoque mentionem quandam injicere voluimus. Etsi autem specula plana sint quotidiani usus, ex eorum tamen combinatione pro diverso ad se invicem situ inexpectata

 pror-

prorſus prodeunt phænomena, quæ non modo delectant, ſed ignaros quoque in admirationem rapiunt, non ſine delectationis incremento. Inſerviunt etiam variis technaſmatis ſpecula cetera, quæ etſi ad delectandum fuerint excogitata ſeriis tamen inſerviunt meditationibus Philoſophi, quippe naturam imitantis, quæ ſerio agere ſolet, etiam dum pueri ludunt. Quamobrem nec piguit technaſmata iſta variis ſpeciminibus illuſtrare. Et quoniam in omni Matheſi praxin cum theoria conjunximus, idem quoque fecimus in Catoptrica. Qua de cauſa non modo explicavimus technaſmata, quæ ex theoria catoptricæ demonſtrantur & adeo a priori deducuntur; verum etiam modum ſpecula conficiendi: neque enim ſolum dedecet Mathematicum ignorare, qua arte prodeant ſpecula, quorum phænomena demonſtrat, etſi in demonſtrationibus ſumere poſſit ac debeat ſpeculorum figuram; verum etiam hoc noſſe utile eſt, ubi theoremata a ſe demonſtrata per experientiam ad examen revocare voluerit. Quoniam nimirum in demonſtrationibus ſuis ſupponit in rigore geometrico figuras ſpeculorum, ſi de conſenſu demonſtrationum & experimentorum judicium exactum ferre voluerit, noſſe utique debet, ad quam perfectionem ars perducta fuerit, & num ea perfectionem ulteriorem recipere queat. In Matheſi mixta plurimum tribuimus connubio experientiæ ac rationis, quo conſenſus experimentorum & demonſtrationum innoteſcit & quod tantopere commendamus per univerſam ſcientiam naturalem. Nihil adeo prætermittendum erat, quod eo ducere poterat.

§. 275. Qui adeo ſolam praxin amant, illis ſatisfacient problemata, prætermiſſis demonſtrationibus. Non tamen prætermittere debent theoremata, cum hiſtorica eorundem cognitio æquipolleat recenſioni phænomenorum: ſi qua enim ſunt, quæ nonniſi in uſum demonſtrandorum aliorum afferuntur, ea facile a ceteris diſtinguent. Nimirum conſultum eſt, ut theoremata experimentis ſubjiciant, ne omni prorſus certitudine deſtituatur cognitio, tumque patebit,

quænam ſint ea, quorum cognitio ſcitu neceſſaria ac utilis etiam iis, quos ſola praxis juvat. Quid quod in numero quoque theorematum ſint haud pauca, quibus in praxi locus eſt, aut quæ ad praxes transferri poſſunt. Exempli loco eſſe poteſt theorema 11. §. 71, vi cujus §. 73 exhibetur globus deſcendens in plano inclinato tanquam aſcendens in verticali. Catoptrica praxi abundat, atque hoc nomine ſeſe commendat omnibus, quotquot eandem amant, iis præſertim qui quærunt, quod delectat.

§. 276. Inter ſpecula inprimis ſeſe commendant ſphærica concava, non ſolum propter phænomenorum prorſus ſingularium raritatem, verum etiam quod ſint cauſtica ſeu uſtoria & lumini intendendo inſerviant. Specula cauſtica præſertim majora uſum habent in experimentis phyſicis, qualia deſcribuntur in ſchol. 4. problem. 22. §. 221. immo phænomena omnia viſionis reflexæ argumentum phyſicum ſunt, quorum adeo rationes Phyſicus reddere tenetur, etiamſi geometricas inſuper habeat demonſtrationes. Phyſicus phænomena ſumit tanquam a poſteriori cognita, & eorum rationem reddit. Mathematicus illa demonſtrat ex ſuppoſita ſpeculi figura vi legis reflexionis ea deducens a priori tanquam incognita ex cognitis. Atque adeo diverſo prorſus modo ſuo funguntur munere: quod dum uterque facit, manifeſta eſt differentia, quæ inter cognitionem philoſophicam & mathematicam hac in parte intercedit. Ut autem certius conſtet Phyſico, quid ſumere liceat, theoremata & technaſmata catoptrica eum docent. Quemadmodum autem Optica patefacit fallacias viſus circa viſionem directam, quas utiliter cognoſcit Phyſicus, immo Philoſophus in aliis quoque Philoſophiæ partibus; ita Catoptrica revelat fallacias viſus circa viſionem reflexam non minore utilitate agnoſcendas. Atque adeo patet, quomodo in ſtudio Catoptricæ verſari debeat Philoſophus, qui ab omni cognitione mathematica alienum habet animum: quem etſi non probemus, tolerandum tamen cenſemus pro diverſitate ingenii humani, quantum abſque detrimento

mento scientiæ fieri potest. Ceterum quæ de cognitione mathematica quoad visionem directam modo annotavimus (§. 272); ea etiam de eadem quoad reflexam notanda veniunt.

§. 277. E re esse videtur, ut præjudicio occurramus, quo nonnulli sibi mirifice placent & cui alii applaudunt, quasi singulare quoddam acumen proderet. Diximus paulo ante (§. 274), nos facile largiri, quod phænomena speculorum innotuerint a posteriori, antequam de iis a priori demonstrandis cogitarent Mathematici. Non adeo dubito fore haud paucos, qui contendent demonstrationes mathematicas superfluas esse, immo qui hinc inferent, inventa, quæ in Mathesi mixta celebrantur, debere artificibus, a quibus postquam inventa fuerant, ea demum demonstrare conati sunt Mathematici inventionis tamen gloria inter alios eruditos eminere gestientes. Memini hoc argumento arrogantiam Mathematicorum redarguere voluisse *Clericum*, cum *Hermanni* Phoronomiam recenseret. Qua de causa desiderabat, ut Geometra præclarus significaret, quantum scientia naturalis & ars facta sit locupletior, postquam abstrusas istas theorias orbi literato in opere suo propinasset. Artifices enim pro inventoribus habebat, Mathematicos vero demonstratores pronunciabat, qui nonnisi in artificium inventis ingenii sui vires excerceant. Non unum est, quod hic repono. Phænomena, ipsi etiam vulgo cognita, sumit Physicus & eorum rationem reddit; non tamen ideo inanis censetur ejus opera, propterea quod illa ante innotuerint quam de rationibus eorundem reddendis cogitavit Physicus. Eccur ergo inanem operam sumere aut nihil præclari facere dicendus est Mathematicus, qui longe ulterius progressus phænomena non sumit, sed ex iis, quæ sumi debent, via demonstrationis a priori deducit, ut certa sit etiam ejus cognitio, qui existentiam phænomeni nondum supponit? Notandum præterea est, phænomena haud raro a posteriori non satis determinate cognosci, quæ tamen accuratissime determinantur a Mathematico in suis theorematis. Accedit porro, quod Mathematicus non

non omnia phænomena jam ante norit, quam ea demonstrat; sed multa potius adhuc ignorata in apricum producat. Denique inventa, quæ haud raro casui debentur, imperfectiora ad majorem perfectionem perducit; aut, siquidem ulteriorem perfectionem non admittunt, ut idem certo constet demonstrat. Quid quod hinc inde a priori quoque deducat technasmata, quæ tentando nondum fuerunt detecta, aut prorsus non potuissent detegi? Absit autem ut tibi persuadeas ea, quæ casu plerumque aut tentando reperta fuerunt, perficere minoris esse, quam illa reperire. Non semper valet illud pervulgatum: Inventis facile est addere. Inventa nondum æstimare didicit, qui ea aliunde quam ex usu facultatum, cui debentur, æstimat. *Hugenius*, qui horologia singulari pendulorum applicatione perfecit, longo intervallo post se relinquit primum eorundem inventorem, & demonstrationes, quas de tubo optico dedit in Dioptrica, multo majorem laudem pariunt, quam fortuita imperfecti inventio. Ut inventa, quæ casui accepta referenda sunt vel tentaminibus laboriosis, perficiantur, inventis haud raro opus est non sine summo acumine & maxima ingenii vi eruendis. Plurimum adeo falluntur, inventionis gloriam non deberi nisi iis, qui primi in quidpiam inciderunt. Sed hæc evidentiora erunt, ubi ars inveniendi eodem habitu fuerit investita, quo Logicam indutam dudum in scenam produximus, ut ex arte æstimare detur artificem, non vero, quemadmodum nunc plerumque fieri solet, ex eo, quod inventum ejus sit utile, vel quod sit inexpectatum, vel quod aliis fuerit inaccessum, vel quod in admirationem rapiat ignaros & ita porro.

§. 278. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, reperient in Catoptrica, sive theoriam spectes, sive praxin, quæ artem inveniendi illustrant & amplificant, ubi in artificia inquirere voluerint, quibus aditus paratus ad ea, quæ inaccessa videbantur. Neque eum, qui in Physica feliciter progredi voluerit, ubi non minus applicatione Matheseos puræ ad phænomena naturæ, quam connubio expe-

experientiæ ac rationis opus eſt, pigebit eo modo perluſtraſſe Catoptricam, quem ad tertium cognitionis gradum acquirendum ſupra præſcripſimus & cum de ſtudio Algebræ ageremus exemplis illuſtravimus. Quoniam vero nobis quoque propoſitum eſt uſum Algebræ in Matheſi mixta oſtendere, placuit ſub finem adjicere Catoptricam analyticam, ſeu modum inveſtigandi theoremata Catoptrica per Analyſin. Subſtitimus autem in iis ſpeculis, quorum antea phænomena demonſtravimus more veterum, tum ne tyrones univerſalitate ipſis inutili perplexi reddantur, tum quia ſolutiones particulares occaſionem dedere univerſalibus in omni curvarum genere. Diſcentium enim, quibus ſcribimus, ratio habenda fuit.

§. 279. Erunt forſan, qui, cum viderint, Algebræ beneficio nullo fere negotio patere, quæ more veterum non ſine multo apparatu demonſtrantur, demonſtrationes ſyntheticas inutiles exiſtimabunt, immo prorſus damnabunt. Recolenda animo hic ſunt, quæ ſupra (§. 100 *& ſeqq.*), monuimus cum de ſtudio Matheſeos intellectus perficiendi cauſa ageremus, quem inter uſus præcipuos referimus ſtudio mathematico tribuendos & qui multo latius patet quam uſus reliquus omnis. Quamobrem qui hac intentione ad ſtudium Matheſeos animum appellunt, iis omnino maximopere commendandum, ne demonſtrationes ſyntheticas negligant etiam in Catoptrica & demonſtrationes catroptricas eadem induſtria reſolvant, ut pateat earum forma in Logica præſcripta, qua demonſtrationes Geometriæ elementaris reſolvi præcepimus, ut non modo idea exemplaris demonſtrationis conſummatæ, quam in Logica vocamus, reddatur illuſtrior, magisque indies confirmetur, verum etiam ut habitus juxta eam operandi in omni ſcientiarum genere perficiatur. Pudeat enim Philoſophos ſeculo tam illuſtri, quo ſcientiæ mathematicæ ad tantum faſtigium evectæ, diutius in ancipiti hærere, &, dum Mathematici plena luce fruuntur, in tenebris palpitare.

§. 280. Dioptrica praxi multa abundat. Agit enim de viſione refracta, cujus multus uſus eſt

eſt in ſpectandis objectis remotis & vicinis exiguæ molis, quorum illa ob diſtantiam, hæc vero ob parvitatem oculis ſeſe ſubducunt. Hinc in hac parte Matheſeos mixtæ præcipue agitur de tubo optico & microſcopio. Tubi non minus optici, quam microſcopia componuntur ex vitris lenticularibus arte parandis. Atque adeo ad praxin dioptricam ſpectat quoque ars poliendi vitra, quam adeo integro capite accuratiſſime explicavimus. Quoniam tubus opticus maximam utilitatem affert in obſervationibus aſtronomicis, ita ut ſine ejus auxilio Aſtronomia nondum ad eum perfectionis gradum fuiſſet perducta, ad quem eam hodie evectam cernimus; accurata lentium fabrica ipſis quoque Mathematicis curæ cordique eſſe debuit. Quamobrem non mirandum, Mathematicos etiam ſummos, veluti *Hugenium*, vitris poliendis operam dediſſe, nec eos piguiſſe praxin manuariam exercere, etſi in theoria augenda & amplificanda inter paucos eminerent. Ad praxin dioptricam ſpectant quoque perſpicilla, quæ quomodo Myopes & Presbytas juvent in videndis iis, ad quæ oculorum acies non pertingit, in vulgus notum eſt. Dantur denique alia technaſmata dioptrica & catoptrico-dioptrica, qualia nonnulla deſcripſimus & plura apud alios, veluti *Traberum* & *Zahnium*, deſcribuntur: quæ etſi nonnullis magis ludicra, quam utilia videantur, & ad delectandum magis, quam ad augendam ſcientiam compoſita, minime tamen contemnenda ſunt. Uſum enim præbent in experimentando haud raro prorſus inſignem. Exempli loco provocare licet ad priſma trigonum, quod quantum adjumenti attulerit ad naturam luminis & colorum indagandam, ex præclaro opere viri ſummi *Iſaaci Newtoni* clariſſime conſpicitur. Inprimis etiam attentionem merentur, quæ (§. 476. 477 *Dioptr.*) de laterna magica in microſcopium convertenda & ad foramen cameræ obſcuræ lumine ſolari directo illuſtratum applicanda annnotavi, in Experimentis autem idiomate patrio deſcriptis fuſius expoſui. Novi enim virum quendam illuſtrem iſtiusmodi microſcopium paraſſe & inſignes prorſus ejus

effectus, quos ego prædixeram, obſervaſſe. Qui adeo praxi operam navant, non modo ea, quæ de poliendis vitris, de conſtruendis teleſcopiis, microſcopiis aliisque technaſmatis larga manu traduntur, probe perpendere tenetur; ſed ut oculata ſit praxis, theoremata quoque de refractione luminis in lentibus opticis, præſertim de focis earundem, ſibi familiaria reddere debent, etſi demonſtrationes inſuper habeant. Clariſſime omnium ex Dioptrica perſpicitur, quam neceſſaria ſit theoria ad praxin, niſi hæc multa imperfectione laborare debeat, nec in eadem committendi errores, qui evitari poterant. Huc igitur velim animum advertant, qui theoriam comtemnere ſolent. Velim etiam ut ad hæc animum attendant, quorum eſt theoriam ad praxin aptare, ut ad hiſtoricam ejus cognitionem pateat aditus artis cultoribus ad praxin eandem applicaturis. Optandum enim foret, ut quis omnes theorias quantumvis profundas perluſtraret & quæ in arte uſui eſſe poſſunt excerpta ſine demonſtratione in uſum artis cultorum exponeret, experimentis confirmanda, ubi id absque multo apparatu ac ſumtu facile fieri poteſt. Quoniam tamen Geometræ in ſolvendis problematis phyſico-mathematicis quædam ſumunt, quæ quod non invita natura ſumantur non demonſtrant, atque adeo idem ipſis ſubinde accidit quod *Galilæo* circa reſiſtentiam ſolidorum, ut ex aſſumtis recte quidem colligant, quæ inde ſequuntur, hæc tamen ab experimento diſſentiant, quod illa naturæ rerum minime conveniant; ideo conſultum foret, ut in Phyſica veriori ſatis verſatus in hypotheſes Geometrarum accurate inquireret, ea, quæ certa ſunt, ab incertis aut prorſus falſis ſeparaturus, ne, dum praxin theoria perficiendi animus eſt, ea inculcentur, quæ eidem magis obſunt, quam proſunt, & artificum perſpicaciorum judicio, cum theoriam fallere videant, hæc tandem magis in contemtum adducatur, quam ut eidem aliquod pretium ſtatuatur. Etſi enim a particulari ad univerſale non valeat argumentatio, & præcipitantiæ in judicando tribuendum ſit, ſi quis ea utatur; hæc ipſa tamen præcipitantia tanto excuſatior eſt in-

arti-

artifice, qui quoad theoriam aliorum dictis habere debet fidem, conſequenter judicium ſuum determinare nequit niſi per notiones communes probabilitatis extrinſecæ.

§. 281. In Dioptrica explicatur viſio refracta, ac inprimis oſtenditur, quomodo refractio fiat in vitris politis. Quamobrem primo omnium loco inquirendum eſt in legem refractionis: quæ quomodo per experimenta eruatur, primo loco docendum duximus. Equidem hodie, poſtquam uſus teleſcopiorum & microſcopiorum invaluit, potiſſimum ratio habetur refractionis in vitro factæ; addidimus tamen etiam, quomodo ſeſe habeat in aqua & aëre, propterea quod in Phyſica major eſt utilitas legis refractionis in aqua & aëre, quam in vitro factæ. Quamvis vero etiam oſtenderimus, quomodo lex refractionis in genere per calculum analyticum eruatur; experimentis tamen ſuperſedere minime poſſumus, cum ratio ſinus anguli inclinationis ad ſinum anguli refracti, quæ per calculum conſtans eruitur, non eadem deprehendatur in omni diaphano. Qui ergo ad ſecundum gradum cognitionis adſpirant, ea, quæ de refractione in genere capite primo docentur, probe expendere debent, quoniam hinc pendet certitudo ceterorum omnium, quæ in Dioptrica demonſtrantur. Quod demonſtrationes dioptricas attinet, non uno modo eaſdem contexere licet. Etenim ſuppoſita lege refractionis per calculum trigonometricum erui poteſt, quomodo fiat refractio in vitro cujuslibet figuræ, veluti in vitris utrinque planis, plano convexis, plano concavis, utrinque convexis, utrinque concavis & concavo - convexis ſive meniſcis. Idem reperiri poteſt per calculum algebraicum. Poteſt denique etiam geometrice demonſtrari, quod tanquam jam inventum ſupponitur, per legem refractionis vi principiorum geometricorum, more veterum. Ut igitur diverſos hoſce demonſtrandi modos lectorem noſtrum doceremus, nunc ad calculum trigonometricum, nunc ad algebraicum, nunc vero ad demonſtrationes geometricas veteribus uſitatas recurrimus. In vitris politis, ex quibus tubi & mi-

croscopia componuntur, & quæ ad alia technasmata adhibentur, duplex occurrit refractio, altera, quæ fit in ingressu luminis ex aëre in vitrum; altera vero, quæ contingit in egressu ejusdem ex vitro in aërem, atque adeo refractio luminis in vitris politis composita est. Ut tamen ea facilius intelligatur, primo loco docemus, quomodo refractio simplex fiat in superficiebus tam planis, quam sphæricis cum cavis, tum convexis. Quodsi enim hæc principia fuerint cognita atque perspecta; haud difficile est per ea demonstrare refractionem duplicem, qualis in vitris politis occurrit. Enimvero quoniam nos principia dioptrica etiam usui esse volumus in explicandis aliis Naturæ phænomenis, theoremata generaliter demonstramus, ut ad quodlibet diaphanum applicari possint, modo ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum refracti in eodem diaphano per experientiam fuerit definita. Quia tamen in Dioptrica potissimum usui est refractio in vitro facta, & in Physica frequentiora sunt phænomena refractionis in aqua factæ; in corollariis theoremata de refractione in vitro & aqua facta exhibemus. Non diffiteor, theoriam dioptricam esse satis diffusam, si respicias usum, quem habent vitra polita in tubis opticis atque microscopiis, & aliis nonnullis technasmatis; sed quibus scientia, quæ sola certitudinem parit, curæ cordique est, illis non videretur nimis ampla, etiamsi praxis inde pendens multis adhuc arctioribus limitibus constringeretur. Quod vero subinde calculo algebraico usi fuerimus in demonstrandis theorematis dioptricis, non alio fine factum est, quam ut demonstrationes redderemus faciliores & theoriam contraheremus. Neque vero opus est ad demonstrationes algebraicas intelligendas, ut quis in studio Algebræ multum diuque fuerit versatus. Sufficit, si prima saltem rudimenta non ignoraverit, ut adeo nemo jure conqueri possit, quasi hoc nomine Dioptrica multis facta sit inaccessa. Vix enim hodie ferendum est, ut, qui Mathesin addiscere voluerit, Algebram prorsus intactam relinquat: quæ potius commendanda venit iis, qui theoriæ non multum temporis impendere possunt,

ſunt, eam tamen ignorare nolunt. Non exigua voluptate animum ſciendi cupidum demulcent demonſtrationes dioptricæ, ut adeo theoria nemini videri poſſit moleſta niſi ab omni ſciendi cupidine prorſus immuni. Notandum vero in Dioptrica non modo quæri, quomodo lumen refringatur in tranſitu per diaphana diverſæ denſitatis; verum etiam quomodo beneficio radii ſic refracti videatur viſibile: quod poſterius inprimis noſſe debemus, ubi phænomena tubi optici ac microſcopiorum aliaque viſionis refractæ demonſtrare voluerimus. Quamobrem in theoria quoque demonſtratur, quomodo appareat viſibile per radios refractos viſum. Unde lentium dioptricarum duplex eſt uſus, alter, dum lumine per ea tranſmiſſo utimur, alter vero, dum per eas viſibilia reſpicimus. Qui adeo utrumque uſum certo cognoſcere ſtudet, is etiam omnem theoriam cognitam atque perſpectam habere debet: neque enim theoriam dioptricam extendimus ultra uſum, quem in praxi habet.

§. 282. Refractio luminis & viſio refracta phænomena naturalia ſunt, quorum adeo rationes reddere tenetur Phyſicus. Ex Dioptrica phænomena particularia multo accuratius addiſci poſſunt, quam per obſervationes absque theoriæ Dioptricæ ſubſidio innoteſcunt. Et ſi experimenta capere volueris ad phænomena utraque venanda; theoria Dioptricæ eadem dirigit, ut accurate cognoſcantur. Quoniam in Phyſica phænomenorum rationes proximas ex aliis phænomenis reddimus; eo nomine Dioptrica ad ſcientiam naturalem plurimum affert adjumenti. Multa dantur naturæ phænomena, quæ a refractione luminis pendent. Eminent inter ea Meteora, quæ dicuntur, emphatica, quæ absque principiis Dioptricæ explicari nequeunt. Atque ea ratio eſt, cur ſubinde Mathematici de Meteoris emphaticis, veluti de Iride, halonibus, parrheliis & paraſelenis, in Dioptrica agant. Immo Dioptricæ theoria, ſi a teleſcopiis & aliis technaſmatibus dioptricis receſſeris, ad cognitionem naturæ mathematicam ſpectat. Quamobrem quæ paulo ante de eadem quoad Opticam

cam (§. 272) & Catoptricam (§. 276) monuimus; eadem quoque de Dioptrica tenenda ſunt. Quamobrem qui ad Naturæ cognitionem mathematicam adſpirant, iis quoque commendamus, ut omnem Dioptricæ theoriam attenta mente perluſtrent. Quodſi enim in Optica, Catoptrica & Dioptrica didicerint, quomodo Geometria & Algebra ad Naturæ phænomena ſint applicanda & quomodo cognitio mathematica differat a philoſophica, quidque ad perfectionem philoſophicæ conferat mathematica; ad altiora progredientes tanto minus difficultatis experientur. Extra omnem controverſiam eſt, prima cognitionis mathematicæ in Philoſophia naturali ſpecimina fuiſſe Optica, niſi forſan Aſtronomiam ipſis priorem agnoſcere volueris, quamvis noſtris demum temporibus, præſertim quod Dioptricam attinet, diſciplinæ opticæ magis fuerint excultæ, cum jam ſublimiora cognitionis naturæ mathematicæ exempla proſtarent. Quodſi ergo a diſciplinis opticis exordiaris, ubi cognitionis hujus ideam animo complecti volueris, deinceps magis amplificandam per ea, quæ in diſciplinis Mechanicis Tomo ſecundo Elementorum occurrunt; naturalem omnino dicendus es ſequi ordinem, quem tenuerunt primi inventores. Neque adeo dubitandum eſt, quod hoc pacto a facilioribus ad difficiliora continuo progreſſus multo intimius hanc cognitionis humanæ gradum inſpicias, quam ſi inverſo ordine, inſuper habitis primis inventis, ſtatim ad ſublimiora te conferas, ad quæ non patuit aditus niſi per faciliora inventoribus.

§. 283. Atque hoc ordine ſi progrediaris, haud parum quoque lucis affunditur ad tertium cognitionis gradum adſpiranti. Cum enim ad artem inveniendi exercendam certa quoque requiratur mentis habitudo, ea omnino omnium commodiſſime acquiritur eo modo, quo ſucceſſive in diverſis licet ſubjectis incrementa ſua cœpit. Sed de hoc ipſo plura mox nobis dicenda erunt, ubi de ſtudio Aſtronomiæ in uſum tertii gradus cognitionis agendum erit. Ceterum qui Dioptricam ea lege perluſtrare voluerit, quam pro acquirendo tertio cognitionis

gradu

gradu præscripsimus; is non inanem operam a se sumi ipso facto deprehendet. Probe notandum est artificium, quo lex refractionis analytice investigatur (§. 36 *Diopt.*), tum quod in argumento physico adhibeatur principium a causa finali desumtum, nimirum quod natura agat via brevissima, tum quod methodus de maximis & minimis ad problema physicum applicetur. Præterea considerandum, quod Mathesis requirat experimenta, si per ejus demonstrationes aliquid in Physica accurate determinandum. Etenim per analysin mathematicam ratio sinus anguli incidentiæ ad sinum anguli refracti indeterminata prodit, quæ per experimenta deinde in quolibet diaphano determinanda. Etsi autem *Keplerus* veram refractionis legem non fuerit assecutus, cum rationem constantem quæsiverit in angulis, non in eorum sinibus; non tamen propterea attentione indignum est principium *Keplerianum*, cum inde pateat, quomodo hypotheses vicarias in locum verarum Naturæ subinde surrogare liceat in cognitione mathematica, sive veras detegere non detur, sive eædem disquisitiones reddant molestiores, tum etiam quod inventum *Kepleri* ad veram legem refractionis inveniendam manuducere potuit *Snellium*, quatenus constans quædam ratio inter angulum incidentiæ & angulum refractionis observatur, quamdiu anguli sinibus physice propemodum proportionales sunt: id quod tanto facilius succedere potuit, quia in ipsa Trigonometria in simili casu angulorum ratio substituitur rationi sinuum (§. 23 *Trigon.*). Et non minus demonstrationes, quam analysis dioptrica loquuntur, ubi Geometria ad Physicam applicatur, non semper observandum esse rigorem Geometricum, ita ut lineæ v. gr. convergentes haberi possint pro parallelis & anguli quantitate parva differentes pro æqualibus: id quod convenit approximationibus in Mathesi pura & eandem cum hisce habet rationem. Quodsi singula eodem modo perlustrare velimus, quo in studio Algebræ explicando a nobis factum; multa artificia annotare licebit, quæ ad tertium cognitionis gradum faciunt. Sed nostrum jam non est in tantas ambages descendere,

dere, qui tantummodo monstramus viam, qua sit eundum. Non tamen nobis temperare possumus, quin unicum adhuc commemoremus. Nemo est qui nesciat, primam telescopii inventionem casui deberi; ejus autem perfectionem maxima ingenii vi & acumine summo a Mathematicis primi ordinis fuisse promotam. Fortuita telescopii inventio attento insinuat modum, quo in inveniendo casui obviam ire licet. Ac evidentissime hinc perspicitur, quod ea, in quæ casu incidimus, manum emendatricem & auxiliatricem expectent a scientia & arte inveniendi. Amplissimus sese hic aperit dicendi campus; sed eum ingredi prohibet instituti præsentis ratio. Quamvis autem in ipsis demonstrationibus dioptricis passim adhibuerimus calculum algebraicum distantiam foci a lente determinaturi; id ipsum tamen non obstitit, quo minus doceremus, quomodo eadem analytice investigetur, non modo ut usus Algebræ in Mathesi mixta doceatur, verum etiam ut præstantia ejus appareat, cum theoremata in anterioribus operose demonstrata, quamvis ope calculi analytici fuerint contractæ demonstrationes, mira facilitate ex formula generali eliciantur: id quod extra Mathesin usui esse potest in speciebus ex dato genere determinandis. Cur vero solutionem dederimus particularem, quæ Dioptricæ sufficit, non vero universalem, sive figuram medii refringentis, sive ejus densitatem spectes, quod tanto facilius fieri poterat, cum dudum prostent solutiones generales, nec eædem supponant, nisi quæ in Analysi a nobis fuerunt tradita; ex iis liquet, quæ in superioribus jam annotavimus, cur solutiones particulares universalibus prætulerimus in ipsa etiam Algebra, vel subinde universales nonnisi præmissis solutionibus in casu particulari subjunxerimus, ut adeo opus non sit hic repetere, quæ in anterioribus jam inculcata fuerunt. Ceterum hic quoque annotari poterat, quod, cum Dioptrica multis experimentis ansam præbeat, ars quoque experimentandi lucem quandam hinc expectare possit. Enimvero cum suo tempore, quando nos Ordo deducet ad experimentalem Philosophiam tradendam, ea de

re

re ex instituto sit agendum; eidem in præsenti immorari non debemus.

§. 284. Antequam vero hinc discedamus, non inconsultum ducimus unum adhuc moneri Dioptricæ lectorem ad tertium cognitionis gradum adspirantem. Trigonometriam planam pro parte Artis inveniendi venditare solemus, aut, si mavis, pro methodo particulari investigandi veritatem latentem (§. 142). Unde studium trigonometricum commendamus iis, qui artem inveniendi in genere acquirere volunt, non modo illis, qui ad tertium cognitionis gradum, in Mathesi adspirant (§. *cit.*). Non desunt, qui sibi persuadent, Trigonometriam ad artem inveniendi parum conferre, propterea quod per eam tantummodo computentur exempla, non vero veritates universales eruantur. Hi facillime confutantur per problemata in Dioptrica trigonometrice soluta: apparet enim per Trigonometriam eadem inveniri, quæ per Algebram eruuntur. Quamvis vero opinio ista satis refelli poterat per hoc, quod ipsæ solutiones trigonometricæ problematum sint veritates generales, quæ per applicationem Trigonometriæ inveniuntur, & harum demum applicatione computari exempla; multo tamen clarius idem patet in Dioptrica, ubi etiam per computum trigonometricum eruuntur theoremata universalia Dioptricæ. Accedit, quod usus quoque Trigonometriæ in Philosophia naturali per Dioptricam elucescat. Ita ex ejus applicatione ad experimenta innotescit, quomodo lex refractionis e. gr. in vitro detegatur, ut alia taceam.

## CAPUT VIII.

# DE Studio Sphæricorum & Trigometriæ Sphæricæ.

§. 285.

Trigonometria sphærica demonstrari nequit, nisi præmittantur principia sphæricorum, quæ etiam ante applicanda sunt ad Astronomiam sphæricam, quam calculo trigonometrico in eadem uti datur. Atque ea ratio est, cur Elementa sphæricorum cum Trigonometria sphærica conjunxerimus. Quamobrem qui cognitionis gradum secundum intendit, elementa quoque sphæricorum attenta mente perlustrare tenetur, antequam ad problemata Trigonometriæ sphæricæ accedat. Quoniam demonstrationes syntheticæ sunt, quales in Geometria elementari occurrunt; eodem quoque modo expendendæ, quo demonstrationes Geometriæ elementaris resolvere docuimus. Quamobrem iis, qui methodum demonstrandi veterum sibi familiarem reddere volunt, & demonstrationis legitimæ ideam exemplarem, quam imitentur extra Mathesin, majore luce perfundere gestiunt, lectionem quoque Elementorum sphæricorum commendamus, si vel maxime Trigonometriam sphæricam attingere noluerint. Sunt dubio procul Sphæricorum elementa pars Geometriæ, si non elementaris, certe sublimioris, quæ de lineis curvis agit, quarum etiam in numero sunt circuli in superficie sphæræ descripti. Mallem tamen eadem referre ad Geometriam elementarem, quia in hac non minus locum habet circulus, quam sphæra. Sed ea de re cum nemine serram contentionis reciprocabimus: sufficit demonstrationes non esse difficiliores demonstrationibus Geometriæ elementaris, ex cujus etiam principiis contexuntur, nisi forsan imaginatio hinc inde minus

nus exercitatis negotium aliquod facessat, quod tamen evanescit, ubi figuris in plano delineatis substituas globum, in cujus superficie circuli debito modo sunt descripti. Et ut hoc faciant tyrones, omnino suaserim, præsertim illi, quibus molestum accidit horum Elementorum studium, ne ejus fiant desertores. Philosophis vero hinc discere licet, quænam differentia intercedat, si imaginatio juvet, non turbet operationes intellectus.

§.286 Quodsi igitur quis nonnisi calculum trigonometricum sibi familiarem reddere voluerit; is ex problemate primo §. 114 regulam catholicam de triangulis rectangulis probe perpendat, utque eandem intelligat, definitiones 9, 10 & 11 cum suis corollariis expendat & quomodo ad omnes casus applicetur ex §. 116 *& seqq.* addiscat. Si numeri tantummodo varientur, exempla plura comminisci licet. Hæc calculi exercitia continuanda sunt, donec regulam catholicam in dato quocunque casu dextre applicare possit. Qui experiri voluerit, quantum Trigonometria sphærica per regulam catholicam facilitetur; eadem problemata more communi resolvat, quemadmodum in libellis aliis Trigonometriæ sphæricæ aut in Introductione ad Tabulas sinuum atque Tangentium docetur. Ubi solutio Triangulorum rectangulorum nihil amplius difficultatis facessit; addenda sunt problemata 20 *& seqq.* §. 158 *& seqq.* circa quæ eadem observanda, quæ de resolutione triangulorum rectangulornm monuimus. Nullus dubito fore, ut calculus trigonometricus absque ullo tædio addiscatur, nec majorem in eo difficultatem sentias, quam in Trigonometria plana. Quoniam multos a studio Astronomiæ practicæ abhorrere expertus sum; quod tædia calculi Trigonometriæ sphæricæ devorare cogerentur: omnem quoque operam navavi, ut Trigonometriam sphæricam redderem facilem quoad praxin, etsi theoria sit multo profundior, quam Trigonometriæ planæ.

§.287. Trigonometriæ sphæricæ demonstrationes non modo supponunt theoremata sphærica seu sphæricorum theoriam; sed

propriam quoque theoriam habet, qua nituntur reſolutiones problematum. Nimirum quemadmodum Trigonometria plana nititur theoria triangulorum planorum ſeu rectilineorum in plano deſcriptorum, quæ traditur in Geometria elementari; ita quoque Trigonometria ſphærica pendet a theoria triangulorum ſphæricorum ſeu eorum, quorum latera ſunt arcus circulorum maximorum in ſuperficie ſphæræ deſcriptorum. Eam cum alibi ſupponere non potuerimus, in ipſa Trigonometria ſphærica tradere debuimus, quemadmodum theoria triangulorum planorum in Trigonometria plana explicanda eſſet, niſi jam in Geometria elementari expoſita fuiſſet. Quodſi dicas, theoriam triangulorum ſphæricorum eſſe partem Elementorum Sphæricorum, quemadmodum theoria planorum eſt pars Geometriæ planæ; mihi perinde erit, ſive eam a Trigonometria ſphærica ſepares eandemque tibi familiarem reddas, antequam ad hanc accedis, ſive ipſam demum cum problematis, quorum ſolutiones inde pendent, addiſcas, quamvis hoc poſterius mihi videatur commodius minusque moleſtum, cum ſic theoriæ ſtatim pateat uſus, nec difficilis præmittenda ſit praxi faciliori. Theoriam autem Sphæricorum & Trigonometriæ ſphæricæ plurimum commendamus iis, qui in Aſtronomia non modo ad ſecundum cognitionis gradum, verum etiam ad ipſum tertium adſpirant, conſequenter omnibus, qui intellectus perficiendi gratia ad Matheſin addiſcendam accedunt. Cum demonſtrationes ſingulas eadem forma exhibuerimus, qua conſpiciuntur in Geometria elementari, niſi quod nonnullæ in theoria Trigonometriæ ſint prolixæ; ſi noſtro more reſolvantur, nihil difficultatis faceſſent, ut eadem deterreatur, qui a Geometria elementari ad ſphæricam Trigonometriam ſtatim accedit. Quodſi enim cuidam viſum fuerit, neglecta Algebra & ceteris Matheſeos mixtæ partibus, pergere in demonſtrationibus Matheſeos puræ methodo veterum conditis, ut hanc magis ſubjiciat poteſtati ſuæ, nec ante ad analyticam recentiorum accedat, quam ubi ſyntheticæ veterum fuerit ſatis compos; is a Geometria

Elementari & Trigonometria plana ſtatim pedem promovere poteſt ad Elementa Sphæricorum & Trigonometriam ſphæricam, cum nec hic ſupponantur principia, niſi quæ ex Trigometria plana & Geometria elementari hauſiſti, nec alia demonſtrandi methodus, quam qua ibidem uſi ſumus, ita ut ſubjunctis Geometriæ elementari Sphæricorum elementis Trigonometriam Sphæricam cum plana conjungere licuiſſet, quemadmodum vulgo a Trigomometriæ Scriptoribus fieri ſolet.

§. 288. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, iis ſtudium Elementorum ſphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ commendandum. Etenim ſine principiis Sphæricis & Trigonometria ſphærica nihil reperire licuit in Aſtronomia ſphærica, multa etiam in Geographia ab hiſce principiis pendent. Ipſemet expertus fui, cum ſtudium Aſtronomiæ mihi videretur perplexum, ac tædioſum eſſet reſolutiones problematum primi mobilis ex Autoribus petere, principiis ſphæricis perſpectis nullo negotio per me ipſum eas fuiſſe conſecutum, & beneficio illorum principiorum eas extemplo reperire potuiſſe, quando de iisdem cogitandum erat, etſi eas memoria non comprehendiſſem. Quamobrem ſi in Aſtronomia & Geographia perſpicere volueris, quomodo reſolutiones problematum fuerint detectæ; principia Sphærica probe perſpecta eſſe debent. Vi Trigonometriæ autem ſphæricæ patet illatio, qua opus eſt, ut in caſu particulari dato computatio legitime fiat, ope principiorum ſphæricorum triangulis & in iisdem datis detectis. Circuli, qui concipiuntur terminati in ſuperficie ſphæræ, oriuntur ex ſectionibus ſphæræ, quas omnes eſſe circulos theoremate 1. §. 13 demonſtratur. Differt adeo Sphærica a Geometria plana, in qua circuli ſe mutuo ſecantes in eodem ſunt plano, cum hic in diverſis ſint planis, omnes tamen terminentur in eadem ſuperficie ſphæræ. Unde facile patet, alium hic requiri uſum facultatum cognoſcendi, quam in Geometria plana. Qui vero tertium cognitionis gradum acquirere ſtudet, is utique diſtincte cognoſcere tenetur uſum

sum facultatum cognoscendi in veritate investiganda requisitum, consequenter ubi novus quidam usus emergit, ad eundem animum attendere debet, ne attentioni suæ sese subducat. Talia autem inprimis scrutari debet, qui artem inveniendi distincte cognoscere avet, & Mathesi quoque in usum Philosophiæ operam navat, ejusque studio intellectum perficere studet, consequenter promptum facultatum cognoscendi usum consequi conatur, quem habere possunt. Etsi autem intra cancellos, quos præfixit præsentis instituti ratio, nos continentes ad particularia non descendamus; non possumus tamen non excitare attentionem lectoris sciendi cupidi ad artificium, quo regula catholica Trigonometriæ sphæricæ fuit eruta, præsertim cum singula huc spectantia satis distincte explicaverimus & demonstrata dederimus. Elucet enim ex eo usus prorsus singularis fictionum ad formandos conceptus universales, sub quibus comprehenduntur, quæ propter intrinsecam diversitatem ad commune quoddam genus seu universalem quandam notionem reduci minime posse videbantur. Etsi enim hujus artificii jam mentionem quandam injecerimus in Analysi; singularis tamen prorsus hic occurrit applicatio, ut aliam prorsus formam induat. Regulam catholicam non alio fine investigavimus, quam ut memoriæ succurreretur, regularum multitudine non obruendæ, & ut omnis applicatio Trigonometriæ secum ferat sensum certitudinis manifestiorem. Habemus igitur hic, quod imitemur in aliis disciplinis practicis, ad praxin omnem facilitandam. Quamvis enim dentur artificia adhuc alia, quibus idem præstari potest, nec semper recurrendum sit ad fictiones; sufficit tamen hoc exemplo nos moneri, cogitandum quoque esse in Disciplinis practicis de praxi per regulas catholicas facilitanda, immo & de theoria multiplici ad notiones universales reducenda, ut facilior evadat ejus ad humana negotia applicatio. Maximæ hoc ipsum utilitatis est, cum non omnium sit theoriam, quæ multitudine regularum abundat, ita memoriæ infigere, ut singulæ veluti sua sponte præsentes sistantur intellectui, quoties usus eas re-

requirit, cum tamen ad recte agendum illis carere nequeamus. Mirabuntur forsan nonnulli, qui, cum Mathesin sibi soli discant, ad alia, quæ extra eam sunt, animum non divertunt, nos studium Matheseos explicaturos talia proferre, quæ cum eo nihil commune habere videntur. Enimvero qui animo recoluerit, quæ supra de studio Matheseos intellectus perficiendi gratia instituendo in medium attulimus & cum eodem studium Philosophiæ verioris, quam in operibus nostris tradimus, conjunxerit, non habebit amplius quod miretur, utilitatem eorum, quæ hinc inde commendantur, reipsa experturus.

§.289. Trigonometriam sphæricam non explicamus nisi in usum Astronomiæ & Geographiæ. Quamobrem non plura tradimus, quam quæ huic fini satisfaciunt. Et quoniam Trigonometria sphærica demonstrari nequit, nisi suppositis principiis sphæricis, nec applicari in Astronomia & Geographia nisi mediantibus his ipsis principiis; nec ex hisce addidimus, nisi quæ huic scopo sufficiunt. Etsi itaque Algebra ad doctrinam quoquæ sphæricorum & Trigonometriam sphæricam applicari possit; usum tamen Algebræ in hac Matheseos parte prætermisimus, cum unice propositum nobis fuerit praxin Trigonometriæ sphæricæ reddere faciliorem. Ne tamen quis existimet, eum vel esse nullum, vel adeo difficilem, ut hactenus detegi non potuerit; provoco ad exempla, quæ dedit *Jacobus Kresa* e Societate Jesu in Analysi speciosa Trigonometriæ sphæricæ, primo mobili &c. applicata, & ad hisce illustriora, quæ extant in Commentariis Academiæ Imperialis Petropolitanæ. Problemata primi mobilis per Algebram soluta si ad Geometriam puram reducuntur non sunt nisi problemata sphærica. Geometræ sane de Sphærica nunquam cogitassent, nisi problemata primi mobilis in Astronomia de ea cogitandi ansam dedissent. Neque dubium est, initio hanc Geometriæ partem ab Astronomia sphærica non fuisse separatam, quemadmodum & ipsa Trigonometria non tradebatur nisi in Astronomia.

# CAPUT IX.

De

# Studio Aſtronomiæ.

§. 290

Studium Aſtronomiæ multis ſeſe nominibus commendat omnibus, qui ad ſolidam rerum cognitionem adſpirant, five ſecundum cognitionis gradum, ſive tertium intendant, & inprimis ſi quis intellectus perſiciendi gratia Matheſi operam navet ac ad ſcientiam naturalem excolendam animum appellere velit, immo ſi ſtudio Medico ſeſe mancipandi animum habuerit. Diverſi admodum ſunt fines, cur quis ad ſtudium Aſtronomiæ accedit. Quare nec omnibus eodem modo in eodem verſandum, cum diverſos fines non eodem modo conſequi detur. Noſtrum igitur eſt docere, quid unicuique faciendum, ut finem a ſe intentum conſequatur.

§. 291. Sunt qui curioſitatis tantummodo gratia Aſtronomiam addiſcendam eſſe ſibi perſuadent, cui tanto magis ſatisfaciendum exiſtimant, ne ignorent ea, quæ in Calendariis extant, non decere virum eruditum arbitrati, ut Calendarium quotidie in manu habeat, non tamen intelligat, quæ in eodem traduntur. Sunt alii, qui iſtis oculatiores longius proſpiciunt, & adoleſcentibus ob curioſitatem commendant ſtudium aſtronomicum, ut eadem excitetur ſciendi cupiditas & magis magisque inflammetur. Sane non alio fine in Scholis introductus eſt *Joannis de Sacro Buſco* libellus de ſphæra, cui deinceps alii ſubſtituere alios libellos uſum Globorum & computum eccleſiaſticum exponentes. Etſi enim ea fini etiam Theoricas Planetarum conſignaverit *Purbachius*; cum tamen Theorica magis conducere viſa iis, qui ex inſtituto Aſtronomiæ operam navaturi ſunt, quam promiſcue omnibus, & ipſe *Purbachius* potiſſimum intenderit, ut ad ſtudium aſtronomicum fere neglectum ac deſertum aditum aperiret & animos

juve-

juvenum ad idem perſequendum accenderet; Theorica ex ſcholis proſcripta in Academias relegata, ubi præter Profeſſorem Mathematum inferiorum, qui Matheſin puram cum Geometria practica & Staticæ elementis interpretari debebat, etiam conſtitutus Profeſſor Mathematum Superiorum, qui Aſtronomiam cum Geographia, Chronologia, Gnomonica & Aſtrologia doceret. Unde hodienum in Academia Wittebergenſi & Hafnienſi duo ſunt Mathematum Profeſſores, alter Mathematum inferiorum, alter ſuperiorum. In Scholis itaque inferioribus, in quibus adoleſcentes ad lectiones academicas præparandi, ſufficere viſum, ſi Aſtronomiæ ſphæricæ & computi eccleſiaſtici prægustum quendam haberent, & figuras geometricas conſtruere addiſcerent. Unde memini in Gymnaſiis quoque patriis, Vratislavienſibus ſcilicet, cum ego adoleſcens Magdalenæum frequentarem, Profeſſorem Matheſeos nonniſi conſtructiones figurarum cum definitionibus Geometriæ elementaris, uſum Globorum & computum eccleſiaſticum docuiſſe. Et quamvis inſigni cupiditate methodum mathematicam cognoſcendi jam tum flagrarem, nec minor eſſet Algebræ addiſcendæ ardor, quod illa certam acquiri poſſe cognitionem, cui contradicere nemo auſit, hac vero proprio Marte veritates incognitas inveſtigari audiviſſem; nemo tamen erat, qui ſitim meam reſtinguere valeret, immo non deerant, qui ſtudium Matheſeos diſſuaderent, aut ſaltem affirmarent, me ejus auxilio non conſecuturum, quod ſperabam. Ego vero nunquam ab ea opinione me dimoveri paſſus ſum, cujus quidem rationes hic exponi nil attinet.

§. 292. Qui adeo ſolius curioſitatis gratia Aſtronomiam addiſcere volunt, iis ſufficit hiſtorica veritatum præcipuarum cognitio. Nimirum primo ipſis legenda ſunt, quæ capite primo Aſtronomiæ ſphæricæ quoad obſervationes communes & principia inde ſtabilita traduntur. Neque enim integro hoc capite continetur quidpiam, quod captum Mathematum imperiti excedat, & quocunque quis animo ad Aſtronomiam accedat, ea

ignorare non debet, quæ in eodem continentur. Deinde ex ſecundo capite, quod de circulis ſphæræ mundanæ agit, definitiones circulorum & aliorum nonnullorum ad eos ſpectantium ſibi familiares reddat, omiſſis ceteris omnibus: In capite vero quarto legat ſcholia probl. 16. §. 244. *& ſeqq.* quæ de catalogo fixarum & aſteriſmis ac magnitudine apparente illarum loquntur. Addi poſſunt hinc inde ſcholia quædam alia, quæ utrum contineant, nec ne, quod videatur notatu dignum, quilibet facile per ſeipſum judicabit. Hinc ſtatim accedat ad caput ſextum, in quo conſtructio & uſus Globi cœleſtis in ipſius potiſſimum uſum docetur. Neque male ſibi conſulet, ſi in capite ſeptimo perlegat de refractione & parallaxi, quæ in definitionibus & ſcholiis habentur & ſub rubrica obſervationum reperiuntur: id quod etiam intelligendum de crepuſculis, quibus deſtinatur caput 8. ſeu ultimum Aſtronomiæ ſphæricæ. Et hæc ſatis faciunt etiam adoleſcentibus ad ſtudium Aſtronomiæ præparandis quoad partem ſphæricam. In parte Theorica iis, qui ſolius curioſitatis gratia Aſtronomiam addiſcunt, commendanda ſunt capita tria priora de natura Solis ac Lunæ ceterorumque Planetarum & mundi ſyſtemate, ſi pauca quædam problemata excipias, quæ prætermitti poſſunt. Poterunt etiam prætermitti theoremata, quæ in uſum ſyſtematis mundani evincendi proponuntur §. 571 & ſeqq. Sufficit enim ut ſaltem theorema 27. §. 612 & theorema 28. §. 630 cum ſubjectis ſcholiis legat, demonſtratione prioris inſuper habita. De Theoria Planetarum, quæ capite quarto traditur, non plura cognoſcere tenetur quam hypotheſin: non tamen prorſus inconſultum eſt, ut addat definitiones, quarum in Theorica uſus, propterea quod hi termini in Calendariis quoque occurrunt, quæ intelligere vult curioſitatis gratia Aſtronomiæ operam aliquam impendens. Quod ad Lunam attinet, præter definitiones & obſervationes a §. 816 usque 822 non eſt, quod curioſus tantummodo lector attingere teneatur. Et ex capite ſexto tantummodo diſtantias planetarum a Terra

ex §. 906 earumque magnitudines ex §. 922 haurire debet. De adspectibus capite septimo sufficiunt eidem definitiones §. 926 – 935 cum definitionibus eclipsium §. 937 & §. 982. Denique ex capite ultimo de stellis fixis & novis atque Cometis sufficiunt theoremata absque demonstrationibus & observationes, omissis vero problematis. Ea abunde satisfaciunt, ut de rebus astronomicis verba facere possit, quando occasio tulerit in sermone communi, & intelligere, quæ in Calendariis de iisdem habentur.

§. 293. Quodsi quis cognitionem historicam Astronomiæ accuratiorem desiderat, is omnia, omissis demonstrationibus, ea industria perlegere debet, quam pro primo cognitionis gradu præscripsimus. Quodsi tamen praxin non curat, nec opus esse videtur, ut singula problemata perlustret. Abunde sufficit, si theoriam planetarum primariorum perspectam habeat & calculi eclipsium ideam aliquam animo concipiat. Permittendum adeo est unicuique, quo usque ipsum trahat sua voluptas. Vix enim alius finis intendi potest, quam ut notitia rerum astronomicarum animum delectet. Quoniam itaque sola voluptas mensura est eorum, quæ addiscenda sunt, uniuscujusque omnino relinquendum est judicio, quantum eidem satisfaciat. Quemadmodum illam suo quisque modulo metiri debet, nec ex se judicare licet alios; ita quoque determinari nequit, quænam unicuique conducant.

§. 294. Cognitio Astronomiæ historica quod partem sphæricam facilitatur continuo usu Globi cœlestis, qui semper ad manus esse debet. Etenim definitiones multo facilius intelliguntur, si ea, quæ declarant, in superficie Globi repræsententur, cum imaginatio nihil amplius facessat negotii ob consensum ejus cum sensu seu visu. Si schemata in plano delineantur, quemadmodum fieri solet & a nobis quoque factum est; sensus non revera exhibet, quod repræsentare debebat, sed saltem dirigit imaginationem, ut vi vocabulorum, quæ in definitione continentur, sibi formet ideam ejus, quod cognosci debet. Sumamus

mamus exemplum facile, ut quæ dicuntur recte intelligantur. Declinationem ſtellæ definimus per diſtantiam ejus ab æquatore. Cumque diſtantiam a circulo maximo eſſe oſtenderimus arcum circuli maximi inter duo puncta in ſuperficie ſphæræ intercepti & ad circulum maximum perpendicularem (§. 76 *Sphæric.*); ideam declinationis formaturi imaginari debemus circulum maximum in ſuperficie ſphæræ, qui per centrum ſtellæ ſeu punctum in ſphæræ ſuperficie datum & per æquatorem tranſit, & hunc ad angulos rectos ſecat. Quamobrem cum porro conſtet (§.28 *Sphær.*), hunc circulum tranſire debere per polos æquatoris, quos eosdem eſſe cum polis mundi conſtat (§. 48 *Aſtron.*); nobis imaginari debemus ſphæram cavam, in cujus centro oculus collocatus, & in eadem duos polos, circa quos vertitur, una cum æquatore intervallo quadrantis in ſuperficie ſphæræ deſcripto & circulo tranſeunte per polos & ſtellam, ſeu punctum in ſuperficie datum tranſeunte, qui ſecat æquatorem. Ita enim demum idea repræſentabit declinationem. In plano *Tab. I. Fig.* 3. circulus NAZQ repræſentat ſphæram mundanam, puncta P & K polos mundi diametraliter oppoſitos, AQ æquatorem ex altera hemiſphærii parte, in qua ſumitur ſtella S ſive punctum quodcunque datum. PSK repræſentat circulum, qui per polos mundi P & K atque punctum datum S tranſit in eadem hemiſphærii parte & æquatorem in G ſecat. Unde arcus circuli maximi GS repræſentat Declinationem ſtellæ ſeu puncti S. Hinc liquet, quomodo definitiones primum explicandæ ſint per figuras in plano delineatas. Enimvero cum idea hujus ſchematis non ſit ea, quæ rem ipſam, prouti concipitur, repræſentat, ſed vicariam ſaltem operam præſtet; imaginationis eſt eam transformare in ideam veram. Loco igitur circuli APQNA nobis imaginamur ſphæram cavam, in cujus centro oculus conſtitutus, in ejus ſuperficie imaginamur porro duos polos P & K ſibi diametraliter oppoſitos & æquatorem ab utroque polo undiquaque eodem intervallo diſtantem, tandemque circulum alium per ſtellam in eadem ſuperficie

ficie ſumtam & duos polos transeuntem, qui neceſſario æquatorem ſecat. Atque ita demum imaginatio veluti viſui percipiendam exhibet declinationem SG. Nemo non videt non ſine exercitio vim iſtam acquiri, quæ imaginationi ad iſtam transformationem idearum ſufficit, immo ipſam imaginationis vim jam extendendam eſſe, ut ſatis clare repræſentet quod percipiendum. Enimvero ſi globus fuerit ad manus, cum in ejus ſuperficie deſignati ſint poli & æquator deſcriptus ac præterea Meridianus circulus per polos mundi tranſiens, ſub quo ob ejus volubilitatem circapolos & ſitumMeridiani fixum quodvis ſuperficiei punctum pro arbitrio conſtitui poteſt; non alia re opus eſt, quam ut ſtella conſtituatur ſub Meridiano, ita enim ejus arcus inter eandem & æquatorem interceptus repræſentat declinationem, qualem imaginatio percipiendam exhibere debet. Atque ita ſenſus cum eadem conſentit. Non eſt quod excipias, Globum exhibere in ſuperficie convexa, quod imaginatio transferre debet in concavam, conſequenter nec hic ſenſum cum imaginatione conſentire. Etenim quis non videt, cum non neceſſarium ſit ut oculus collocetur in centro ſphæræ, fingi poſſe quod is extra ſphæram collocetur? quod ubi imaginamur, imaginatio a ſenſu non diſſentit. Quodſi vero imaginationis vi ipſam ſphæram mundanam repræſentare velis, qualis nobis apparet, dum noctu cœlum ſtellis ſuperbiens contuemur; multo jam facilius accidit ea, quæ oculo extra ſphæram mundanam per fictionem conſtituto apparent, eidem in centrum ſphæræ retracto tanquam in concava percipienda exhibere.

§. 295. Non dubito fore haud paucos, qui nodum in ſcirpo quæri exiſtimaturi ſunt, & ſine iſtiusmodi ſcrupuloſitate Aſtronomiæ cognitionem hiſtoricam acquiri poſſe tanto confidentius ſibi aliisque perſuaderi conabuntur, quod experientia teſtetur ex ſchematiſmis in plano delineatis ſatis intelligi absque ulla opera, quæ per definitiones explicantur & in reſolutionibus problematum præcipiuntur. Enimvero quis vitio vertet Philoſopho, quod diſtincte explicet uſum

usum facultatum, quem alii de eodem parum cogitantes faciunt, præsertim eo fine, ut simul ostendat, quomodo usum istum facilitare liceat? Homines & animalia moventur absque cognitione regularum Saticæ, nec norunt, quem faciant eorundem usum, dum easdem inviolabiliter observant. Ecquis vero reprehendit *Borellum*, quod in egregio opere de motu animalium ex regulis Staticæ eundem demonstrandum sibi sumserit? Si quis fuerit Astronomus, qui in Psychologia simul versatus, ut acumine suo discernere possit, quæ modificationibus animæ insunt; is utique agnoscet vera esse, quæ de idea vi imaginationis formanda ad clare percipienda, quæ in Astronomia sphærica docentur, in medium attulimus (§. 294).

§. 296. Quemadmodum vero illam idearum transformationem juvat præter Globum coelestem sphæra etiam armillaris; ita non inutile foret, si ad similem usum in parte Astronomiæ sphærica obtinendum adhiberentur Instrumenta levi sumtu parabilia, quibus phænomena motus secundi apte repræsentarentur, non quidem ea accuratione, ut calculi vicem subire possent, sed quantum sufficit, ut motus secundus seu proprius distincta notione comprehendatur. Intendebat hoc *Purbachius* cum suis Theoricis Planetarum: sed cum Astronomiæ parte theorica per *Copernicum* inprimis ac *Keplerum* reformata nullus amplius illarum sit usus, alia prorsus forma fieri hodie deberent instrumenta ad motus secundi phænomena eodem modo repræsentanda, quo ope Globi artificialis repræsentantur phænomena motus primi. Equidem non ignoro, non defuisse aliquos, qui de motu secundo Planetarum organice repræsentando cogitarunt; sed desunt instrumenta, quæ ad communem discentium usum adhiberi possent. Neque vero negandum est in Theoricis defectum istiusmodi instrumentorum esse tolerabiliorem quam in sphæricis, quia per schemata in plano descripta non adeo confunditur imaginatio, quam in sphærica, & quod ad Theoricam demum accedas sphærica absoluta, consequenter ubi notionibus astronomicis jam adsuetus animus.

§. 297.

§. 297. Qui propter praxin Aſtronomiæ operam navant, cum ea varia ſit, nec omnes eodem modo in ea verſari debent. Conſtat ad praxin Aſtronomiæ facilitandam conditas eſſe Tabulas tam primi mobilis, quam motus Planetarum. Illarum uſus eſt in parte ſphærica; harum vero in Theorica. Quibus adeo calculus aſtronomicus curæ cordique eſt, illi uſum Tabularum multiplici computatione ſibi familiarem reddere tenentur. Præfiguntur Tabulis præcepta calculi, quæ non in omnibus ſunt prorſus eadem. Quamobrem ut ea intelligantur, cognitio ſaltem hiſtorica ex Elementis Aſtronomiæ præmittenda. Quo accuratior hæc fuerit, eo melior. Equidem fieri poteſt, ut calculum aſtronomicum juxta Tabulas abſolvat, qui terminos tantummodo cognitos atque perſpectos habet; ſed in tenebris quaſi verſatur, qui nihil prorſus rationis regularum perſpicit. Suadendum igitur eſt, ut theoriæ tam ſphæricæ, quam theoricæ cognitione hiſtorica animum imbuas, antequam ad calculum accedas. Dedimus ipſimet præcepta calculi aſtronomici, eademque exemplis illuſtravimus. Quamobrem qui ad hanc praxin adſpirat, ad ea animum advertere tenetur. Exemplorum typum ita repræſentavimus, ut ideam exemplarem calculi animo ingenerare poſſit, quæ regularum vicem tueri poteſt, ubi plura exempla computaveris & eadem forma calculum deſcripſeris. Antequam autem ſatis exercitatus fueris, ut tibi fidere poſſis, quod nulla ex parte aberraveris; exempla computanda ſunt, quæ in Ephemeridibus habentur, ut cum iis conferre queas, quæ calculus tuus prodit.

§. 298. Tabulæ aſtronomicæ non alio fine conduntur, quam ut calculus reddatur facilior & brevior. Computantur autem ex obſervationibus calculo geometrico, aut, ſi mavis trigonometrico. Quamobrem Tabularum conditoribus calculus geometricus perſpectus eſſe debet. Formam quoque hujus calculi cognoſcere tenetur, quicunque ſolidam Aſtronomiæ ſcientiam acquirere debet. Nos in Elementis noſtris hunc calculum non modo regulis perſpicue ac diſtincte propoſitis comprehendimus;

verum etiam exemplis illuſtravimus & typum calculi ita exhibuimus, ut in praxi commode regularum vice fungatur, ipſeque calculus prolixus ab omni perplexitate & moleſtia liberetur. Uſi nimirum hic ſumus eodem artificio, quo calculum algebraicum facilitare ſtuduimus. Quamobrem ſi quis præcepta calculi cum typo conferat; non habebit, quod conqueratur de obſcuritate, ſed plena luce fruetur in iis intelligendis, modo in Trigonometria fuerit verſatus, cujus problemata familiaria ſupponuntur, nec ignoret terminos, quos ex definitionibus perſpectos habere debet. Neque enim accedendum eſt ad calculum geometricum, niſi intellectis terminis aſtronomicis & Trigonometriæ tam ſphæricæ, quam planæ praxi in poteſtatem ſuam redacta. Si quis numeros datos variaverit, in aliis exemplis calculi typum imitaturus; is non modo habitum computandi ſibi comparabit, verum etiam ideam calculi exemplarem memoriæ infiget, ope ſchematis delineati in memoriam facile revocandam, quoties calculo iſto utendum. Atque hoc ipſo obtinetur, ut non modo moleſtia omnis a calculo aſtronomico arceatur, ſed etiam ut animo placido, nec perturbato ſanguinis circulo calculos continues per tantum temporis ſpatium, quantum libuerit, modo tibi non moleſtum accidat tempus calculis fallere, quod ſcientiæ amplificandæ impendere malles. Neque enim tædia ex diverſo fonte pullulantia pro diverſitate inclinationum naturalium, quibus natura homines a ſe invicem differre voluit, in unum confundenda errore manifeſto iis, qui in Pſychologia cum laude ſunt verſati. Quodſi vero præcepta calculi, quæ numeris ſuis diſtincta ſigillatim exhibuimus, tranquillo animo lente *feſtinans* perpendas; formæ calculi notionem diſtinctam conſequeris uſus regulis, quas in Logica pro acquirenda notione diſtincta præſcripſimus, etiamſi illas nunquam didiceris, nec, dum juxta eas determinas facultatum cognoſcendi uſum, earum tibi conſcius fueris. Quantum hoc conducat ad perficiendum intellectum, ut etiam extra Matheſin diſtincte concipere adſueſcas, quæ meditaris, & ordine in meditan-

ditando cogitationes tuas promoveas; nunc demonstrare nolo, etsi demonstratio ex Psychologiæ ac Logicæ principiis dari poterat, utpote assensum non nisi eorum extorsura, qui Metaphysicæ, prouti a nobis tradita, jam operam debitam navarunt. Sufficit monuisse, quod credendum sit experto, & oculata futura sit fides singulis, quotquot consilio nostro aurem benignam præbere non dedignati fuerint. Qui Astronomiam non sibi discunt, sed intellectus perficiendi gratia eidem incumbunt, id quod faciendum plurimis, cum paucis admodum Astronomis opus habeat genus humanum; illis formam calculi animo concepisse sufficit, nec opus est, ut in eodem sint exercitati. Quatenus tamen exempla lucem affundunt præceptis, non inconsultum est, ut unicum saltem, quod exhibuimus, exemplum computent, singulis præceptis ad idem applicatis, præsertim cum etiam extra Mathesin, in Philosophia præsertim practica, magna sit exemplorum vis, quemadmodum in parte altera Philosophiæ practicæ universalis demonstravimus, atque adeo utile sit ad Philosophiam animum appellenti præcepta ad exempla dextre ac expedite applicare. Ecce igitur tibi usum universalem eumque maximi faciendum, ob quem hæc pars studii astronomici promiscue commendari meretur omnibus, quos solida rerum cognitio juvat, etsi ætatem omnem in calculis astronomicis consumere nolint, immo etsi futurum vitæ genus minime ferat, ut notitiam multo labore acquisitam conservent. Quoniam enim ea conservari hoc non obstante potest intellectus habitudo, quam hoc studio acquisivisti; non est quod conquareris, te in spem futuræ oblivionis discendo ea, quæ tibi nulli usui sunt, tempus inutiliter consumsisse.

§. 299. Peculiaris quoque praxis astronomica est phænomena siderum observandi, omnis praxeos reliquæ basis. Ex observationibus enim calculo geometrico eruuntur, quæ in Astronomia scire intendimus, nec absque iis calculi hujus beneficio conduntur Tabulæ, quarum in praxi tam commodus est usus. Immo absque observationibus non licet perficere Tabulas, ut

major sit earum cum cœlo consensus. Ne igitur hac in parte quoque deessemus, modum quoque observandi exposuimus, ut aliquam ejus ideam animo concipere detur. Nemo autem a nobis requisiverit, ut omnia minutissime persequamur, quæ ad dexteritatem in observando faciunt. Quodsi enim quis observatorem agere voluerit, is non modo intellectis iis, quæ a nobis traduntur, legat Autores supra commemoratos, cum scripta Astronomorum recenseremus; verum etiam in observatorio aliquo celebri, quale est Parisinum in Gallia & Grenovicense in Anglia, per aliquod tempus commoretur, ut, quæ ad observandi dexteritatem faciunt, ab Observatoribus exercitatis addiscat. Quamvis enim impossibile non sit, ut eandem multo exercitio per se assequatur, si in observando sedulus ac continuus sit; facilius tamen longe accidit, ubi alios præeuntes imitamur, quam si demum multa circumspectione ipsimet detegere ea debeamus, quæ ad observationem accuratam conducunt. Quodsi quis instrumenta modumque observandi veterum cum recentioribus & recentissimis conferre voluerit; is animadvertet cum theoria Astronomiæ crevisse quoque observationum perfectionem. Unde conficitur, eum, qui observationibus astronomicis vacare voluerit, theoriam quoque Astronomiæ sibi perspectam reddere debere. Immo ex iis, quæ in nostris Elementis demonstrantur, jam patebit, observatorem in calculo quoque astronomico, ipso etiam geometrico versatum esse debere. Sane qui observatorem agere voluerit, Astronomiam omnem tam theoreticam, quam practicam intime perspectam habere debet. Ad observandum requiruntur instrumenta &, si observationes accuratæ esse debent, accuratis quoque opus est instrumentis. Quamobrem qui observationibus astronomicis sese dare voluerit, instrumentorum quoque fabricam, usum & examen intime perspicere debet. Notio instrumenti adæquata esse debet, qualis sufficit ei, qui artificem ejus fabricam docere vellet, aut, si arte polleret, ipsemet idem construeret. Rationes singulorum in fabrica observandorum ex theoria

theoria Aſtronomiæ reddendæ, ut ſcientifica ſit inſtrumenti cognitio. Uſum accuratum determinat Aſtronomiæ theoria ad conſtructionem inſtrumenti applicata. Conſtruitur enim inſtrumentum in certum finem, veluti magnus Gnomon ad obſervandas altitudines ſolis meridianas per ſingulos anni dies, ex theoria autem Aſtronomiæ conſtat, quanta exactitudine finem intentum conſequi debeamus. Inſtrumenti igitur is fieri debet uſus, quem finis conſequendus exigit. Examina non modo pro diverſitate inſtrumentorum, verum etiam pro uno eodemque inſtrumento varia eſſe poſſunt. Eo autem tendunt omnia, ut inde conſtet, inſtrumenta eſſe accurate facta, atque adeo iis in obſervando fidendum eſſe, ſi quidem certus ſis te debitam in obſervando diligentiam adhibuiſſe. Ad hæc examina referendum, ſi quis inſtrumentum ſuo eadem ἀκριβείᾳ phænomenon obſervat, qua ab aliis celebribus Obſervatoribus alias fuit obſervatum, veluti ſi quis per teleſcopium ſuum Saturni easdem phaſes videt, quales primus exquiſitiſſimis teleſcopiis obſervavit *Hugenius*. De Examinibus iſtis ſpecialia in medium afferre non licet. Supponunt enim accuratam Inſtrumentorum deſcriptionem, qualem hic dare non licet. Sufficit adeo monuiſſe, quod iſtiusmodi examinibus opus ſit, ne magno conatu ac maxima diligentia nihil agas. Obſervationes aſtronomicæ ſunt pauciſſimorum, propterea quod non cuilibet, qui Aſtronomiæ ſtudio delectatur, gaudet ſupellectili ad obſervandum neceſſario fruiturque otio ac commoditate obſervandi. Quamobrem in noſtris Elementis nonniſi ea tradidimus, quæ ſufficiunt, ut itelligatur, qualibus obſervationibus opus habeat Aſtronomus.

§. 300. Qui ſecundum cognitionis gradum intendunt, elementa Aſtronomiæ integra eodem modo perluſtrare tenentur, quem ſupra pro cognitionis gradu ſecundo acquirendo præſcripſimus. Eum enim in finem elementa Aſtronomiæ eadem methodo conſcripſimus, qua elementa Geometriæ condidimus, etſi communiter Aſtronomi continuo diſcurſu, quemadmodum vulgo faciunt Autores, ſua

proponant, ſit ita quod demonſtrationes eidem interſerant: quem morem etiam hodie Geometræ ſequuntur in ſchediaſmatis præſertim, quibus inventa ſua orbi literato communicant in Diariis Eruditorum & Commentariis Societatum Regiarum. Conſtat ipſum *Ptolomæum* eundem morem tenuiſſe in Almageſto ſuo. Negari tamen non poteſt, quod methodus *Euclidea*, quam nos adhibuimus, multo ſit clarior, præſertim ſi omnia rigide demonſtranda, nec ſumenda, quorum demonſtratio lectoris induſtriæ relinquitur, neque etiam immiſcenda, quæ prorſus non demonſtrantur. In parte etiam ſphærica ex principiis ſphæricis rigide demonſtravimus, quæ vulgo ab Aſtronomis fiducia illorum principiorum ſumuntur, ne evidentiam deſiderent tyrones, inprimis ubi elementa Geometriæ tam ſcrupuloſa induſtria pertractarunt, quam ſupra præſcripſimus, & qua omnino opus eſt, ſiquidem ideam methodi demonſtrativæ exemplarem in uſum philoſophiæ ex Matheſi haurire volueris. Neque porro negari poteſt, ſtudium Aſtronomiæ hoc pacto facilitari. Sane non alia de cauſa *Purbachius* ſtudium Aſtronomiæ amplificaturus & ad captum tyronum accommodaturus Almageſtum *Ptolomæi*, idem methodo *Euclidea* digerere cœpit, telam vix cœptam poſt obitum ejus jure legati pertexente *Regiomontano*. Non igitur fecimus, niſi quod judicio *Regiomontani*, Aſtronomi ſummi, probetur. *Regiomontanus* nullis problemata illuſtravit exemplis: id quod tamen apprime neceſſarium eſſe ex iis, quæ modo in antecedentibus inculcavimus, abunde elucet. Præterea ipſa res loquitur, quod, cum is nonniſi Almageſtum *Ptolomæi* in formam Elementorum *Euclidis* redigere voluerit, idem non tradat niſi Aſtronomiam antiquam, a qua recentior plurimum differt præſertim in Theorica, ut adeo dici nequeat nos actum egiſſe. Quemadmodum vero Elementa Geometriæ *Euclidea* multo clariora & evidentiora reddidimus, tum quod demonſtrationes fecerimus completas & ordinatas, quales eſſe debent, ſi quis methodum demonſtrativam in uſum philoſophandi addiſcere voluerit, tum quod reſolu-

ſolutiones problematum magis diſtincte exhibuerimus; ita idem obſervavimus ut in ceteris Matheſeos partibus, ſic etiam in Elementis Aſtronomiæ. Obſervationes præterea, quales in Matheſi pura nullæ occurrunt, ſigillatim quoque ita recenſuimus, ut præter facta non contineant; ea vero, quæ inde concluduntur, per modum corollariorum deduximus, quemadmodum vult Logica verior & fieri debere in Logica noſtra evicimus: id quod etiam in diſciplinis Opticis jam fecimus. Sicuti enim methodus demonſtrativa in iis, quæ operationibus intellectus perficiuntur, ad amuſſim obſervat regulas in Logica præſcriptas; ita etiam in iis, quæ ſenſuum uſu ſub directione intellectus innoteſcunt, ejusdem regulas ſequi debet. Nihil adeo a nobis prætermiſſum exiſtimamus, quod methodus accurata exigere poterat. Cum in Theoricis nonnulla dentur, quæ rigide demonſtrata eſſe dici nondum poteſt, etſi rationi & experientiæ admodum conſentanea videantur & quæ in uſum Aſtronomiæ practicæ ſumenda eſſe unanimiter hodie conſentiunt Aſtronomi, veluti quod Terra moveatur motu vertiginis & motu translationis circa ſolem (§. 622), & deſcriptio ſyſtematis mundi (§. 630); demonſtrationis quoque titulum omiſimus, ne contra regulas Logicæ de demonſtratione pro tali venditemus, quæ non eſt, ut ut ab incautis vulgo pro tali habeatur. Nulli igitur dubitamus fore, ut certam nobiliſſimæ ſcientiæ cognitionem ex Elementis noſtris hauriat, qui non perfunctoria opera in iisdem verſari voluerit. In Theoricis ſecuti ſumus hypotheſin *Kepleri*, quam cum cœlo magis conſentire ceteris hypotheſibus commentitiis omnibus in confeſſo hodie eſt apud Aſtronomos omnes fiducia obſervationum, quibus in Aſtronomia omnia dirimenda. Quamobrem quoque placuit calculum geometricum explicare, qualem dedit *Keplerus* in Commentariis de ſtella Martis & in Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ, ut & conſtructio Tabularum Rudolphinarum, & calculus Rudolphinus intelligatur. Quoniam tamen hodie majore fruimur luce in Geometria, quam *Kepleri* ævo; ea quoque addidimus, quæ lubens ipſe in theo-

theoriam ſuam recepiſſet, ſiquidem ipſi ea videre licuiſſet.

§. 301. Neminem vero, qui Dioptricam ante didicit, quam ad Aſtronomiam accederet, quemadmodum omnino fieri debet ob eximium teleſcopiorum in omni Aſtronomia uſum, offendet, ubi obſervaverit in Theorica quædam ſumi, quæ in rigore geometrico vera non ſunt, ad veritatem tamen propius accedunt. Etenim in cognitione Naturæ mathematica, ad quam etiam Aſtronomia referenda, præſertim ſi more *Kepleriano* tractetur, non attendendus eſt rigor geometricus, modo conſtet quæ eodem invito ſumuntur ad veritatem prope accedere, præſertim ubi theoria quæritur propter praxin, ubi approximationes æquipollent veritati. Vidimus quoque in Mechanica iſtiusmodi hypotheſes in locum hypotheſium naturæ utiliter ſubſtitui, immo ſi praxin unice reſpicias, ſubſtituendas eſſe. Quoniam tamen ad Aſtronomiam accedere licet, Mechanica ſepoſita, ſtatim a Geometria elementari & Trigonometria utraque; non inconſultum duximus denuo inculcare, quod attento lectori ex anterioribus jam patere poterat. Neque hoc abhorret a more priſcorum Aſtronomorum, cum tamen antiquiſſimis temporibus rigor demonſtrandi maxime ſeſe probaret Geometris. Etenim in computo eclipſium pro arcubus circulorum ſumſerunt, quemadmodum adhuc fieri ſolet, lineas rectas pro arcubus circulorum & triangula ſphærica in plana converterunt ad facilitandum calculum, propterea quod non committitur error ſenſibilis ſed qui obſervabili minor: error autem obſervabili minor in Aſtronomia practica habetur pro nullo. Huc etiam referri debet, quod in doctrina primi mobilis ſemidiameter Telluris habeatur pro puncto reſpectu diſtantiæ fixarum. Quando vero dicimus, in demonſtrationibus aſtronomicis non ſemper obſervari rigorem demonſtrandi; id non intelligendum de forma, ſed de materia demonſtrationis. Conſtat nimirum ex Logica, formam probationis ſemper eandem eſſe debere, nec ab ea unquam recedendum, ſi methodus accurata eſſe debet: id quod etiam

am uſui eſt in rigore demonſtrandi agnoſcendo, ne quis ſibi perſuadeat ſupponi, quæ vera ſunt, ſibi autem in memoriam venire nequeunt. Nullo igitur modo probamus, ſi rigor demonſtrandi quoad formam negligatur, quicquid etiam videatur aliis. Notandum vero & hoc eſt, in Aſtronomia a rigore demonſtrandi quoad materiam recedi absque ullo ſcientiæ detrimento, quemadmodum etiam in Dioptrica contingit. Quod enim ſumitur contra veritatem, eadem tamen non invita ſumitur, quia quod ſumitur quoad praxin in locum veri ſurrogare licet, nec ſine utilitate. Alia vero longe ratio eſt, ſi dubium ſumitur tanquam verum non ſine formidine oppoſiti Hoc enim in caſu ſubeundum eſt periculum errandi, quale non metuendum in præſenti caſu. Sunt equidem etiam in Aſtronomia, quæ dubia ſunt, & ad certitudinem hactenus deduci minime potuerunt: ſed ea a ceteris ſatis aperte diſtinguimus, ne cum certis confundantur. De hiſce plura mox monebimus in ſequentibus. Non vero vitio vertitur Aſtronomo, ſi in dubiis acquieſcit, ubi certitudo haberi nequit: illud demum vitio vertendum fuerat, ſi dubia pro certis venditaret. A priori nullum damnum metuendum ſcientiæ; a poſteriori autem detrimentum patitur ſcientia. Ingenue confitentur Aſtronomi, ſe a certitudine adhuc abeſſe, ubi eam nondum conſecuti; minime autem certa & explorata videri volunt, quæ non ſunt. Immo ſi contingat a vero aberratum eſſe, obſervationibus contrarium ejus, quod ſtatutum fuerat, loquentibus; diſſenſum ab obſervationibus minime diſſimulant, multo minus erroribus incruſtandis ac pertinaciter defendendis operam impendunt, prouti eruditis ceteris ſolenne. Veritatem nimirum quærunt, quam ubi nondum invenerunt, eandem inveniſſe videri nolunt, ne ſibi non minus quam aliis ad eam inveniendam viam præcludant. In iis quoque, quæ dubia ſunt, unus non ægre fert diſſenſum alterius, quantuſcunque fuerit, nec propter diſſenſum unus alterius laudi detrahit, multo minus eundem inſectatur, quemadmodum denuo ab aliis eruditis fieri aſſolet. Quamobrem

& nos in dubiis adverſas ſententias recenſuimus citra injuriam in ullum diſſentientium, & unicuique liberum reliquimus, cuinam illarum accedere velit, aut num inter extremas mediam amplecti malit.

§. 302. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, ſive in Matheſi acquieſcere, ſive intellectum in uſum philoſophandi perficere velint, iis multa ſupeditabit aſtronomia. Et enim a parvis initiis continuo crevit, & per multiplices ambages ad ea tandem acceſſit, quæ a cogitione humana maxime remota videbantur. Ad progreſſum adeo Aſtronomiæ animum maxime attendere debet, qui artificia cognoſcere ſtudet, quibus abdita naturæ rimari datur. Pars ejus ſphærica multo facilior theorica. Quamobrem de illa nobis primum ſigillatim dicendum. Capite primo recenſuimus obſervationes communes ac inde prima Aſtronomiæ ſphæricæ principia ſtabilivimus. Obſervationes communes ſua ſeſe ſponte offerunt cœlum contuentibus, nec vulgi captum tranſcendunt. Atque adeo liquet prima principia eſſe Aſtronomo cum vulgo communia. Neque etiam aliter fieri potuit, quam ut, qui primus de Aſtronomia cogitavit, aliunde notiones aliquas diſtinctas acquireret ad ulteriora profuturas, quam reflectendo ſuper iis, quæ nemo ignorat niſi rationis uſu omni deſtitutus. Per haſce communes obſervationes cœlum percipitur inſtar ſphæræ cavæ, in cujus centro Terra eſt, cui inſiſtimus, & cujus ſuperficiei affixæ ſunt ſtellæ, quæ autem circa Terram continuo revolvitur. Vulgo hæc notio confuſa eſt; ſed Aſtronomus, qui notionem ſphæræ diſtinctam ex Geometria hauſit, eam applicans ad ea, quæ percipit, diſtinctam conſequitur notionem. Atque ita Aſtronomiæ ſtudioſus, immo primus ejus inventor ultra vulgus ſapere cœpit, dum notione communi ad diſtinctam revocata aditum ſibi ad ulteriora pandit, cum vulgus in confuſa acquieſcens ulterius progredi nequeat, ſed in iis, quæ percipit, ſubſiſtere teneatur. Quæritur vero jam, an quod apparet revera quoque ita ſe habeat, nimirum an cœlum ſit ſphæra cava, an Terra ſit in centro ejus ibidemque quieſcat,

an cœlum circa eandem continuo rotetur, an stellæ omnes superficiei ejus sint affixæ? Hoc pacto liquet, quomodo statim inventori plura invenienda sese offerant. Quodsi ponas eum esse circumspectum, ne per præcipitantiam statuat; ad quæstiones hasce animum advertens, eas omnes hinc pendere animadvertit, num semper quod apparet ita quoque revera sese habeat. Ponamus Opticam nondum esse inventam, quemadmodum probabile est Astronomiæ eandem ortum suum debere: nemo non videt recurrendum fuisse ad observationes commmunes de iis, quæ nobis apparent. Videtur nobis cœlum sphæra cava, in cujus centro sumus, quod stellæ omnes eandem distantiam a Terra habere videntur, nullumque corpus aliud inter oculum & stellas interpositum apparet. Quodsi ergo experientiam communem consulimus, objecta remota, etsi aliquo intervallo a se invicem distent, eodem tamen a nobis abesse videntur, ubi inter ea nullum aliud corpus interpositum conspicimus, veluti dum arborem in agro a sylva procul adhuc remotam huic conterminam videmus e longinquo. Incertum adeo esse cognoscimus, num cœlum sit sphæra cava, num superficiei ejus affixæ sint stellæ, num denique Terra sit in centro. Cumque ex observationibus communibus hæc decidere non detur; quid statuendum sit, dubitandum, neque hactenus apparet, quomodo a dubitatione liberari queamus. Immo ex progressu patebit, non adeo facile fuisse, ut ab eadem liberaremur. Non plura secula, sed integri millenarii elapsi sunt, antequam aliqua saltem probabilitatis specie statui potuerit, quid veritati consentaneum videatur. Liquet adeo, a præcipitantia non abesse, qui scepticismum amplectuntur, quamprimum animadvertunt, se a dubitatione liberari non posse, adeoque veritatem frustra quæri sibi aliisque persuadent. Quodsi jam porro dispiciant, num quod quiescere videtur, revera quiescat, & quod moveri videtur, revera moveatur; observationes denuo communes loquuntur, quiescentibus in re celerrime mota, quæ quiescunt in partem contrariam ferri videri, veluti dum curru

celerrime vecto per sylvam arbores nobis in eodem sedentibus in plagam contrariam currere videntur, vel dum littora moveri in partem contrariam in navi celerrime mota sedentibus apparet. Quamobrem denuo in dubitationem adducimur, utrum Terra quiescat & cœlum circa eandem rotetur, an vero stellæ quiescant & terra motu vertiginis in plagam contrariam convertatur. Liquet autem ut ante ex observationibus communibus decidi minime posse, a qua parte stet veritas. Quodsi ergo qui primi ad Astronomiam animum appulerunt, scepticismo locum dare voluissent; omni adhuc Astronomia careremus. Enimvero quid faciendum erat in hisce angustiis constitutis? Ea tanquam dubia erant notanda, & observationes communes ulterius expendendæ, num forsan per eas major lux sit affulsura, & an nos deducant ad alia intellectui magis obvia. Quodsi hoc facias, in notionem ortus & occasus incidis, quemadmodum capite primo ostendimus, quos ubi invicem confers notionem habes moræ supra horizontem. Secundam porro observationem expendens, continuam stellarum situs respectu verticis tui variationem deprehendis, distantia a vertice a primo ejus ortu continuo decrescente, donec ad minimam pervenerit, & deinde rursus crescente, donec ad maximam regressa in parte cœli opposita occidit. Præterea hinc discimus, continuo alias stellas oriri, eas autem, quæ per aliquod tempus conspicuæ fuerant, denuo occidere. Hæc ubi distincte considerantur, quærendorum sese offert numerus, nimirum quando stella aliqua oriatur, quando occidat, quanto temporis intervallo in parte cœli nobis conspicua commoretur, seu quodnam tempus inter ortum atque occasum intercedat, quænam sit minima ejus a vertice distantia, quandonam ad eandem perveniat, quo tempore singulas intermedias in utraque cœli visibilis parte acquirat. Nemo non videt, phænomena, quæ quærenda animo insinuant, pendere ab eo quod cœlum, cujus superficiei stellæ affixæ sunt, videatur circa Terram quiescentem, in qua fixum tuemur locum, moveri, atque ex hoc assumto rationem eorundem reddi posse.

Unde

Unde manifestum est, in gratiam horum phænomenorum, ubi quæstiones, ad quas nos ea deducunt, resolvendæ, instar hypotheseos sumi posse, quod cœlum sit sphæra cava, in cujus superficie hæreant stellæ eidem affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quiescentem continuo gyratur. Quoniam ex anterioribus constat, phænomena eadem proditura, si Terra in plagam contrariam circa axem suum convertatur, cœlo cum stellis quiescente; æquipollentia utriusque hypotheseos probe perpendenda: ita enim constabit, ubi non quæritur nisi quæstionum illarum, quas commemoravimus, solutio, salva veritate sumi posse utramvis, consequenter te in Astronomiæ parte prima, quæ de motu communi agit, nos feliciter progredi posse, etiamsi ignoretur, quænam harum hypothesium sit vera. Enimvero utraque hypothesis non eadem facilitate sese commendat dictas quæstiones resoluturis. In inveniendo itaque & demonstrando præferenda ea, quæ faciliorem operam parit. Ac ea de causa in parte sphærica Astronomiæ sumitur motus cœli & quies Telluris, ac bona methodus jubet sumi, etiamsi contrarium verum esse invictis argumentis demonstrari posset. Etenim in inveniendo & demonstrando, præsertim ubi praxin intendimus, hypothesis vicaria in locum hypotheseos naturæ seu veritatis surrogatur, quemadmodum jam vidimus in aliis quoque disciplinis mathematicis fieri. Hinc itaque elucescit, progressui Astronomiæ sphæricæ non obesse ignorantiam veritatis, sed eadem in dubio relicta non minus praxi satisfieri & in ea ad liquidam veritatem pertingi posse, ac si a primis dubitationibus prorsus essemus liberati. Neque dicendus es a vero aberrare ac erroribus locum dare, modo caveas, ne per præcipitantiam quoad ea erres, quæ sumis. Etsi enim in præsenti negotio error non noceat, nocere tamen potest in aliis, iis scilicet quæ ab eo pendent quod est, non vero ab eo, quod apparet.

§. 303. Probe ea, quæ modo dixi, perpendant velim, qui ad Philosophiam animum appellunt, etsi Mathematicis, qui antecessorum suorum inventa addiscendo sibi habitum quendam

 inve-

inveniendi compararunt, talia puerilia videantur & contemnantur, qui tamen contemtui dant pœnas, quoties de rebus philoſophicis judicium ſibi ſumunt, aut ſuperbo ſupercilio Philoſophiam contemnunt omnem, propterea quod quæ in ea vulgo docentur a certitudine, qualis in Matheſi datur, immenſo intervallo diſtant. Quodſi vero acumine, quo pollent, uſi ad animum revocarent ea, quæ modo dixi; haud difficulter animadverterent, Philoſophiam hactenus in infantia fuiſſe, infantiam vero ejus prorſus convenire cum infantia Aſtronomiæ, quæ, ſi ob eundem ſtatum negligenda, non educanda fuiſſet, nunquam ad virilem ætatem adoleviſſet. Sane non rectius videre licet, quomodo ſcientiæ philoſophicæ, quæ ex communi vulgi notitia tanquam ex ſemine naſcuntur, in primo ortu eſſe debeant, quam ſi ad ortum Aſtronomiæ animum attendant. Quodſi porro eandem attentionem ad progreſſum ipſius afferant; quid fieri debeat, ut Philoſophia quoque humano generi adeo utilis adoleſcat haud difficulter perſpicient Aſtronomos imitaturi, quantum fert differentia, quæ inter cognitionem philoſophicam & mathematicam intercedit. Demus exemplum. Communi experientia conſtat, animam in perceptionibus ſuis dependere a corpore, & viciſſim corpus quoad motus organorum externorum & ſui totius ab anima. Hæc dependentia phænomenon eſt, quale eſt figura ſphærica mundi, cujus ſuperficiei ſtellæ affixæ & quæ circa Tellurem in centro ejus quieſcentem continuo gyratur. Philoſophus perinde ac Aſtronomus notionem confuſam revocat ad diſtinctam animamque a corpore dependere agnoſcit quoad ſpecificationem perceptionum & continuitatem temporis, quo cum mutationibus in organis ſenſoriis contingunt, & corporis ab anima quoad ſpecificationem motuum voluntariorum & continuitatem temporis, quo cum volitionibus animæ contingunt (§.962 *Pſych. empir.*), notitionibus adjutus ontologicis quemadmodum Aſtronomus geometricis. Atque hoc pacto primo paſſu diſcedit a cognitione vulgi, ſibi aditum paraturus ad ulteriora. Quoniam vero novit, notionibus confuſis

fuſis non eſſe fidendum, cum per eas appareant haud raro, quæ non ſunt; ad haſce quæſtiones delabitur, utrum illa dependentia ſit realis, an vero ſaltem appareat, ſeu num anima & corpus revera in ſe invicem agant & a ſe invicem patiantur, an vero tantummodo in ſe agere, & a ſe invicem pati videantur, quemadmodum Aſtronomus quærit, num cœlum cum ſtellis fixis circa Tellurem in centro ejus collocatam revera moveatur, an ſaltem moveri circa eandem videatur & utrum Telluris ſitus revera talis ſit, qualis apparet, nec ne. Experientia communi quæſtiones ſuas dirimi non poſſe, perinde ac Aſtronomus agnoſcit. Quemadmodum enim hic motum cœli circa Tellurem non obſervat, neque etiam ſitum ejus in centro ſphæræ mundanæ; ita ſimiliter Philoſophus nullam obſervat actionem corporis in animam, nec animæ in corpus (§. 949. 955 *Pſych. empir.*). Quodſi dicas, *Newtonum*, virum perſpicaciſſimum, affirmare, actionem illam mutuam animæ ac corporis in ſe invicem ſingulis momentis nos experiri; facilis eſt reſponſio. Acumine ſummo polluit in Geometricis, non vero in Methaphyſicis: acumen autem Geometræ, quod ab imaginatione pendet, non eſt idem cum metaphyſico, quod imaginationi prorſus ſubducitur. Quemadmodum itaque per præcipitantiam judicarunt Aſtronomi, ſi qui experiri ſeſe ſibi viſi fuerint figuram mundi ſphæricam, ſitum Telluris in centro ejusdem & motum continuum circa Tellurem in centro quieſcentem; ita quoque per præcipitantiam judicavit *Newtonus*, quando ſibi viſus fuit experiri actionem mutuam corporis ac animæ in ſe invicem, qua una ſubſtantia in modificationibus ſuis efficiatur dependens ab altera. Ab hac præcipitantia ſibi utique caviſſet, ſiquidem ortum Aſtronomiæ diſtincte expendere voluiſſet Aſtronomiam non ſibi ſoli addiſcens, ſed in uſum quoque philoſophandi. Quod hoc facere debuerit, minime contendimus nullius jus violaturi, quod Natura unicuique conceſſit, utpote qui ab omni injuria procul remotum habemus animum, multo minus ejus laudi detrahere cupimus, quam ſummam

ipſi

ipſi merito ſuo magno deferimus, ne quicquam contra humanitatis officia, ad quæ aliis prompte præſtanda obligamur, admittamus. Veritati non minus debetur honos ſuus, quam hominibus præclare de eadem detegenda & ejus theſauris amplificandis promeritis. Neque præſumendum eſt, viros magnos velle, ut, dum laudamus, adulemur, cum adulatio potius anſam det laudibus promeritis detrahendi, quam eas amplificandi, nec ipſi appetere cenſendi ſint niſi veritati conſentaneas. Certum adeo manet, philoſophum circumſpectum, non minus ac Aſtronomum (§. 302), in dubitationem adduci, quid de dependentia animæ ac corporis a ſe invicem in modificationibus ſuis ſtatuendum ſit, ubi ejus ratio ex eſſentia & natura utriusque corporis reddenda, quemadmodum eam non aliunde reddendam eſſe per prima philoſophiæ principia edoctus eſt. Quemadmodum vero Aſtronomus in limine Aſtronomiæ adhuc conſtitutus non videt, quomodo a dubitatione liberari poſſit; ita ſimiliter nec Philoſophus in limine Philoſophiæ adhuc conſtitutus reperit, quomodo ex dubitatione eluctari queat. Quid igitur faciendum? Num animus omnis prorſus abjiciendus & in ſcepticiſmum eundum? Abſit ut hoc faciat, qui philoſophari decrevit! Imitari convenit Aſtronomum. Inquirendum itaque, num obſerventur alia, quæ ab iſta mutua modificationum animæ ac corporis dependentia a ſe invicem porro dependent. Videmus a ſenſatione pendere alios actus facultatis cognoſcitivæ & ab his actus facultatis appetitivæ & averſativæ: videmus etiam actuum non minus internorum animæ, quam motuum organorum corporis ſeu actionum externarum determinationem pendere a nutu animæ, conſequenter eidem competere directionem actionum externarum & internarum quandam. Horum rationem reddi poſſe apparet ex mutua illa dependentia. In hæc igitur omnia inquirere & praxes hinc a priori deducere licet, nondum licet cognita ratione mutuæ illius dependentiæ modificationum animæ ac corporis a ſe invicem. Quamobrem ſicuti in Aſtronomia ſumimus motum commu-

nem

nem tanquam phænomenon, & inde deducimus alia, quæ ab eodem pendent, parum solliciti, num revera detur, an saltem appareat; ita quoque in Philosophia mutua animæ ac corporis quoad modificationes a se invicem dependentia sumenda tanquam phænomenon, ac inde deducenda sunt alia, quæ hinc porro pendent, nec ea Philosophum tangere debet cura, num illa dependentia realis sit, an tantummodo apparens, & quænam sit ejus causa. Immo cum constet, quæcunque tandem causa sit illius dependentiæ, semper tamen supponendum esse animam & corpus ita agere, ac si in seinvicem influerent, quemadmodum in Psychologia rationali evicimus; si vel maxime falsum esset, animam & corpus in se invicem influere, veritate tamen illæsa sumi potest tanquam hypothesis naturæ vicaria quoad regimen corporis, quod animæ tribuitur, immo quoad regimen sui ipsius, quatenus a corpore pendere videtur, animam & corpus in se mutuo influere, quemadmodum in Astronomia quoad motum communem sumimus, cœlum esse sphæram cavam, cujus superficiei affixæ sunt stellæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus collocatam ab oriente in occidentem convertitur, etiamsi persuasi simus, hæc a veritate abhorrere ob rationem paulo ante (§. 302) dictam. Memini cum systema harmoniæ præstabilitæ maxima animorum acerbitate impugnaretur, quasi per ipsum omnis moralitas, omne regimen politicum, immo omnis religio funditus evertatur, cumque ad avertendum tantum ab eo periculum ista monerem; Theologo cuidam celebri hoc paradoxum, immo absonum visum fuisse. Sed hoc ipsi condonandum erat, tanquam methodi demonstrativæ ac artis analyticæ prorsus ignaro, cujus nec notionem ullam, nec exemplum habebat. Ecquis enim est qui nesciat, & vel in sola Mathesi attentionem suam desiderari minime passus fuerit, sine methodi demonstrativæ notitia nemini esse posse ideam dependentiæ veritatum a se invicem, nec sine artis analyticæ cognitione constare posse, quænam, etsi nondum definita, sumi queant illæsa veritate ad alia investiganda, quæ usum in praxi habent?

Enimvero ſi qua ſunt, quæ a cauſa illius mutuæ ac corporis dependentiæ a ſe invicem dependent, tum ea non amplius ſumitur tanquam vera, niſi demonſtratum fuerit, utrum ea realis ſit, an tantummodo apparens, quemadmodum in parte Theorica Aſtronomi non amplius ſumunt Telluris quietem & motum communem, ſed potius motum vertiginis Telluris cœlique ac ſtellarum quietem. Poteramus alia addere exempla ex Phyſica generali pariter ac ſpeciali, niſi unicum ſufficeret, ut intelligatur, quomodo in re præſenti Aſtronomum imitari debeat Philoſophus.

§. 304. Poſtquam in Aſtronomia parte ſphærica Aſtronomi ſumſerunt, cœlum eſſe ſphæram cavam, cujus ſuperficiei ſtellæ omnes ſunt affixæ, & quæ circa Tellurem in centro ejus quieſcentem ab oriente in occidentem continuo circumvolvitur; ad hoc phænomenon Geometriam applicarunt, ut alia hinc pendentia determinarent, cum phænomenorum motus primi ſive communis cognitionem mathematicam quærerent. Quamobrem qui tertium cognitionis gradum intendit, in capite ſecundo, quod de circulis ſphæræ mundanæ agit, inquirendum eſt, quem in finem circulos iſtos in ejus ſuperficie deſcriptos imaginentur. Ipſa natura quaſi circulum deſcripſit, qui viſum oculi undiquaque terminat & ſphæram mundanam in duo hemiſphæria dividit, Horizon ideo dictus. Circulus hic immotus eſt, dum ſphæra mundana continuo volvitur, adeoque ultra ſphæram mundanam imaginari tenemur aliam immobilem, in cujus ſuperficie peripheria hujus circuli deſcripta. Ipſa adeo natura Aſtronomos deduxit ad diſtinguendos circulos mobiles ab immotis, antequam perpenderent, quales circuli ſuperficiei ſphæræ mundanæ ſint inſcribendi. Videmus hinc cognitionem Naturæ mathematicam imaginaria admittere tanquam principia, ex quibus deducitur, & fictionibus locum dare: id quod præpoſtere imitari minime debet Philoſophus, etſi in nonnullis utiliter imitetur, quemadmodum modo vidimus (§. 303). Hinc vero accidit, quod Mathematici ad

ad res philosophicas celeri nimis gradu properantes imaginaria a realibus non distinguant, & notiones in Mathesi toleranter veras tanquam reales importuno ausu in Philosophiam inferant, quemadmodum nec alia fuit ratio, quod olim Physici mundum ex sphæris crystallinis cavis compositum finxerint, donec tandem hypothesis insulsa a *Tychone de Brahe* explosa nullam amplius hodie inveniat fidem. Utinam huc animum serio adverterent, qui ex Principiis Philosophiæ naturalis mathematicis & Optica Mathematici summi *Isaaci Newtoni* nescio quam Philosophiam *Newtonianam* exsculpere volunt, quasi notiones imaginariæ, quæ ad cognitionem Naturæ mathematicam sufficiunt, & in ea fœcundæ deprehenduntur, in Philosophiam primam & naturalem utiliter inveherentur, immo quasi ex istis notionibus imaginariis inferri possent, quæ ad Theologiam naturalem & Cosmologiam generalem spectant. Idem enim revera agunt, quod fecere antiqui, qui notionem imaginariam mundi, quæ Astronomo in explicando motu communi adeo proficua fuit, tanquam realem in Physicam inferre ausi sunt. In usum cognitionis mathematicæ multa fingere licet; sed fictiones istæ mathematicæ non sunt veræ causæ, quibus effectus Naturæ intelligibili modo explicantur. Absit autem, ut quis hinc inferat, quasi laudibus Mathematicorum detrahere & supra Mathematicos Philosophos extollere velimus! Neque enim nobis jam propositum est Philosophos cum Mathematicis committere, nec de Jure Præcedentiæ controversiam movere. Diversitatem saltem notionum imaginariarum & realium inculcamus, ne in detrimentum scientiæ confundantur, quæ diversa sunt, sed legitimus utrarumque conservetur usus. Nihil decedit laudi Mathematici, etsi non habeatur Philosophus; quemadmodum nec Philosophos laude sua, quam meretur, frustratur quod non simul habeatur Mathematicus. Mathematici & Philosophi in numerum eorum entium referendi, quorum non est ad se invicem ratio, utut maxime consultum sit Philosophum simul esse Mathematicum, præsertim ubi in Philosophia ad ter-

tium cognitionis gradum adſpirat, cum Mathematicus in arte ſua ſummus eſſe poſſit, utut nullam inter Philoſophos laudem mereatur.

§. 305. De ſphæricorum theoria non ante cogitarunt Geometræ, quam cum Aſtronomia ad eandem eos invitaret. Qui ergo ad tertium cognitionis gradum adſpirat, ei ſuademus, ut primo in uſum ſecundi totum caput ſecundum perluſtret, & quomodo principia illius theoriæ ad ſphæram mundanam applicentur expendat, donec ſingula, quæ hic explicantur & demonſtrantur, habuerit perſpecta, parum ſolicitus, quomodo primi inventores in ea incidere potuerint. Enimvero ubi ſingula ipſi probe cognita atq; perſpecta fuerint, jam ſecundis curis idem caput perluſtret atq; jam ſupponat, quaſi nulla adhuc proſtaret ſphæricorum theoria, & inquirat, quomodo ſuppoſito phænomeno, quod veluti baſis eſt totius Aſtronomiæ ſphæricæ, tanquam fonte rationum de ceteris, quæ quæruntur, reddendarum, dum in phænomenorum motus communis rationes inquirimus, in circulos, quæ in ſphæræ ſuperficie concipi debent, aut ſi mavis tanquam ſphæram ſecantia plana conſiderantur, incidamus. Immo non inconſultum erit, ſi ante quinque priora capita in uſum ſecundi gradus cognitionis pertractet, quam quæ in uſum tertii perpendenda ſunt, exquirat, quoniam hoc pacto evidentius ipſi conſtabit, quænam ſint phænomena motus communis in hac Aſtronomiæ parte determinanda, ſicque facilius apparebit, quonam circulorum apparatu ea fini ſit opus. Dum vero curis ſecundis caput ſecundum percurrit, attentione inprimis opus eſt, ut obſervetur, quomodo theoria imperfecta nos deducat ad obſervationes, quibus perficiatur, ſimulque ad obſervationes, quibus ad praxin aptatur. E. gr. Vi phænomeni fundamentalis ſphæra mundana circa Tellurem continuo circumvolvitur. Enimvero quæritur an puncta illa fixa, circa quæ rotatur & qui poli dicuntur, ſemper ſint iidem, an vero mutentur. Quid ſumi debeat, per obſervationes definiendum. Similiter cum motus vel æquabilis, vel inæquabilis, eſſe poſſit, & celeritas in diver-

ſis

sis revolutionibus vel eadem, vel diversa; denuo quid sumendum sit per observationes definiendum. Equidem per modum hypotheseos sumi potest, polos semper manere eosdem, motum non modo esse æquabilem, sed eandem quoque esse in qualibet rotatione celeritatem. Enimvero ubi examinanda hypothesis, ad observationes tandem confugiendum. Atque adeo videmus, quomodo theoria imperfecta beneficio observationum reddatur perfectior. Similiter ubi per theoriam agnoscis Meridianum secare hæmisphærium in duas partes æquales & in eodem altitudines stellarum esse maximas seu distantias a vertice minimas, quas habere possunt; in usum praxis situs Meridiani determinandus est respectu tui loci. Nec absimili modo patet situm quoque poli respectu loci tui determinandum esse. Deducit adeo nos theoria ad observationes, quibus eadem ad praxin aptatur. Unde liquet, quomodo ea, quæ per meditationes deteguntur, ulterius quærenda insinuent, de quibus ante cogitare non poteras. Probe autem notandum est, quomodo observationes sine circulo vitioso, quem Logici vocant, instituantur, quando utraque alteram supponere videtur, quales subinde in Astronomia occurrunt. Habemus exemplum, in invenienda linea meridiana ad determinandum planum meridiani in dato loco §. 120. Etenim ea supponit stellæ declinationem vel etiam solis intra tempus observationis non mutari. Supponit observatio immutabilitatis declinationis immutabilitatem poli, quæ ex immutabilitate altitudinis maximæ, adeoque in plano meridiani, demonstratur §. 114. Quod si tamen perpendas, quæ §. 110. & seqq. docentur; videbis, quomodo absque periculo circuli vitiosi committendi hæc dirimantur. Equidem non negaverim, initio Astronomos plurima sumsisse per modum hypotheseos, quemadmodum idem quoque haud raro fieri debuisse ex Theoricis constabit, & cum ex istis hypothesibus deducta cum cœlo deinceps per alias observationes consentire deprehenderent, assumtis demum plenum assensum præbuisse: hoc tamen minime obstat, quo minus Astronomiam me-

methodo ſynthetica tradituri oſtendamus, quomodo ſcrupuloſiores in infantia ſtatim Aſtronomiæ certitudini proſpicere potuerint, cum nobis propoſitum ſit eam ita tradere, ut methodum imitari liceat non modo in Philoſophia naturali, verum etiam in aliis ejus partibus, ubi a poſteriori quædam ſtabilienda, ut alia inde deduci queant.

§. 305. Qui tertium cognitionis gradum intendit, problemata per Trigometriam ſphæricam ſoluta analytico more expendere debet. Artificium heuriſticum, quo hic utendum, in eo conſiſtit, ut interſectione circulorum ſphæram ſecantium detegatur triangulum, cujus id, quod quæritur, pars aliqua eſt, ſive latus, ſive angulus, ac præterea attendatur, num per obſervationem, principia ſphærica aut calculos præcedentes dentur tres ejusdem trianguli partes aliæ. Conſtat enim ex tribus datis per Trigonometriam ſphæricam ſemper inveniri poſſe quartum, quod quæritur. Facillimum exemplum præbet problema quartum §. 198, quo inveniri jubetur puncti cujuſcunque dati Eclipticæ declinatio. Quoniam declinationem metitur arcus circuli maximi inter æquatorem & punctum datum interceptus atque ad æquatorem perpendicularis (§. 76 *Aſtron.*); qui circulis declinationis dicitur (§. 78 *Aſtron.*), hinc colligitur, animum advertendum eſſe ad æquatorem, eclipticam & circulum declinationis. Quamobrem in charta deſcribitur circulus, qui ſphæram mundanam repræſentare fingitur, cumque ſitus æquatoris dependeat a polis mundi (§. 48 *Aſtron.*); in eo Tab.
ſumitur pro arbitrio punctum IV.
P, quod polum repræſentet. Fig.
Jam Æquator ſphæram munda- 40.
nam in duo hemiſphæria dividit (§. 50 *Aſtron.*) & ſingula ejus puncta a polo mundi quadrantis intervallo diſtant (§. 49 *Aſtron.*). Ex polo igitur P intervallo quadrantis AP deſcribitur circino arcus AQ, qui Æquatorem repræſentat. Cum polus Eclipticæ certo intervallo a polo mundi P diſtet (§. 179 *Aſtron.*) & illa æquatorem ſecet (§. 172 *Aſtron.*); pro arbitrio ſumitur punctum M tanquam polus Eclipticæ & ex eo quadrantis intervallo ME deſcribitur arcus EL, qui Eclipticam repræſentat & æquatorem AQ in G ſecat.

Cum

Cum circulus declinationis transeat per polos mundi P & p (§. 78 *Astron.*) & ex principiis sphæricis pateat, quod poli ejus sint in Æquatore, punctum vero S in Ecliptica pro lubitu sumi possit; describatur denique arcus PSD, qui quadrantem circuli declinationis repræsentat (§. 79 *Astron.*). Patet hoc modo intersectione æquatoris, eclipticæ & circuli declinationis obtineri triangulum DGS in superficie sphæræ mundanæ, cujus crus DS repræsentat declinationem puncti Eclipticæ S, quæ quæritur. Inquirendum igitur porro est, num in eodem triangulo tria tanquam aliunde cognita deprehendantur. Quoniam itaque punctum Eclipticæ S, cujus declinatio quæritur, pro lubitu sumitur a Tabularum conditore, aut in alio casu datur; in priori casu punctum G, in quo Ecliptica æquatorem secat, sumi potest vel pro principio arietis, vel pro principio Libræ (§. 158. 160 *Astron.*), in posteriori ex dato puncto Eclipticæ patet, num punctum G repræsentet principium Arietis, an vero principium Libræ. Ponamus in præsenti punctum G esse principium arietis. Quia punctum Eclipticæ S datur, ejus distantia a principio Arietis seu arcus Eclipticæ SG datur. Datur præterea angulus obliquitatis eclipticæ per observationem (§. 163. 178 *Astron.*). Et ex sphæricis constat angulum ad D esse rectum (§. 76 *Astron.*). Habemus itaque in triangulo DGS tria data, nimirum angulum rectum D in interfectione æquatoris AQ & circuli declinationis PD, angulum obliquitatis Eclipticæ G, distantiam SG puncti Eclipticæ S a puncto æquinoctiali G. Inveniri autem debet latus DS angulo obliquo G oppositum: id quod fieri posse, per Trigonometriam sphæricam patet. Videmus adeo, qua analysi resolutio problematis de invenienda declinatione puncti cujuscunque Eclipticæ fuerit investigata, & ex hac analysi facile condi poterat demonstratio problematis ad morem veterum Geometrarum, siquidem tanto rigore demonstrandi foret opus. Nimirum qui ad Astronomiam accedit, cum in Elementis Arithmeticæ, Geometriæ, Trigonometriæ utriusque & sphæricorum, Opticæ item,

Ca-

Catoptricæ atque Dioptricæ jam ita verſatus ſupponatur, ut, quæ in iſtis Matheſeos partibus traduntur, familiaria experiatur, in Methodo demonſtrandi jam ſatis exercitatus eſt, ut non minutiſſima quæque ipſi enucleari ſit opus. Non tamen inconſultum eſt, ut, qui intellectus perficiendi gratia Matheſi operam navat eodem rite extra eandem uſurus analyſi, quam hic commendamus, ſedulo incumbat ac ſyntheticas demonſtrationes hinc eruat.

§. 306. Qui in ſeipſis experiuntur, ſe absque iſta analyſi, quam hic urgemus, ſine mora ſchemata delineare & triangulorum reſolutiones invenire poſſe, ac absque demonſtratione hinc derivata veritatem ſolutionis problematum propoſitæ perſpicere, tantum apparatum condemnabunt ac tempus inanibus ſpeculationibus falli exiſtimabunt, quod longe utilius in aliis addiſcendis collocari queat. Immo non deerunt, qui, cum inter Aſtronomos merito ſuo emineant, analyſin iſtam ac derivatas inde ſyntheticas demonſtrationes inter ſuperflua referent, forſan tanquam puerilia prorſus ridebunt. Quamobrem apprime neceſſarium videtur, ut quædam ad avertendum præjudicium philoſophaturo admodum nocuum annotemus. Nemo in dubium vocare poteſt, omnibus iſtis notionibus, quæ analyſin noſtram ingrediuntur, animum ejus imbutum eſſe debere, qui proprio Marte ſolutionem problematis de inveſtiganda declinatione ſingulorum graduum aut puncti cujuslibet eclipticæ invenire aut veritatis ejusdem, ubi ab alio inventa ſupponitur, plene convinci debet. Pone enim quamcunque illarum eſſe tibi incognitam, extemplo conſtabit, tibi de veritate ſolutionis dubium aliquod adhuc ſupereſſe, conſequenter abeſſe convictionem, quæ omnem dubitationem excludit. Notiones igitur iſtæ omnes influunt in determinationem aſſenſus, quem præbes ſolutioni tanquam veræ. Quamobrem ſi diſtincte exponendum, quomodo generetur aſſenſus, & qui fieri potuerit, ut a priori in ſolutionem problematis inciderit primus inventor; nulla illarum notionum prætermittenda, ſit ita quod inventor vel qui ſolutionem jam

inventam addiſcit, in confuſis notionibus acquieſcat, nec quæ ideæ, a qua pendet convictio, inſunt, ſingula a ſe invicem actu mentis diſcernat. Sane cum Philoſophi ſit rationem reddere iſtius aſſenſus ac modi, quo ad ſolutionem problematis inventor pervenire potuerit; nemo niſi cognitionis philoſophicæ contemtor reprehendet, quod quæ actibus animæ inſunt diſtincte explicet, utut utilitatem non pervideat. Hanc vero eſſe maximam, ſi quis animum ad philoſophandum appellit, haud difficulter oſtenditur. In Aſtronomia ſchemata notiones, quas antea tibi comparaviſti, imaginationi præſentes ſiſtunt, ut confuſa quædam idea animum attendenti ſufficiat ad veritatem protinus perſpiciendam. Enimvero in Philoſophia, præſertim in Metaphyſicis ac Moralibus, iſtiusmodi ſubſidio deſtituimur, quo imaginatio apta efficitur ad vicarias intellectus operas præſtandas, nec confuſis ejus ideis tuto fidere licet, ſiquidem errandi periculum ſubire nolueris. Ipſe igitur intellectus agere debet, quod ſuum eſt, adeoque non admittendæ ſunt niſi notiones diſtinctæ, nec in exacta earundem evolutione unquam nimii ſumus, ſiquidem eam deſideraverimus evidentiam, quæ in Matheſi datur. Quamobrem ut evolutioni huic adſueſcamus, conſultum omnino eſt analyſin problematum primi mobilis inſtituere, quemadmodum præcepimus: id quod in Aſtronomia multo facilius ſuccedit, quam in Philoſophia, quia intellectus dirigitur ab ipſa imaginatione, modo ad imaginem, quæ ob oculos verſatur, animum attendas, cum in Philoſophia imaginatio ac ſenſus ſuppetias ferre nequeant, ſed intellectui magis obſtaculo ſint, ne ſuo munere dextre fungatur. Non ſuadeo niſi experta & quorum veritatem in ſeipſo experiri poterit, qui voluerit. Quicquid igitur videatur aliis, qui Aſtronomiæ totos ſeſe dedemnt, nec Philoſophiæ excolendæ operam impendendi otio fruuntur; ego iſtam Analyſin admodum proficuam judico omnibus, quotquot ad hanc excolendam animum appellere decreverunt. Neque enim exiſtimandum eſt levi opera conſequi te poſſe, ut methodo demonſtrativa in philoſophando rite utaris.

Plurima enim ſunt, ad quæ per exempla felicius, quam per præcepta patet aditus, exempla vero tutiſſima offert Matheſis, ſi accurata demonſtrationum analyſis curæ cordique fuerit. Nos, quibus methodi intimius cognoſcendæ cupido ſtudium Matheſeos commendavit a prima ætate, Matheſin quoque hoc nomine maximi facimus. Non jam commemorare lubet, quod diſtincta uſus facultatum animæ explicatio augeat ſcientiam philoſophicam & quod eum cognoſcere teneatur philoſophus, ſi in Philoſophia morali tradere velit, quæ ſatis faciunt: hic enim, ubi intellectus perficiendi nonniſi ratio habetur, ad methodum tantummodo digitum intendimus.

§. 307. Non lubet ad particularia deſcendere, quæ utiliter moneri poterant: neque enim conſultum eſt, ut prima ſtatim vice minutiſſime perſequatur ſingula, qui intellectus perficiendi gratia ad ſtudium aſtronomicum accedit. Quodſi enim hiſce tantummodo obſervatis, quæ docuimus, ad ſtudium pſychologicum & ontologicum acceſſerit; in Onthologia & Pſychologia probe verſatus proprio, quod acquiſivit, acumine detéget, quæ adhuc annotari poterant. Merentur autem attentionem, quæ de refractione, parallaxi & crepuſculis dicuntur eo etiam fine, ut intelligatur, quam neceſſarium ſit experientiæ & rationis connubium, ne per theoriam fieri poſſe videantur, quæ tamen in praxi minime ſuccedunt. Nimirum qui experientiam negligit, ſubinde fieri poſſe ſumit, quæ ob circumſtantias a priori non definienda haud quaquam fieri poſſunt. Unde contingit nos incidere in reſolutiones problematum, quibus ſatisfieri nequit. Obſervanda hæc ſunt Philoſopho non minus in Philoſophia morali, quam civili, ne ſibi jam conſecutus videatur, quæ adhuc in quærendorum numero ſunt, & a veritate inquirenda deſiſtat, quam detegere in poteſtate ipſius erat modo præjudicio iſto non habuiſſet mentem præpeditam.

§. 308. Pars theorica Aſtronomiæ ad perficiendum intellectum, ut eodem extra Matheſin utaris, plurimum confert, modo omnem afferas attentionem ad methodum

dum tantopere a nobis commendatam & tam sollicite inculcatam. Capite primo & secundo, in quibus de natura solis ac lunæ, ceterorumque planetarum tam superiorum, quam inferiorum eorumque satellitum agitur, docentur, quæ ad Physicam magis, quam Astronomiam spectant, etsi Astronomus jure suo sibi ea arroget, quæ observationibus suis debentur. Quamobrem hinc discere licet, quomodo utiliter in Philosophia naturali seu Physica sit versandum, nimirum quomodo quærendæ sint observationes communes, quæ sua veluti sponte sese offerunt, quam studio quæsitæ, ac inde a posteriori colligantur propositiones, quas a priori detegere non dabatur principiis ad ratiocinandum necessariis deficientibus. Nos in Physica dogmatica, quam idiomate patrio evulgavimus, eandem viam ingressi sumus. Etsi autem facilis videatur hæc methodus, non tamen adeo facilem deprehendet, quantum putat, qui eadem rite uti voluerit. Nimirum acumine nonnisi multa exercitatione acquisito opus est, ne observationibus inserantur, nisi quæ sensui patent, ut eædem ab omni prorsus vitio subreptionis, quod in Logica vocamus, sint liberæ: qua in re multum peccatur a Medicis, utut virorum experientissimorum titulum quasi sibi proprium dudum consecutis. Neque facilius est facta, quæ observantur, notione distincta comprehendere & verbis aptis singula in eadem contenta enunciare, ut certi quid inde concludi possit. Artis præterea est nec plus, nec minus inde colligere, quam certo ratiocinio inferri potest. Qui his accurate satisfacere voluerit, etsi in demonstrando nihil difficultatis deprehendat, nondum tamen ex voto omnia sibi succedere experietur. Qamobrem ad observationes, quas commemoramus, animum probe attendat, ut idea exemplaris eas rite describendi animo insinuetur; nec minorem attentionem afferat ad corollaria, in quibus propositiones ex iisdem eliciuntur, ut modum stabiliendi per observationes principia, seu ex iis eruendi propositiones comprehendat. Utilitatem non modo in Physica, verum etiam in ipsa Philosophia morali & civili experietur. Inprimis etiam eandem

dem animadvertet, qui Medicinam ad majorem certitudinem perducere voluerit. Sed memini me de hiſce jam plura dixiſſe in Horis ſubſecivis, cum de Medico Aſtronomum imitante verba facerem. Non inanem operam ſumet, qui ea, quæ in Logica de experientia præcipiuntur, cum obſervationibus ac inde deductis propoſitionibus confert: ita enim facilius intelliget regulas methodi, quas proprio Marte abſtrahere non poterat. Immo praxin Logicæ quoad hanc partem hoc pacto ſibi comparabit. Qui novit, quantam utilitatem nobis afferat cognitio a poſteriori acquiſita; eum nunquam pœnitebit ſtudii, quod in methodo hac intimius perſpicienda collocaverit.

§. 309. Theoricam tradidimus juxta hypotheſin *Copernici* atque *Kepleri*, nimirum ſuppoſito Terræ motu & orbitis planetarum ellipticis, in quibus Planetæ ea lege incedunt, quemadmodum ſagacitate ſua primus detexit *Keplerus*, propterea quod ſic prodit theoria cum cœlo omnium maxime conſentiens. Etſi autem methodum *Keplerianam* expoſuerimus computandi loca planetarum, non tamen negleximus, quæ recentiorum induſtria, poſtquam Geometria & Aſtronomia magis exculta fuit, ad ejus perfectionem ulteriorem acceſſerunt. Quodſi tamen quis tertium cognitionis gradum intendit, ei ſuademus, ut, probe intellectis iis, quæ de motu Planetarum elliptico traduntur, Aſtronomiam quoque veterem perluſtret, qualem tradidit *Ptolemæus*, juxta Epitomen a *Regiomontano* factam, & in ſubſidium vocato *Riccioli* Almageſto, in quo exponuntur, quæ ad eam magis excolendam poſt eum acceſſerunt. Hinc enim omnium optime addiſcet, quomodo Philoſophia naturalis per hypotheſes ſit excolenda, ubi ad veritatem liquidam pertingere non licet, & eundem morem imitabitur in Medicina ad certitudinem ſucceſſive evehendam, immo in reliqua etiam Philoſophia, præſertim practica, ac ipſa praxi vitæ humanæ. Equidem non ignoro eſſe hodie nonnullos, qui omnem hypotheſium uſum in Philoſophia naturali & Medicina damnant; ſed hi propter abuſum ipſum etiam uſum rejiciunt:

ciunt:

ciunt: id quod ſine ſcientiæ incremento haud quaquam facere licet. Diximus nonnulla huc ſpectantia in Diſcurſu præliminari de Philoſophia, quem Logicæ præmiſimus, methodum philoſophicam explicantes. Laudant quidam *Newtonum*, quod ex Philoſophia naturali eliminaverit hypotheſes, qui tamen hypotheſibus indulget in iis ipſis, in quibus eum ab iisdem abſtinuiſſe exiſtimant. Quid enim attractio ſeu gravitas univerſalis, quæ per modum attractionis repræſentatur, aliud eſt quam hypotheſis, quæ in gratiam quorundam phænomenorum ſumitur, & ad omnem deinde materiam extenditur? Immo nonne explicatio ſyſtematis mundani, quæ præcipua pars eſt Principiorum Philoſophiæ naturalis mathematicorum, per motum projectionis & gravitationem in ſolem aut centrum Planetæ primarii hypotheſis philoſophica eſt, quam *Hevelius* in Cometographia ad imitationem motus projectorum a *Galilæo* detecti imaginatus eſt & quæ in Matheſi utiliter ſurrogatur in locum hypotheſeos naturæ, phænomenorum autem cauſas phyſicas non attingit, quas ſcrutari debet Phyſicus? Facile quidem largior hoc non videre eum, qui ſoli Matheſi aſſiduam operam navavit ac ideo notionibus imaginariis animum imbutum poſſidet: extemplo tamen videt, qui cum Matheſeos ſtudio Philoſophiæ, præſertim Metaphyſicæ, ſtudium conjunxit. Sed mittamus hæc & per nos ſuo quisque abundet ſenſu. Videamus potius, quomodo in cognoſcenda methodo per hypotheſes cognitionem humanam promovendi ſit progrediendum. Quemadmodum in anterioribus obſervavimus, omnem cognitionem humanam initium capere ab obſervationibus communibus; ita ſimiliter de parte Aſtronomiæ theorica idem dicendum. Ex obſervationibus communibus innotuit motus proprius ſolis (§. 27 *Aſtron.*), quo ſcilicet indies ab occaſu verſus ortum certo intervallo promovetur (§. 30 *Aſtron.*), non tamen tanquam verus, cum applicata Matheſi ad obſervationem conſtet (§. 571 *Aſtron.*), motum ſolis eodem modo e Tellure ſpectari, ſive ipſe circa terram intra orbitam quieſcentem revera moveatur, ſive Terra circa ſolem

quiescentem feratur. Quando itaque Astronomus sumebat, Terram quiescere & Solem motu annuo circa eandem ab occasu in ortum moveri; quod sumebat, hypothesis erat, quæ admisso motu vertiginis Telluris hypothesi naturæ æquipollet, si quod sumitur a veritate alienum, admisso autem motu communi tanquam vero hypothesis nonisi imaginaria est, cui adeo in Mathesi quidem locus conceditur, minime autem in Physica. Finge jam Astronomum noluisse uti hypothesi: nemo Astronomiæ gnarus diffitebitur, eum statim in limine nobilissimam hanc scientiam deserere debuisse, nulla spe ad veritatem liquidam perveniendi relicta absque conjecturis hypothesi innixis. Immo si quis, posito motu communi tanquam vero, hypothesin imaginariam de motu solis communi in Philosophiam naturalem tanquam veritatem inferre voluisset, ecquis sanus Philosophus hoc approbare potuisset, propterea quod ea satisfacit Astronomo ad cognitionem mathematicam motus proprii solis acquirendam? Ex observationibus itidem communibus, sed majore attentione factis, constabat, solem ab eodem puncto digressum ad idem redire. Hinc pronum erat inferre, quod sol motu proprio feratur per lineam in se redeuntem, intra cujus ambitum collocata Terra. Enimvero cum infinitæ sint lineæ in se redeuntes, quemadmodum ex Geometria constat; quæstio incidebat, quænam linearum in se redeuntium sit orbita solis. Ex Geometria elementari notum erat, in harum numero esse circulum, cujus proprietates & symptomata sunt magis obvia quam ceterarum. Sumebant igitur Astronomi per modum hypotheseos, orbitam solis esse circularem. Quodsi hypothesi uti noluissent, non sumendum esse contendentes nisi quod sit demonstratum; imposibile fuisset, ut theoriam motus solis cœlo consentientem detegerent, & Astronomia adhuc deserta & inculta jaceret. Enimvero quemadmodum in veritate investiganda accidit, ut, si uni quæstioni satifacias, quantum datur, nimirum vel veritatem detegendo, vel conjecturæ locum faciendo, enascantur aliæ; ita etiam in casu præsenti jam quærebatur,

in quonam puncto intra ambitum circuli sito posita sit Terra Ex Geometria elementari tyronibus notum est, circulum AHPI habere centrum C, a quo singula puncta peripheriæ AHPI æqualiter distant. Quæstio igitur huc redibat, num Terra sit in centro orbitæ C, an vero extra centrum veluti in T. Eam dirimere non licebat, nisi denuo interea alterutro assumto tanquam vero, consequenter confugiendo ad hypothesin. Nullum adeo est dubium, quin primus inventor sumserit veritatis investigandæ gratia, Terram esse in centro C. Inquirendum ergo erat, quomodo loca solis definiantur ad datum tempus in hac hypothesi, ut locus solis computatus cum eo, qui per observationem eruitur (§.203 *Astron.*), conferri sicque hypothesis ad examen referri posset. Hoc ubi investigare volebat Astronomus, cum per principia Geometriæ elementaris ipsi perspectum esset, si arcus AD & DE sint æquales, angulos ACD & DCE esse æquales (§.141 *Geom.*), nova incidebat quæstio, utrum sol motu æquabili incedat in orbita sua, ut arcus AD & DE æquali tempore percurantur, an vero inæquabili, ut iisdem arcus absolvantur tempore inæquali. Nemo non videt, hic denuo confugiendum fuisse ad hypothesin, alterutrum horum assumendo tanquam verum, donec examen hypotheseos per observationes decretorias proderet quod certum est. Cum motus æquabilis sit uniformis & intellectu facilior inæquabili; legibus artis conjectandi, quibus in assumendis hypothesibus locus est, conveniens erat supponere, quod sit æquabilis. Unde enascebatur hypothesis solis concentrica, qua sol supponitur motu æquabili incedere in orbita sua secundum signorum successionem, Terra in centro ejus collocata. Atque hoc pacto hypothesis sufficienter determinata erat ad calculum geometricum instituendum, ut adeo non alia re opus esset, quam ratiocinando hinc colligere, quæ ad eum spectant. Si sol motu æquabili percurrit orbitam, arcus, quos percurrit AF & FG, consequenter etiam anguli ACF & FCG, sunt tempori proportionales. Quamobrem ut dato tempori respondens angulus ACF seu

Tab. IV. Fig. 41.

Tab. IV. Fig. 42.

Tab. IV. Fig. 43.

ſeu arcus AF computari poſſit, notum eſſe debet, quo tempore ſol integram orbitam percurrat: quod cum ſit facti, aliter innoteſcere non poterat niſi per obſervationem. Obſervari nimirum debebat tempore quodam locus ſolis in dato aliquo puncto A, ac porro obſervandum, quo tempore ad idem redeat punctum. Etſi autem initio indifferens videretur, quodcunque punctum eligatur; ubi tamen ad obſervationem accedebat Aſtronomus, non commode obſervari poſſe tempus advertit, quo ſol ad idem punctum promiſcue aſſumtum redit. Quoniam itaque planum æquatoris determinari poteſt independenter a theoria ſolis (§. 149 *Aſtron.*); commodiſſima videbatur huic inſtituto obſervatio appulſus ſolis ad æquatorem, modo conſtaret, æquatorem conſtanter ſecare orbitam ſolis in eodem puncto, ſeu aſtronomice loquendo puncta æquinoctialia eſſe fixa. Sumebatur hoc primum denuo per modum hypotheſeos & inquirebatur in modum obſervandi tempus, quo centrum ſolis ad æquatorem appellit. Et ſic incidebatur in armillas æquatoreales, quibus veteres obſervaſſe æquinoctia novimus. Quoniam ſic, etſi adhuc ruditer conſtare poterat, quantitas anni ſolaris, ſi momentum æquinoctii vernalis ſumebatur pro epocha, per regulam trium computari poterat locus ſolis ad datum quemvis diem in hypotheſi concentrica, quemadmodum docuimus (§. 672. 673 *Aſtron.*). Quodſi jam loca computata conferebantur cum obſervatis (§. 203 *Aſtron.*); illa cum his minime conſentire deprehendebantur, adeoque hypotheſin concentricam a veritate alienam eſſe palam erat. Quoniam igitur Terra intra ambitum orbitæ ſolis conſtituitur, centrum illius extra centrum hujus ſitum eſſe debet in hypotheſi circulari. Atque adeo in locum concentrici circuli ſumebatur per modum hypotheſeos circulus eccentricus, retento motu æquabili. Ponamus jam in C eſſe centrum orbitæ, in T centrum Telluris, in H punctum æquinoctiale unum, in I alterum. Repræſentabit ſchema hypotheſin ſolis circularem eccentricam. Inquirendum adeo erat, quænam ex ea conſequantur, ut denuo quæ inde colliguntur cum obſer-

Tab. V. Fig. 44.

observationibus, quibus inde deducta occasionem præbent, conferri possint. Quia nos solem ex puncto T intuemur, statim apparebat, distantiam ejus continuo variari, cum TS sit major ipsa TL, eamque in A esse maximam, in P minimam (§. 303 *Geom.*). Atque sic nascebatur notio Apogæi A (§. 636 *Astron.*) & Perigæi P (§. 635 *Astron.*), atque eccentricitatis solis TC (§. 639 *Astron.*). Enimvero jam incidebat quæstio, utrum æquinoctium vernale seu principium arietis supponendum sit in H, an vero in I, item in quo orbitæ solaris puncto, si ad eclipticam referatur, hæreat Apogæum A, quonam Perigæum P, & quanta sit eccentricitas TC. Nemo non videt confugiendum hic esse ad observationes, quales autem eædem esse debeant, ut sint decisivæ, ex hypothesi deducendum. Quodsi sol sit in S; patet distantiam ab Apogæo in centro orbitæ C videri sub angulo ACS; ex Tellure autem in T sub angulo ATS: quod cum ita sese habeat per integrum semicirculum HAI, distantia solis ab Apogæo semper minor videtur, quam revera est in eo semicirculo, in quo hæret Apogæum solis A. Ex adverso si sol sit in L, ex centro orbitæ distantia a perigæo PL videtur sub angulo PCL, ex Tellure in T autem sub angulo PTL, adeoque in semicirculo IPH continuo apparet major, quam revera est, (§. 239 *Geom.* & §. 209 *Optic.*). Consideremus porro solem in punctis æquinoctionalibus H & I. Tab. IV. Fig. 45. Quodsi spectetur ex centro orbitæ C, distantiæ ab Apogæo A nempe AI & AH videntur sub angulis rectis ACI & ACH, ut adeo sol videatur absolvisse semicirculum ab uno æquinoctio usque ad alterum, dum revera semicirculum HAI percurrit, in quo Apogæum A hæret: enimvero ex Terra spectantur distantiæ AI & AH ab Apogæo A sub angulis ATI & ATH, qui sunt rectis minores (§. 239 *Geom.*), consequenter HAI minor semicirculo apparet (§. 209 *Optic.*), adeoque sol minus temporis spatium consumere videtur in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A, quam in altero IPH, in quo hæret Perigæum P. Jam cum porro in semicirculo HAI distantiæ solis a centro Terræ T sint majores distantiis a centro Tab. IV. Fig. 44.

centro orbitæ, veluti TS major CS, & in Apogæo A distantia TA sit maxima (§. 303 *Geom.*), in semicirculo autem IPH distantiæ solis a Terra sint minores distantiis a centro orbitæ, veluti TL minor CL, & in Perigæo P distantia TP sit omnium minima (§. §. *cit. Geom.*); sol ipse major videri debet in semicirculo IPH, in quo est Perigæum, quam in semicirculo HAI, in quo est Apogæum A. Quodsi jam meditationem cœptam eodem, quo hactenus, modo continuare velimus, observationes determinare licebit, quales esse debeant, quæ desiderantur. Sed ne justo prolixiores simus, filum abrumpendum est, contentis monstrasse viam, qua sit eundum, quantum ad præsens institutum sufficit. Annotabimus potius alia nonnulla, quæ usui esse possunt illis, qui Matheseos studio intellectum perficere gestiunt, ut eodem rite extra eandem utantur.

§. 310. Ex iis, quæ diximus, clarissime perspicitur, quomodo in investigandis veritatibus a posteriori sit procedendum & quam indispensabilis usus sit hypothesium, ut, si iisdem uti nolueris, nulla supersit spes veritatis unquam detegendæ. Non est quod excipias hypothesibus equidem locum esse concedendum in inveniendo, ab iis tamen esse abstinendum in libris, qui publici juris fiunt. Etenim ubi veritates ab iis, quæ nobis perspecta sunt, principiis procul remotæ sunt, ut a priori denegetur ad eas accessus; non semper unius hominis est ea absolvere, quæ a posteriori accessibilem faciunt: quin potius haud raro sociæ requiruntur operæ, cum hic valeat illud pervulgatum, oculos plures plus videre quam oculum unum, & subinde qui accessum parare studet, laborem cœptum aliis continuandum relinquere tenetur. Qui animum ad ea attendit, quæ de theoria Solis investigata modo annotavimus, dictis facilem præbebit aurem, etsi rationes non perspiciat, quas dare poteramus, si prolixioribus esse liceret. Quamvis igitur examine instituto hypotheses deprehendantur a veritate alienæ, non tamen ideo censendæ sunt inutiles, propterea quod aberrando a veritate deducimur ad veritatem, ubi metho-

methodo conjecturali opus est. Unde memini me sæpius auditoribus meis inculcasse, deberi etiam a veritate aberrantibus suas laudes, ubi nobis errandum fuisset, nisi ipsi priores errassent. In aliorum enim meritis censendis æqui esse debemus, ne quid admittamus, quod contra officium boni viri est. Nemo Astronomus vitio vertet ei, qui primus de theoria Solis cogitavit, si hypothesin motus æquabilis in orbita concentrica excoluerit, utut successores eam a veritate alienam examine per observationes instituto deprehenderint. Videt enim eum fecisse, quod initio faciendum erat, & aliis perficiendum reliquisse, quod ipsi perficere vel non licebat, vel quod perficere nolebat. Quodsi Physici Astronomos imitati fuissent, ex observationibus communibus eliciendo hypotheses & has per observationes studio quæsitas & experimenta examinatas corrigendo ac perficiendo; nullus profecto dubito, quin Philosophia naturalis dudum magis promota fuisset. Idem dicendum de Medicina, de qua jam disertius dixi in Horis subsecivis, cum Medicum Astronomos imitantem in scenam producerem.

§. 311. Discimus etiam, quales esse debeant hypotheses, quibus in Philosophia concedendus est locus, nimirum quas methodus conjecturalis suggerit, qua in veritate investiganda utendum. Sumitur nimirum in gratiam nonnullorum phænomenorum, unde ratio eorum reddi potest, ac deinde inquiritur, num ceterorum quoque per id, quod sumitur, ratio reddi possit, quatenus ea, quæ ex hypothesi a priori colliguntur, conferuntur cum iis, quæ observantur. Perinde enim est, sive antea observaris phænomena & postea demum inquiras, num eadem a priori ex hypothesi deducantur, sive primum a priori deducas ex hypothesi, quæ inde necessario consequuntur, & postea demum observes, num eadem quoque in rerum natura ita sese habeant. Patet autem certum esse debere, quod id, quod sumitur, in se spectatum possibile sit. Ita sumebatur in Astronomia, orbitam Solis esse circulum. Certum nimirum erat, eam esse lineam in se redeuntem.

Quamobrem cum circulus ſit linea in ſe rediens, in ſe ſpectatum non impoſſibile eſt, ut orbita ſolis ſit circulus. Non igitur probamus commentitias hypotheſes, quas hodie bene multi in Philoſophiam naturalem invehunt, quidvis pro lubitu fingentes, utut demonſtrare minime poſſint talia, quæ ſibi imaginantur, in rerum natura exiſtere poſſe. Immo facile largimur, iſtiusmodi commenta non eſſe qualitatibus occultis ſcholaſticorum meliora. Quamobrem in Phyſica, quam patrio ſermone edidimus, maluimus phænomena ex phænomenis explicare, nec in hypotheſibus admittere niſi quæ ex obſervationibus colliguntur, ne incerta cum certis confundantur & in inventorum numerum referantur, quæ ſunt in quæſtionum numero. Omnium minime autem probamus, ſi ex commentitiis hypotheſibus rationes reddantur in Medicina, quippe quæ non modo uſum nullum in praxi habent, verum etiam nocent, ſi in praxi earum rationem habere volueris. Et huc dubio procul animum adverterunt, qui Philoſophiam naturalem & Medicinam ab hypotheſibus liberam eſſe voluerunt, atque inter theoriam phyſicam & medicam in arte ſalutari diſtinxerunt. Propter abuſum tamen hypotheſium non tollendus erat uſus; ſed hypotheſes ad inveniendum veritatem aptæ diſcernendæ a figmentis, quæ in eorum locum ſurrogantur.

§. 312. Liquet porro ex iis, quæ de theoria Solis analytice perveſtiganda diximus, in veritate a poſteriori inveſtiganda perpetuum eſſe debere experientiæ ac rationis connubium. Neque enim ex obſervationibus communibus, quæ primo loco aſſumuntur, quicquam concluditur niſi in ſubſidium vocatis principiis geometricis. Immo ipſæ hypotheſes inde non derivantur ratiocinando niſi vi illorum principiorum. Et ubi ex hypotheſi a priori deducenda, quæ ex ea neceſſario conſequuntur, & ſine quibus eædem examini ſubjici nequeunt, principiis mathematicis denuo opus habemus, neque abſque horum ope obſervationes in hunc uſum capiendæ determinari poſſunt. Quamobrem ſi Aſtronomos in Philoſophia naturali & eidem

agnata Medicina imitari velimus; cogitandum erat de theoria demonſtrativa. Ontologia, qualem dedimus, ſuppeditat notiones directrices, de quibus plura diximus in Horis ſubſecivis. Et hiſce inprimis locus eſt, ubi analyticam viam ingreſſuri colligere debemus, quid ſit faciendum, quamvis etiam principia ontologica conducant ad concluſiones ex obſervationibus & experimentis eliciendas. Subinde etiam uſui ſunt principia mathematica, de quorum ad experimenta applicatione nonnulla diximus in ſuperioribus capitibus quinto, ſexto & ſeptimo, cum de ſtudio Mechanicæ, Hydroſtaticæ, Aërometriæ, Hydraulicæ & Opticæ ageremus. Ex obſervationibus quoque atque experimentis eliciendæ ſunt propoſitiones determinatæ eo modo, quem in Logica capite 2. ſect. 2. part. 2. expoſuimus, cum methodum formandi judicia intuitiva & notiones a poſteriori traderemus, atque ex hiſce principiis demonſtranda ſunt alia, quæ a priori inde deducuntur. Hoc enim pacto condenda forent elementa Philoſophiæ naturalis, eundem uſum promittentia, quem habent elementa *Euclidis* in Matheſi. Quamdiu enim deſiderantur principia certa, quibus in ratiocinando utaris, luxurianti imaginationi omnia tribuuntur atque adeo non mirum, ſi abortus imaginationis pro veritate in Philoſophia & theoria Medica obtruduntur. Neque mirum videri debet, quod de eodem ſubjecto meditati incidant in cogitationes toto cœlo diverſas, ita ut unus per principia chymica explicare velit, quod alter explicat per mechanica, alius per figmenta ad imitationem cauſarum ſibi notarum, quæ effectum ei ſimilem producunt, cujus cauſa vel ratio quæritur. Abſtinemus ab exemplis, ne ſint odioſa. Cenſere alios videri nolumus, dum docere nobis propoſitum eſt. Quodſi Deus nobis vitam animi ac corporis vires conſervaverit, ut ad Phyſicam, Philoſophia practica abſoluta, progredi licuerit; operam dabimus, ut iſtiusmodi principia ſtabiliamus, ne facultatibus inferioribus tribuatur, quod ab intellectu expectandum. Eorum autem neceſſitatem in dubium revocare nequit, qui facultates cognoſcendi earumque uſum per-

perſpexit. Immo ſi diſtinctam ratiocinii notionem ex Logica hauſit, eam agnoſcere tenetur. Obſervatio enim & experimentum non ſuppeditat niſi propoſitionem unam, quæ in ſyllogiſmo minoris vicem tuetur. Quodſi ergo hinc inferenda concluſio, principio opus eſt, quod majoris locum occupat. Cumque non ſemper unico ſyllogiſmo inferatur concluſio, pluribus quoque principiis opus. Quæ enim ratio eſt, cur multi multa cumulaverint experimenta, multas collegerint obſervationes rariores, nihil tamen inde intulerint, quod ad alia ratiocinando detegenda prodeſſet, ut phænomena nondum obſervata prævidere ac prædicere liceret? Sane non alia, quam quod deficiant principia, quorum ad experimenta & obſervationes applicatione inferantur concluſiones. Obſervationes communes, quæ baſis ſunt omnis cognitionis aſtronomicæ, in vulgus notæ. Cur vero Aſtronomus hinc colligat, quæ alii inde colligere nequeunt, non alia ratio eſt, quam quod ille principia Geometriæ, quæ ipſi perſpecta ſunt, ad illas applicet, his vero nulla ſint principia, quæ ad easdem applicare poſſint. *Robertus Boyle* multa dedit de qualitatibus ſenſibilibus experimenta: quid vero hinc colligit? Nil niſi generalem hanc propoſitionem, quæ in Coſmologia ex principiis metaphyſicis demonſtratur, omnia in natura fieri mechanice. Provocare poteram ad Chymiam, cujus theoria fœcunda ad inveniendum apta adhuc deſideratur, & uſus in ſcientia naturali prædicatur, ſed non oſtenditur: ſed in re per anteriora ſatis manifeſta prolixiores eſſe nolumus.

§. 313. Aſtronomia quoque nos docet, conjunctis viribus ſcientiam eſſe excolendam & inventa anteceſſorum eſſe emendanda, perficienda, confirmanda, prout occaſio tulerit, conſequenter quæ ab aliis tradita ſunt ante addiſcenda, quam ad ſcientiam amplificandam animum appellas. Quantum hic peccetur ab aliis, qui Aſtronomorum non ſequuntur morem, in vulgus proh dolor! notum eſt. In inventorum numero eſſe volunt, qui diſcentium ſubſellia occupare debebant. Quæ ab aliis tradita ſunt contemnunt, antequam ea

ea didicerunt. Sibi soli sapere videntur, qui ex aliena doctrina sapere debebant. Sibi soli sufficere videntur, qui alieno auxilio maxime indigent. Quo quis indoctior, eo in censendis aliis audacior. Vana virium fiducia summa audent, quæ nullo negotio a se confici posse putant, cum vulgaribus capiendis eædem vix ac ne vix quidem sufficiant. Non amore veritatis ducuntur, sed vanæ ambitioni litantes vulgo imperito ut placeant unice student. Argumentis extrinsecis pugnant, qui rationes intrinsecas ut perspicerent, operam dare debebant. Quodsi Astronomi iisdem moribus fuissent præditi, nihil adhuc præclari de motu siderum sciretur, nec phænomena cœlestia tanta certitudine prædicere daretur, quemadmodum hodie ab Astronomis fieri solet. Quantum, quæso, promota fuit scientia astronomica altercationibus istis de motu Telluris? Quantum vero incrementi debet hypothesi terræ motæ legitime excultæ? Utinam igitur omnes Astronomiæ operam navarent eamque analytice expenderent, quemadmodum paulo ante inculcavimus, quotquot ad scientias excolendas animum appellere decreverunt. Ego hunc fructum longe maximum judico, qui ex studio astronomico sperari potest, nec me pœniteret temporis quod in eo consumsi, etiamsi alium nullum inde reportassem. Discant hinc, quantum sibi desint, qui studium Astronomiæ negligunt hac sola de causa, quod nullam ejus utilitatem esse sibi persuadeant in eo vitæ genere, quod olim sequi statuerunt. Quasi vero ea mentis metamorphosis, quæ a studio astronomico expectanda, nullius momenti sit in quolibet vitæ genere, quod eruditi sequi tenentur. Vulgo quidem ingeminatur:

> Didicisse fideliter artes
> Emollit mores, nec sinit esse feros:

quod etsi multo laxiore sensu verum sit, quam vulgo accipitur, in praxi tamen parum attenditur. Nemo enim quærit, quantum studium aliquod faciat ad mores emolliendos, aut, ut clarius dicam, ad omnem facultatum nostrarum promptum & genuinum usum.

§. 314. Occurrendum vero

est

est objectioni, quam forsan nonnulli movere poterant Astronomiæ non modo periti, verum etiam in eadem perficienda utiliter versati. Existimabunt enim, eo quem diximus (§. 309), modo veritatem astronomicam non fuisse detectam. Incessisse inventores per multas ambages, antequam ad viam, qua sit eundum, ipsis pervenire datum fuerit, ac multis frustra tentatis tandem reperisse, quod ad progressum ulteriorem faceret. Immo plures in deviis substitisse, antequam uni licuerit esse adeo felici, ut in viam rectam incideret. Multum haud raro temporis præterlapsum fuisse, antequam surgeret Astronomus, qui quid daret, cui in Analysi nostra locus esse poterat. Non igitur tam ardua, qualia sunt Astronomorum inventa, tanta facilitate inveniri potuisse, quantam præ se fert analysis nostra. Ubi veritates detectæ sint, earum investigationem videri obviam, quæ prorsus inaccessæ videntur, ubi adhuc ignorantur. Non nego, si facta sola respicias, vera omnino esse, quæ dicuntur: neque enim nobis difficile foret exemplis ea confirmare. Verum enimvero nobis non jam quæstio est de eo, quod factum est; sed de methodo, qua veritas latens tandem in apricum producta. Quodsi regulæ methodi, quibus legitimus facultatum nostrarum usus præcipitur, primis inventoribus distincte fuissent perspectæ, nec defecisset theoria principia ad ratiocinandum necessaria suppeditans aut hæc satis familiaria illis fuissent, in ambages inutiles non incidissent, sed rectam, qua eundem est, viam statim animadvertissent, nec in devia delapsi fuissent, multo minus in iisdem diu substitissent. Breviori adeo tempore ea dedissent, quæ in Analysi nostra locum merentur, nisi quantum observandi opportunitas moram injecisset. Quando in apricum productum, quod quærebatur, quonam usu facultatum nostrarum id fuerit factum, reperire licet ac tanto quidem evidentius id patet, si quis in principiis Psychologicis fuerit versatus. Non igitur inutile, immo potius necessarium est, nisi incrementum artis inveniendi negligere voluerimus, ut in eundum omni animi contentione inquiramus, atque eum ad distinctas notiones revo-

revocemus, ut conſtet, quomodo certa methodo reperiri potuiſſet ab uno, quod nonniſi poſt multa tentamina, in quibus caſui multum tribuitur, detectum. Qui ea perpendit, quæ de Logica artificiali in Prolegomenis Logicæ inculcavimus, dictis facile aſſentietur. Homines multi conſiderantur inſtar unius, in quo nonniſi locum habet rectus facultatum, quem fecerunt, uſus rejectis aberrationibus, quæ vel uſus hujus defectui, vel abuſui tribuendæ. Quodſi enim extitiſſet homo, qui rectum facultatum ſuarum uſum absque ulla aberratione facere potuiſſet, is nonniſi ea feciſſet, quæ ad detegendam veritatem latentem ſpectaſſent. Quemadmodum in moralibus obſervandum illud *Catonis*, ut ex alieno caſu diſcas, quæ vites, & nonniſi ea imiteris, quæ ad rectum facultatum uſum faciunt; ita ſimiliter hoc tenendum in Arte inveniendi & omni veritatis cognitione. Fictio illa, quæ hic admittitur, nihil abſurdi habet, atque longe utiliſſima eſt. Meretur itaque attentionem quoad omnia, quæ a facultatum humanarum uſu proficiſci poſſunt. Qui ſtudio Matheſeos intellectum peficere vult, non aliud intendi, quam ut rectum conſequatur facultatum uſum, aberrationes omnes, quantum datur, poſthac evitaturus. Animum igitur attendere debet ad ea, quæ uſum iſtum loquuntur, parum ſollicitus, utrum in eodem, an in diverſis ſubjectis ea ſint obſervanda, modo conſtet, nonniſi his factis ad ſcopum contendiſſe inventores, cetera vero ipſis nihil profuiſſe, ſed inutiles tantummodo moras periſſe ab illis minime intentas, ſed moleſte latas. Niſi hoc obſervaveris, aliorum exempla & caſus tibi parum proderunt ad perfectionem propriam promovendam, quam tamen metam eſſe in Philoſophia practica univerſali demonſtravimus, ad quam continuo contendere tenemur, niſi obligationi noſtræ naturali deeſſe ac felicitati propriæ obicem ponere velimus.

§. 315. Nemo non videt ampliſſimum hic eſſe dicendorum campum, ſiquidem omnia, quæ ad præſentem ſcopum ſpectant, minutiſſime perſequi velimus: ſed tantæ prolixitati ſeſe immergere non patitur præſens inſtitutum.

tum. Neque etiam diffitemur, quod, ſi quis ulterius progredi voluerit, ei alios quoque autores conſulendos eſſe tum veteres, quorum placita collegit *Ricciolus* in Almageſto, tum recentiores, quos ſuperius laudavimus, cum ſcriptores rerum aſtronomicarum recenſeremus. Quodſi enim ante ſibi cognita atque perſpecta reddiderit, quæ nos noſtro more explicavimus, ut ſine hæſitatione in legendis aliorum ſcriptis progredi poſſit, quam ad hæc legenda accedat, & ordinem temporis obſervet, quo prodita fuerunt, ut pateat quodnam cogitata anteriora adjumentum attulerint ad poſteriora; quæ exempli loco modo in medium protulimus haud difficulter imitabitur, præſertim ſi in diſciplinis anterioribus more noſtro fuerit verſatus, nec ullibi ſuam paſſus deſiderari operam. Hoc conſilium qui ſequi voluerit ſua ſponte animadvertet, quomodo cum Geometria creverit quoque Aſtronomia. Sane quæ *Keplerus* dare non poterat utut ſagaciſſimi ingenii vir, non invita Minerva tentarunt alii, poſtquam noſtro ævo Geometria magis exculta & ad multo majus faſtigium evecta, quam *Kepleri* tempore attigerat. Eſt etiam Algebræ ſuus uſus in parte Aſtronomiæ theorica, cujus latiſſimus uſus per univerſam Matheſin. *Kepleri* ævo adeo ignorabatur, ita ut ne ſomniando quidem eum prævidere daretur, nec mirari debeamus, quod abjecta ſubinde vir ſummus de Algebra ſenſerit. In gratiam igitur eorum, qui Algebræ ſtudio delectantur, unum alterumque ſpecimen dedimus, quo præclarum ejus in Aſtronomia uſum inſinuaremus. Plura ſuppeditabit *Gregorius* in Elementis Aſtronomiæ, & illuſtria admodum exempla petere licet ex Commentariis Petropolitanis.

§. 316. Erunt forſitan nonnulli, qui ſibi perſuadebunt, inanem operam ſumi in tractatione analytica ſtudii aſtronomici, propterea quod absque ea Aſtronomi ſua invenerunt ac hodienum inventa anteceſſorum perficiant noviſque acceſſionibus nobiliſſimam ſcientiam locupletent. Enimvero facilis eſt reſponſio. Qui quæ ab aliis inventa ſunt attenta mente conſiderant, eorum animis idea quæ-

dam exemplaris usus facultatum sese insinuat ad particulare hoc objectum restricta, quam etsi confusam imitantur quoad idem objectum nescii omnino, quemnam facultatum usum faciant, quemadmodum accidit iis, qui in tractandis negotiis imitantur alios in casu simili theoria omni destituti. Neque diffitendum hac imitatione niti omnem praxin artis inveniendi in Astronomia, quidni etiam in Mathesi reliqua, si a regulis Algebræ seu Analyseos Mathematicæ recesseris, quamvis etiam in Algebræ praxi huic imitationi multus sit locus. Quam multum vero in hac imitatione tribuatur casui, & quam multis ideo tentaminibus locus sit, meum non est in præsenti exponere. Enimvero tota nostra tractatio analytica non alio tendit, quam ut idea ista confusa revocetur ad distinctam, quo facto imitatio, quæ fuerat empirica, rationalis evadit, & multo latius extenditur, immo etiam casui subducitur. Nos jam potissimum intendimus, ut Philosophus imitetur Astronomum in qualibet Philosophiæ parte, immo eruditus quicunque in suo scibili, cum de intellectu studio Matheseos perficiendo agamus, ut eodem extra Mathesin rite utamur. Hæc vero imitatio expectari nequit ab idea confusa, quæ Astronomo prodest in Astronomia excolenda. Immo si qui eam audent, quam sint infelices satis patet. Non deessent exempla illustria, quibus hoc doceri poterat, nisi consultius existimaremus ab iis producendis abstinere.

## CAPUT X.

# De Studio Geographiæ, Gnomonicæ & Chronologiæ.

§. 317.

Geographia mathematica, cum qua hic nobis negotium est, multum affinitatis habet cum Astronomia, præsertim sphærica, a cujus principiis tota pendet. Unde etiam veteres eandem ab Astronomia

nomia non ſepararunt, ſed quæ in eadem traduntur, ad Aſtronomiam retulerunt. Quamobrem quæ de ſtudio Aſtronomiæ ſphæricæ dicta ſunt, de Geographiæ quoque ſtudio tenenda ſunt. Et quoniam Geographia, quemadmodum modo diximus, principiis Aſtronomiæ ſphæricæ præſertim nititur; ad eam accedere minime debet niſi eorundem gnarus. Quemadmodum itaque in Elementis noſtris Aſtronomiam Geographiæ præmiſimus, ita etiam in Aſtronomia ante verſari debet, quam ad Geographiam pedem promoveat, qui inoffenſo pede in hac progredi voluerit. Quodſi quis extra ſyſtema Geographiam mathematicam tradere voluerit, ei multa explicanda ſunt, quæ in Aſtronomia docentur, quemadmodum etiam a nonnullis factum vidimus.

§. 318. Qui nonniſi hiſtoricam Geographiæ cognitionem ſibi acquirere ſtudent, iis ſufficiunt, quæ ad Globum terreſtrem atque mappas geographicas & tam illius, quam harum uſum cognoſcendum faciunt. Ex capite itaque primo ea addiſcere tenentur, quæ de figura Telluris & circulis in ejus ſuperficie concipiendis habentur, prætermiſſis problematis ad inveſtigandam ſemidiametrum Telluris ſpectantibus. Sufficit iisdem notaſſe, quæ de quantitate ſemidiametri Telluris & unius milliaris Germanici in pedibus Pariſinis leguntur (§. 43 *Geogr.*). Curioſior ſi quis fuerit, addere poteſt magnitudinem ſuperficiei ac ſoliditatis Terræ (§. 44 *Geogr.*). Nec uſu caret, ſi Tabulam, quæ in ſcholio problematis 7 (§. 46 *Geogr.*) exhibetur, de convertendis gradibus ſingulorum parallelorum in milliaria Germanica inſpiciat. Ex capite ſecundo definitiones diſtantiæ locorum, longitudinis item ac latitudinis ſibi perſpectas reddere tenentur & quod latitudo loci æqualis ſit elevationi poli notent, ut intelligant, quid ſibi velit Tabula Latitudinis & Longitudinis locorum (§. 60 *Geogr.*), prætermiſſis problematis de diſtantia locorum per Trigonometriam ſphæricam ſolvendis. In capite tertio ultra definitiones zonarum & tempeſtatum ſtatarum non progrediendum, additis theorematis 8 & ſequentibus, ſed absque demonſtrationibus.

nibus. Eadem fere tenenda ſunt in perluſtrando capite quarto, nimirum ut præter definitiones nonniſi theoremata pleraque absque demonſtratione notentur & uſus Tabulæ climatum (§. 138 *Geogr.*) inſpiciatur. Niſi quis curioſior fuerit, caput quintum ſicco pede tranſire poteſt, ex ſexto autem ſufficient definitiones. Ex ſeptimo diviſionem plagarum ad dignoſcendos ventos cognoſci perutile eſt, una cum theorematis de ventorum proprietatibus, quorum uſus eſt in dijudicandis tempeſtatibus vagis. Inprimis autem horum ſtudio inſervit caput 8 de Globi terreſtris conſtructione & uſu. Immo ſuademus ut Globus ſemper ad manus ſit in prima ſtatim tractatione Geographiæ, quo facilius intelligantur, quæ in anterioribus docentur. Tandem ex capite nono, quod de mappis Geographicis agit, nonniſi ea haurienda ſunt, quæ rudem quandam earundem ideam animo ingenerant & uſum ipſarum explicant. Nimirum ad manus eſſe debent mappæ tum univerſales, tum particulares, & addiſcendum, quid denotent lineæ in iisdem deſcriptæ, quidque indigitent numeri in margine adſcripti. Ita enim conſtructio intelligitur, quantum ſufficit ad earum uſum: neque eo fine requiritur, ut quis modum conſtruendi mappas geographicas capiat. Paucis adeo horis ſtudium Geographiæ abſolvere poteſt, qui in hiſtorica ejus cognitione acquieſcit, ultra quam nemini progrediendum, qui aliud non intendit, quam ut mapparum geographicarum ideam quandam diſtinctam animo concipiat, quarum hodie promiſcuus omnium uſus eſt.

§. 319. Qui ad ad ſecundum cognitionis gradum adſpirant, elementa Geographiæ integra eo, qui a nobis conſcripta ſunt, ordine perluſtrare debent, obſervatis iis, quæ ad nauſeam usque inculcavimus, cum de ſtudio Aſtronomiæ ſphæricæ ageremus: neque enim inter theoremata ac problemata Aſtronomiæ ſphæricæ & Geographiæ ulla differentia eſt, cum utrobique ad primum mobile referantur, ſeu a motu communi ſolis & ſtellarum pendeant, ut adeo etiam olim præſertim problemata geographica ad problemata primi mobilis fuerint relata. Loquun-

quuntur demonstrationes, principia ubivis peti ex Astronomia. Unde me tacente intelligitur, scientificam Geographiæ mathematicæ cognitionem acquiri minime posse nisi ab eo, qui in Astronomia fuerit versatus. Equidem non desunt, qui, quæ de asciis, amphisciis, heterosciis & perisciis, nec non de antœcis, periœcis & antipodibus docentur, pro futilibus habent, quæ utiliter ignorentur; judicium tamen præcipitant, vel terminorum insuetorum sono delusi, vel ex eorum definitionibus non prospicientes doctrinæ usum. Quibus terminorum insuetorum sonus imponit, illi cum Scholasticorum terminis metaphysicis nondum intellectos comparant & quod de his inculcari audiverunt judicium, ad hos applicant cœca imitatione iis solenni, qui de rerum valore ex ipsarum notionibus per se statuere nesciunt. Oppido autem falluntur: termini enim geographici accuratis definitionibus explicantur, quæ optime intelliguntur, modo terminos eas ingredientes ex anterioribus habueris perspectos, non vero definitionibus magis obscurantur, quemadmodum a scholasticis fieri suevit. Præterea ex his ipsis definitionibus demonstrantur accurata methodo, quemadmodum in ceteris Matheseos partibus, quæ ad cognitionem Telluris mathematicam spectant, adeoque in Geographia prætermittenda non sunt (§. 1. *Geogr.*). Non minor est præcipitantia eorum, qui negant, quæ prospicere nequeunt. In Geographia mathematica doceri debet omnis differentia phænomenorum, quæ per universam Terræ superficiem a primo mobili pendent. Inter hæc vero etiam sunt umbrarum differentiæ, quæ corpora a sole illuminata projiciunt, & differentiæ longitudinum dierum atque noctium atque tempestatum statarum, nec non ortus & occasus stellarum. Has itaque cognoscere tenetur, qui omnem in diversis Telluris locis differentiam perspicere voluerit, etiamsi locum, quo ipse commoratur, nunquam fuerit egressus. Quæ ad umbras spectant, in doctrina de asciis, amphisciis, heterosciis & perisciis explicantur; quæ vero ad dierum & tempestatum statarum aliorumque phænomenorum agnatorum differentias per-

pertinent, doctrina de antoecis, perioecis & antipodibus continet. Non igitur nugæ inanes sunt, quæ hic demonstrantur, sed veritates necessariæ, non modo animum sciendi cupidum oblectantes, verum etiam aliis in posterum inveniendis inservientes. Non jam inquirimus in casus, quibus interest cognosci statum Telluris in dato loco quoad hæc phænomena. Qui enim nulla sciendi cupiditate flagrat, eum quoque parum movebit utilitas, quam nondum existimat suam, sed alienam judicat. Unicum moneri consultum duco de constructione mapparum geographicarum præsertim universalium. Mappæ universales non sunt nisi projectiones sphæræ in plano: unde sub hoc etiam nomine earum constructionem docuimus (§. 272 & *seq. Geogr.*). Non igitur diffitemur, si doctrinam de projectione sphæræ præmittere libuisset, quemadmodum sphæricorum elementa præmisimus Astronomiæ, multo concinnius constructionem istam demonstrari potuisse. Quoniam tamen brevitati consulere decrevimus, quæ de projectione sphæræ præsupponi debebant, ipsis demonstrationibus geographicis inseruimus. Non tamen ideo Elementa projectionis sphæræ tanquam inutilia rejicimus: probe enim novimus, quantus eorum sit usus tum in constructione Astrolabiorum demonstranda, tum etiam in projiciendis eclipsibus solaribus, quas projectiones hodie non inutiliter adhibent Astronomi. Quoniam vero nos ea non attingimus, in quibus potissimum usus illorum sese exerit; nec præter necessitatem theoriam nostrorum Elementorum multiplicare voluimus, abunde persuasi, quod nostrorum gnarus absque ulla difficultate ea aliunde haurire possit, siquidem iisdem habuerit opus.

§. 320. Abunde constat ex antecedentibus, qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, eos via analytica progredi debere, ut inquirant in artificia, quibus veritas, quæ demonstratur, in apricum fuerit perducta. Utimur in eruendis plerisque, quæ traduntur, Trigonometria, tam plana, quam potissimum sphærica. Quamobrem quæ in Astronomia eo fine dicta sunt, hic repetenda veniunt. Cetera ex prin-

principiis astronomicis, & geometricis, pauca quædam de umbris ex Opticis, communi methodo Logica deducuntur, adeoque patent per ea, quæ de usu Logicæ in veritate a priori investiganda docuimus in opere logico, & uberius explicata fuerunt in superioribus, cum de studio Arithmeticæ & Geometriæ elementaris ageremus. Non itaque opus est, ut diutius hisce immoremur, cum ad Geographiam accedere minime debeat, nisi Arithmeticæ, Geometriæ & Astronomiæ, immo etiam Opticæ gnarus. Equidem dubitandum non est, esse etiam Algebræ in solvendis problematis geographicis usum, etsi hactenus ad Geographiam parum appilicata fuerit. Neque etiam dubitamus fore ut, quemadmodum Algebra applicari cœpit ad partem Astronomiæ sphæricam seu problemata primi mobilis, in posterum non defuturi sint, qui solutiones problematum in Geographia adhuc desideratorum dabunt. Sed cum ea, quæ nostro scopo sufficere visa sunt, absque Algebræ auxilio tradi possint; hac vice consultius visum fuit a calculis algebraicis abstinere. Neque enim Elementis Matheseos omnia inserenda sunt, quæ hactenus fuerunt detecta; aut per ea ulterius detegi poterant, ne studium Matheseos per se satis amplum reddatur nimis diffusum & ejus faciamus desertores, quos ad idem allicere & ad ulteriora præparare intendimus. Quid quod nec nobis conveniat tempus in Mathesi consumere, quod Philosophiæ reformandæ impendere debemus, cum hodie non desint multi, qui Mathesi excolendæ utilem operam navant, nemo autem propemodum sit, qui similem Philosophiæ præstare velit. Unum tamen adhuc restat, quod silentio prætereundum non est. Constat hodie figuram Telluris non esse sphæricam, quemadmodum credidere veteres, sed potius sphæroidicam, prouti annotavimus (§. 4 *Geogr.*). Neque ignotum est, ope Algebræ in figuram Telluris inquisivisse non infelici successu Geometras præclaros. Problema adeo tam illustre non videbatur omittendum, quod præsertim præstantiam Analyseos recentioris tam aperte loquitur. Enimvero monuimus jam loco citato,

citato, ſub judice adhuc eſſe litem de vera Telluris figura. Quamobrem cum controverſia ratiociniis ſolis definiri minime poſſit, & figura ſphærica ſatisfaciat in Geographia, qualem tradere debuimus; a figura vera ejusdem determinanda abſtinendum erat; præſertim quod ea, quæ a nobis tradita ſunt de Analyſi moderna & ejus ad problemata phyſico-mechanica applicatione in Mechanica, abunde ſufficiant ad intelligendas analyticas ſolutiones problematis de figura Telluris, quas dederunt Geometræ recentiores. Elementa noſtra Matheſeos non eo fine conſcripſimus, ut Matheſeos cultores a lectione aliorum librorum avocemus, ſed ut eos ad eandem præparemus & aptos efficiamus non ſine multo temporis ac laboris compendio, & ut iis pervia ſit Matheſis, qui intellectus perficiendi gratia in eadem verſari debent, quo eodem felicius extra eandem utantur: id quod ex tota hac tractatione de ſtudio Matheſeos recte inſtituendo abunde eluceſcit.

§. 321. In gratiam eorum, qui intellectus perficiendi gratia in Geographia verſantur, ut eodem prompte extra eandem utantur, non eſt quod addam. Geometriam omnem methodo ſynthetica concinnavimus, qua uſi ſumus in Geometria elementari & aliis Matheſeos partibus, inprimis etiam in parte Aſtronomiæ ſphærica, ad quam proxime accedit. Quamobrem quæ eo fine ibidem inculcavimus, ea hic quoque obſervanda ſunt. Neque vero exiſtimandum eſt, propterea ſtudium geographicum tuto negligi poſſe, cum ab eo ſperandum non ſit, quod non jam dederint diſciplinæ aliæ, quibus ante operam navare tenemur, quam ad Geographiam pedem promoveamus. Etenim cum habitus omnis crebro exercitio acquiratur & continuo exercitio conſervetur ac perficiatur; non ſuperflua videri debet opera, quæ Geographiæ analytice expendendæ impenditur. Neque eſt quod dicas, idem obtineri poſſe ſola repetitione diſciplinarum ceterarum. Præſtat enim varietate obtinere, quod eorundem repetitio promittere videbatur. Quemadmodum nimirum varietas delectat, eorundem vero repetitio moleſta accidit;

dit; ita quoque illa attentionem apprime hic necessariam excitat & conservat, quam hæc labefactat, ut difficilius conservetur. Exercitia itaque ad eundem habitum tendentia, quæ quoad hunc scopum eadem sunt, diversa tamen apparere debent, ita ut quasi continuo aliud agendo in eundem scopum collinees & per diversa media finem tibi consequi videaris. Neque hoc singulare quidpiam ac insolitum existimandum. Sane in ipsa Arithmetica practica varietate exemplorum consequi studemus, quod repetitione ejusdem exempli obtineri poterat, si habitum acquirendum in se spectes.

§. 322. Hydrographia, quæ de navigatione per mare agit, apud nos nonnisi curiositatis gratia addiscitur. Quamobrem qui eam negligere voluerit, per nos negligat. Mathematicum tamen decet, ne eandem ignoret. Quodsi vero eandem perlustrare volueris, eodem prorsus modo in eo versaberis, quemadmodum in Geographia. Eadem enim methodo conscripta est, qua Geographiam tradidimus, & perinde ac hæc principiis astronomicis tota nititur, ut adeo hæc Matheseos pars longe utilissima fructus Astronomiæ sit &, si Astronomia non alium usum haberet, propter hunc solum summo cum studio excoli mereretur. Qui animum sciendi cupidum possident, eos studium Hydrographiæ mirifice delectat, quatenus vident, quomodo ex principiis mathematicis, præsertim Astronomicis deducta fuerint, quæ intellectui humano prorsus inaccessa videri poterant, & fœcunditatem principiorum mathematicorum, quæ in se sterilia apparebant, ipso facto experiuntur. Plura non addimus: quæ enim dici poterant, ex anterioribus abunde intelliguntur.

§. 323. Quod studium Chronologiæ attinet, de eo non multa nobis dicenda sunt. Pleraque enim, quæ in Chronologia traduntur, non majorem requirunt attentionem, quam quæ acquirendæ cognitioni historicæ sufficit. Qui nonisi vulgarem Chronologiæ notitiam sibi comparare student, iis satisfaciunt definitiones diei & noctis, epochæ diei civilis, horæ, horæ astronomicæ, Europææ & Judaicæ, minuti primi denique atque

atque ſecundi ex capite primo. Ex ſecundo perſpectas ſibi reddere debent definitiones omnes una cum quantitate menſis lunaris communis & embolimæi, ſeu corollario primo definitionis 28. Ex capite tertio ſufficit annotaſſe, quæ de anno Juliano & Gregoriano dicuntur. Si paulo curioſior fuerit, addet ea, quæ dicuntur de recente Judæorum & Turcarum anno. Ex capite quarto ad intelligendum calendarium addiſcant, quid ſit cyclus Solis, cyclus Lunæ & Cyclus indictionum atque periodus Juliana & ex capite quinto petant, quid ſit Epocha Ruſſorum, epocha mundi conditi Judaica & Epocha Muhamedica, qui vero in legendis Autoribus claſſicis verſatur, addat definitiones epochæ olympiadum & epochæ urbis conditæ. Denique ad vulgarem Chronologiæ notitiam ſufficit aliqua Calendarii Juliani & Gregoriani cognitio ex capite ſexto haurienda &, ubi quis curioſior fuerit ſimilem Calendarii Judaici & Muhamedani ex definitionibus potiſſimum capitis ultimi ſibi comparet. Calculos enim, qui in problematis docentur, una cum corollariis, quibus eorum rationes continentur, tuto negligere poterit. Brevi adeo labore totum ſtudium chronologicum abſolvi poterit, in quo memoriæ omnes fere ſunt partes. Me autem tacente patet, terminos non nullos ex Aſtronomia perſpectos eſſe debere, ut definitiones chronologicæ intelligantur.

§. 324. Qui accuratiorem Chronologiæ cognitionem appetunt, eam totam perluſtrare tenentur: id quod nullo fere negotio fiet, ubi in Aſtronomia fuerint verſati, cum eorum, quæ in Chronologia intricata ſunt & hoc ſtudium perplexum atque moleſtum reddunt, nonniſi cognitionem hiſtoricam ſuggeramus. Hiſce principiis imbutus & in Aſtronomia cum laude verſatus adeat Autores, quos ſupra ſuo loco commendavimus, ubi ſpinoſis difficultatibus ſeſe immergere voluerit, ut judicium ferre queat, quid veri ſubſit iis, quæ aliorum fide aſſummuntur. Neque enim exiſtimandum eſt ſingula, quæ dicuntur ad chronologiam hiſtoricam ſpectantia, ex monumentis Veterum, quæ nobis ſuperſunt, eſſe adeo aperta & explorata, ut de eorum veritate

ritate ambigi minime possit. Hoc omnino monendum esse duximus, ne, qui elementa nostra Chronologiæ perlegit, miretur, cur vulgo conqueratur studium Chronologiæ esse abstrusum, perplexum atque difficile, cum tamen nullum videatur, quod in eo collocandum, si comparetur cum eo, quod in tractandis ceteris Matheseos partibus hactenus præcepimus.

§. 325. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant, in Chronologia quoque quædam invenient, quæ ad ipsorum sunt palatum. Juvabit perpendere, quomodo mensuræ temporis ex motu siderum fuerint deductæ & ad usum civilem aptatæ, ut tempus civile cum astronomico in concordiam reducatur: quod posterius cum non uno modo factum sit, quatenus arbitrium humanum in determinationem influit, observare hic licet, quæ in veritatibus necessariis locum minime habent. Singularem quoque hic attentionem merentur, quæ de characteribus temporis præsertim artificialibus & variis cyclis, atque periodo Juliana docentur. Denique probe perpendenda sunt, quæ de Calendario Christiano & Judaico traduntur. Etsi enim calendarium Judaicum principiis nonnullis nitatur superstitiosis, calculus tamen, quo in computatione utendum, admodum ingeniosus est, ut ab artis inveniendi cupido probe perpendi mereatur. Præbet Chronologia exemplum, quomodo veritates, quas cognovimus, ad usum vitæ civilis aptentur, ubi summus rigor attendi nequit, id tamen agendum, ne ab eo longius recedas in præjudicium finis intenti. Simile quid occurrit, ubi Jus naturæ ad definienda negotia humana tam privata, quam publica adhibetur, cujus rigor summus observari nequit, ut adeo ex eodem condendum sit jus civile ac jus gentium arbitrarium, quod ab eo quam minimum recedat & quo cavetur, ne fine civitatum particularium & civitatis maximæ, quam Gentes constituunt, excidamus. Suppeditat itaque Chronologia, modo in abstrahendo satis fueris acutus, nec destituaris illo acumine, quo abstracta in concretis pervidemus, principia generalia, quæ notionum directricium loco esse possunt in istiusmodi casibus.

Qui

Qui in Philoſophia noſtra fuerint verſati, iis ſatis clara & perſpicua erunt, quæ dicuntur. Nimis autem prolixi eſſe deberemus, ſi uberius explicanda eſſent, ne ceteris quoque obſcura viderentur. Videmus adeo (id quod etiam haud pauca ante dicta ulterius confirmant), quam utile ſit ſtudium Philoſophiæ verioris, qualem nos profitemur, cum ſtudio mathematico conjungi, ſiquidem uſus omnis, quem hoc præſtat, in intellectu perficiendo, compos fieri volueris. Ita demum obtinebitur, ut Matheſis profit ad recte philoſophandum: id quod ſola applicatione ad cognitionem Naturæ mathematicam promovendam obtineri nequit, ut ut ea præclara ſit & maxime commendendum ingeniis excelſis, ut hoc cognitionis genus excolatur.

§. 326. Gnomonica diſciplina tota practica eſt, in qua ſola praxis intenditur. Quamobrem a perplexis quoque demonſtrationibus abſtinuimus, quas legere nolunt, qui intelligere poterant, ceteri autem non capiunt. Quodſi quis theoriam omnem aſpernatur, nec niſi conſtructionem horologiorum ſolarium curæ cordique habet; ei ſatisfacient definitiones & problematum reſolutiones. Si quæ problemata ipſi magis curioſa, quam utilia videntur; ſuo ſtabit judicio in omittendis iis, quorum notitia ſe carere poſſe exiſtimat. Deſcriptionem horologiorum ſolarium adeo perſpicue expoſuimus, ut eadem facilitate abſolvi poſſit, qua figuræ in Geometria elementari delineantur & alia ejus problemata conſtruuntur. Ne tamen hæreat circa terminos, nec ſatis intelligat quid fieri debeat; omnino conſultum eſt, ut levem quandam Aſtronomiæ ſphæricæ, Geographiæ & Chronologiæ notitiam ſibi comparet, qualem commendavimus iis, qui nonniſi hiſtoricam cognitionem ſibi comparare ſtudent. Inprimis autem hic uſui eſt, ſi ideas, quæ lumen praxi Gnomonicæ affundere debent, ne in ea prorſus cœcutias, imaginationi inſinuari cures. Exempli loco eſſe poteſt, ſi ipſam deſcriptionem horologiorum ſolarium applicatione actuali horologii æquinoctialis ad planum, in quo deſcribendum, oſtendas. Uſum hic habent machinæ gnomoni-

monicæ, quas in uſum deſcriptionis horologiorum ſolarium commendat & brevi quodam Tractatu deſcripſit *Pardies*, quamvis inſtituto præſenti ſufficiat horologium æquinoctionale ſimplici tantummodo modo deſcriptum, quemadmodum ex problemate quarto (§.36 *Gnom.*) facile intelligitur.

§. 327. Etſi autem a perplexis & intricatis demonſtrationibus, quales dedit *Clavius* & quas parum amant ſtudio Gnomonico ſeſe mancipantes, conſulto abſtinuerimus, ne nobis ſcriberemus, dum alios erudire volumus; id tamen egimus, ut, quanta fieri potuit, brevitate ac facilitate ſatisfaceremus iis, qui ſcientificam horologiorum ſolarium cognitionem appetunt, ne ignorent genuinas conſtructionum rationes. Ad hanc igitur qui adſpirant, eo modo in Gnomica verſentur, quo in Geometria elementari verſandum eſſe docuimus, ubi ſecundus cognitionis gradus intenditur. Haurit Gnomonica principia ſua ex Arithmetica, Geometria elementari, Trigonometria utraque, Aſtronomiæ ſphærica præſertim parte, Geographia & Chronologia. Antequam igitur ad illam tractandam accedat, ſcientificæ cognitionis cupidus, harum tractationem præmittere debet. Hoc pacto in omni Gnomonica nihil deprehendet, quod non ſatis intelligat & de cujus veritate dubium quoddam ſuperſit. Quoniam vero, quemadmodum modo diximus (§. 326), Gnomanica tota practica eſt; qui eidem operam navat, ſingula quoque horologia in charta delineare tenetur. Quodſi dicas, tibi nunquam propoſitum eſſe, ut aliquando horologium quoddam ſolare actu conſtruas; ſed ſufficere, ut intelligas, quomodo conſtruantur, & cur hoc pacto conſtrui poſſint, conſequenter te ſcopo tuo potiri poſſe, ſi tantummodo reſolutiones problematum cum ſchemate conferas; me per omnia conſentientem minime habes. Etenim ſi horologia in charta ipſemet delinees, non modo facilius & clarius eorum conſtructionem intelligis, verum etiam ipſorum ideam memoriæ firmius imprimis. Quotieſcunque veritates practicas cognoſcere ſtudemus, ſuadendum omnino eſt, ut eas in nobis-

nobismetipſis experiamur. Hinc etiam non diſſentiente *Confucio*, ſummo Sinarum Philoſopho, in Moralibus inculcare ſoleo, ut eorum, quæ docentur, veritatem in nobismetipſis experiri ſtudeamus: quod quantam afferat utilitatem, in parte altera Philoſophiæ practicæ univerſalis a priori abunde demonſtravimus. Qui adeo cognitioni ſcientificæ operam navat, in omni Matheſi ſolutiones problematum ipſemet tentare tenetur, ſive conſtructiones geometricas, ſive calculos arithmeticos præcipiant.

§. 328. Qui ad tertium cognitionis gradum adſpirant, reſolutionem problematis tanquam incognitam ſupponere debent & vi definitionis horologii, quod deſcribi jubetur, inquirendum, quomodo deſcribi debeat. Etenim ex datis ratiocinando colligendum, quod quæritur. Non datur niſi definitio horologii deſcribendi, quippe quæ ex anterioribus tanquam data ſupponi poteſt ac debet: quæritur modus idem deſcribendi, quem reſolutio explicat. Modus adeo deſcribendi horologium ratiocinando eruendus ex ejus definitione. Definitio horologii ſpecialis ſupponit definitionem horologii ſolaris generalem. Quamobrem facile patet, eam quoque tanquam datam ſupponi debere, niſi eam inter principia referre velis, quæ vi eorum, quæ definitioni ſpeciali inſunt, in memoriam revocantur. Ex definitione adeo petendæ ſunt primæ propoſitiones, quarum ope in memoriam revocantur principia ex Aſtronomia vel aliunde cognita, ut ex illa ratiocinando colligi queat concluſio. Satis hæc intelliguntur ex ſuperioribus, quæ de tertio cognitionis gradu acquirendo inculcavimus (§. 66 *& ſeqq.*). Non diffiteor, faciliorem fore operam, ſi demonſtrationes problematum eo ordine concinnatæ eſſent, qui in methodo analytica obſervandus, non ſumendo reſolutionem tanquam hypotheſin theorematis, quemadmodum in demonſtrationibus ſyntheticis fieri ſolet (§. 51 *& ſeqq.*). Enimvero ſi quis in Geometria elementari problemata analytice tractaverit & methodum, qua ibidem uſus, in aliis imitatus fuerit; ejus vires nec ſuperabit analytica problematum gnomonicorum

rum tractatio. Et quamvis tyronibus hoc difficile videatur, non tamen difficile erit eorum magiſtris, niſi quis intempeſtive docentium numero ſeſe ingerat, qui diſcentium ſubſellia potiore jure occupare debebat. Elementa Arithmeticæ Germanica methodo analytica conſcripſimus eandemque in iis explicandis magis adhuc illuſtramus. Quodſi ergo quis ideam quandam exemplarem inde hauſerit; ea ipſi facem præferet non modo in Gnomonica, ſed & in aliis Matheſeos partibus, immo extra eandem in diſciplinis aliis. Et ſi quis elementa iſta vel non legit, vel legere nequit linguæ Germanicæ ignarus, aut etiam Batavæ, in quam converſa ſunt; ideam tamen quandam animo concipiet vi analyſeos demonſtrationum, quam ſupra (§. 38 *& ſeqq.*) ampliſſime expoſuimus. Non igitur opus eſſe judicamus, ut ad particularia deſcendamus.

§. 329. Ceterum Gnomonica in numero artium eſt, quemadmodum Mechanica practica, quæ machinarum compoſitarum ſtructuram explicat. Quoniam in Gnomonica conſtructiones horologiorum ſolarium demonſtrantur; ex ea diſcimus, quomodo artes ſcientifica methodo tractandæ ſint. Deducitur ea prorſus a priori, atque adeo methodi artes ſcientifice tractandi ideam omnium optime exhibet. Artes ceteræ ſi non omnes, ſaltem plurimæ, inventæ ſunt a poſteriori, etſi ſubinde in nonnullis a priori perfectæ. Ars poliendi vitra omnino a poſteriori detecta, perinde ac conſtructio teleſcopii, etſi hæc deinde a priori per principia dioptrica magis fuerit perfecta. Phænomena teleſcopiorum dudum ante a poſteriori innotuerunt, quam earum accuratas & rigoroſas demonſtrationes dederint Mathematici. Idem dicendum eſt de ſpeculis, quorum phænomena in Catoptrica demonſtrantur. Ad Gnomonicam tamen quam proxime accedit Ars navigandi & conſtruendi globos artificiales atque mappas geographicas & hydrographicas. Quibus adeo animus fuerit ſcientiam artium excolendi, illi hanc differentiam probe perpendere debent. Ex Gnomonica inprimis videre licet progreſſum

artis

artis a priori continuandum, quomodo ſcilicet inventa anteriora non modo anſam ſuppeditent de aliis cogitandi, quorum cogitatio alias animum minime ſubiiſſet, verum etiam ad ulteriora invenienda adjumento ſint, ut adeo idem ſit in arte, qui in ſcientia progreſſus, cum utrobique eædem deprehendantur rationes. Huc inprimis animum advertere debent, qui artem inveniendi ad formam artis reducere geſtiunt, quemadmodum Logicam ad eandem redactam videmus. Nos, qui nullum Matheſeos uſum aſpernamur, ad ea quoque animum advertimus, quæ vulgo non attenduntur, & uſum, quem Matheſis habere poteſt in excolendo intellectu, ut eodem in omni ſcientiarum genere, in quavis arte & in ipſis negotiis tam privatis, quam publicis prompte ac rite utamur, majoris facimus, quam quem per ſe habere poteſt, utut ſingula æquo pretio æſtimantes nec meritam detrahamus iis laudem, qui in aliqua Matheſeos parte excolenda omnem ætatem conſumunt. Neque enim ea eſt hominis ætas, immo nec eæ ſunt ejus vires, ut unus omnia poſſit, &, niſi eſſent, qui particulari ſtudio ſcientiam egregie promoverent, nec is a Matheſi expectari poterat fructus in omni ſua extenſione, quem tantopere commendamus & cui tantum ſtatuimus pretium. Quamvis adeo in Gnomonica multa occurrunt, quæ magis curioſa, quam utilia videntur iis, qui utilitatem ex neceſſitate ad vitam commode degendam metiuntur, immo quæ a ſeveris inventorum cenſoribus ad luſus Mathematicorum referuntur, ipſis ſubinde Geometris excelſi ingenii profundique acuminis non diſſentientibus, propterea quod unusquisque ſuam amat & laudat Minervam; nobis tamen ea non contemnenda, ſed magni facienda videntur, quatenus analytica eorundem conſideratio prodeſt ad augendam artem inveniendi, immo etiam ſola eorundem ſcientifica cognitio intellectum perficit, etiamſi de eo perficiendo non cogites.

## CAPUT XI.

# De Studio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris & Architecturæ civilis.

§. 330.

Pyrotechnia paucas continet demonſtrationes, quæ ex Geometria elementari principia ſua mutuantur: quas negligere facile poteſt, qui ſoli praxi ſtudet. Ceterum quæ ad praxin faciunt, non modo perſpicue, ſed & diſtincte propoſuimus, ut ideam diſtinctam eorum, quæ fieri debent, animo nullo negotio concipere detur. Nulli adeo dubitamus, quin ſtudium pyrotechnicum perfacile reddiderimus. Si quis praxi operam dare voluerit, is omnino ipſo opere exequi tenetur, quæ præſcribuntur: quo facto ipſemet in ſe experietur, reſolutiones problematum eodem modo eſſe datas, quo reſolutiones Geometriæ practicæ, veluti triangulorum conſtructionem, linearum perpendicularium deſcriptionem, in Geometria elementari exhibuimus. Quodſi quis ante ſingulorum, quæ fieri jubentur, ideam diſtinctam ſibi comparavit, quam ad ea facienda ſe conferat; is non ſolum ad id, quod faciendum, majorem attentionem conferet, ſed & majore cum voluptate artem manuariam addiſcet. Qui in nuda cognitione hiſtorica acquieſcere volunt, iis quidem ſufficere poſſunt, quæ tradimus; ubi tamen occaſio offertur ipſis oculis uſurpandi ſingula, quomodo parentur, eam negligere minime debent, cum hoc pacto ideæ efficiantur clariores, quatenus diſtincte explicatis inſunt confuſe percipienda.

§. 331. Quibus ſecundus cognitionis gradus curæ cordique eſt, non modo addere debent perpaucas demonſtrationes, quæ hinc

hinc inde adjiciuntur; verum etiam eorum, quæ ex principiis geometricis demonstrari nequeunt, rationes passim indicatas perpendere tenentur, & ad ea applicare studeant, quæ sine illarum allegatione proponuntur. Dantur equidem nonnulla in Pyrotechnia, quæ Geometriæ sublimioris & analyseos recentioris gnarus legibus mathematicis adstringere poterat, cum nunc solo arbitrio regantur; sed nobis minime vacat in talia inquirere. Hanc igitur telam aliis pertexendam lubentissime relinquimus, nobisque sufficit ea tradidisse, quæ ante perspecta habere debent, quam ingenii sui vires periclitentur.

§. 332. Pleraque, quæ in Pyrotechnia traduntur, sunt inventa, quæ artificum tentaminibus debentur, ubi casus multas sibi partes vindicat. Qui ad tertium cognitionis gradum adspirant & intellectum præsertim perficere intendunt, ut eodem extra Mathesin prompte ac rite utantur, hoc etiam inventorum genus probe expendere tenentur: neque enim rerum ceterarum, quemadmodum mathematicarum, tam exasciata prostat theoria, ut suppetant principia, quorum vi a priori detegere licet omnia, quæ quæruntur. Empirica inveniendi methodus, qua utuntur artifices experientiæ, qua pollent, omnem facientes usum, qui a notionibus confusis expectari potest, in rebus utilissimis detegendis omne fert punctum, modo eadem rite uti noris: id quod tibi promittere poteris, si eundo per exempla, qualia suppeditat Pyrotechnia, eam revoces ad notiones distinctas. Qui vel ea legit, quæ in Prolegomenis de differentia Logicæ naturalis & artificialis docuimus, non modo dicta plene intelliget, verum etiam iisdem facilem habebit fidem. Quodsi attentius resolutiones problematum pyrotechnicorum expendas, easque tanquam inveniendas tibi proponas; methodo empiricæ inveniendi misceri rationalem, aut saltem misceri posse deprehendes, quemadmodum nemo hominum in actionibus suis totus empiricus est, ut non etiam rationi aliquæ deferantur partes. Et si forsan fuerit quispiam, te in modum inquirentem, quo eædem fuerint repertæ, haud

 raro,

raro, immo plerumque incidere in alium ab eo, quo uſi ſunt inventores, prorſus diverſum; non tamen inde conficitur, te nihil agere: ſufficit enim ſi oſtendere poſſis quod eo, quem concipis, modo reperiri potuerit quod quærebatur. Cum enim non alio fine in modum inveniendi inquiras, quam ut eundem in caſu ſimili imiteris; eundem ex aſſe conſecutus, ſi vel maxime de eo non cogitavit, qui quid invenit: id quod de omni analyſi notandum, quam quaſi divinando eruere ſtudemus. Ceterum ſi quæ compoſitiones occurrunt, quarum nullam reddidimus rationem; in eam eo modo inquirendum, quo rationem compoſitionis pulveris pyrii caſu detectæ eruimus (§. 17, *& ſeqq. Pyroteh.*).

§. 333. Qui Architecturæ militaris nonniſi cognitionem hiſtoricam deſiderant, ex definitionibus terminos ſibi perſpectos reddere tenentur, nec inconſultum eſt, ſi ad manus fuerit idea quædam materialis munimenti ſive ex ligno, ſive ex charta, ſive etiam ex argilla parata. Cum enim terminos non alio fine addiſcant, quam ut munimenta videntes ſingula ſuis nominibus indicare valeant, & ut nominibus auditis reſpondentes iisdem ideæ imaginationi præſentes ſiſtantur; ideæ hæ facilius memoriæ imprimuntur per conſpectum ideæ materialis, quam notionibus diſtinctis, quibus definitiones conſtant. Quodſi tamen hæ accedant, imprimentur tanto firmius & jucundius, ut facilius eadem retineantur, nec ſine voluptate labore hoc defungaris. Deinde ſufficit munimenti unius vel alterius Protographiam ſaltem conficere, quæ nonniſi ambitum totius munimenti & operum externorum exhibet, ut hoc pacto idea munimenti integri acquiratur, nec ejus deinde conſpectus adſpicientem confundat. Idem tenendum eſt de operibus hoſtium campeſtribus, quorum in praxi offenſiva & defenſiva opus eſt. Neque inconſultum eſt, ut, terminis intellectis, ichnographias munimentorum ad manus ſumat, & per eos easdem explicare diſcat. Rudis hæc Architecturæ militaris notitia uſui eſt iter facientibus & loca munita inviſentibus, tum etiam prodeſt ad intelligendas novellas publi-

publicas, quando de obſidionibus urbium munitarum loquuntur.

§. 334. Qui cognitionem Architecturæ militaris ſcientificam ſibi acquirere ſtudent, elementa integra eo, quo conſcripta ſunt, ordine perluſtrare debent. Ex capite igitur primo principia ſibi perſpecta reddere tenentur, ex quibus omne de diverſis muniendi formis judicium pendet. Secundum hæc principia examinare debet diverſas muniendi formas, quæ in capite ſecundo proponuntur. Neque parum ſibi conſulet, ubi deinceps ex *Sturmii* Architectura militari hypothetica ſimili examini alias adhuc muniendi formas ſubjiciat, vel ex aliis libris, quos de Architectura militari recenſuimus, alias petat. Ita nimirum non modo principia ipſa ſibi reddet multo clariora eaque magis familiaria; verum etiam eorundem applicationem in ſuam magis rediget poteſtatem. Neque etiam contemnendus eſt calculus trigonometricus: quod qui faciunt, ejus utilitatem minime proſpiciunt. Nemo non novit in qualibet muniendi forma non omnia ſumi poſſe principiis in capite primo expoſitis convenienter; ſed per quædam aſſumta determinari cetera. Horum adeo quantitas ex iis, quæ ſumuntur, per calculum geometricum eruenda, ſiquidem accurate de eadem conſtare debet. Nullum equidem dubium eſt, ex iisdem conſtructione geometrica easdem lineas eosdemque angulos determinari & illarum magnitudinem ope ſcalæ geometricæ, horum vero quantitatem ope inſtrumenti tranſportatorii inveſtigari poſſe; nemo tamen eſt qui neſciat, methodum hanc non modo ſupponere conſtructionem accuratiſſimam, verum etiam ne hac quidem ſuppoſita adeo accurate inveſtigantur, quemadmodum per calculum geometricum eruuntur, quantitates linearum & angulorum. Quodſi excipias, in praxi acribiam trigonometricam obſervandam non eſſe, immo nec ſemper obſervari poſſe, ſi vel maxime velis; utrumque largior: non tamen hinc recte infertur, quod inutile ſit noſſe angulorum ac linearum magnitudinem quam accuratiſſime. Etenim hinc non modo certus es, te in ea defi-

nienda nullum admisisse errorem, qui facile irrepere poterat eam mechanice investigando; sed & hinc attentior efficitur animus, ne in praxi a rigore magis recedas, quam par erat. Taceo, quod ad scientificam Architecturæ militaris cognitionem etiam requiratur, ut constet quomodo ex iis, quæ principiis in parte prima expositis convenienter sumuntur, investigentur cetera, quæ per ea determinantur. Ut vero tanto minus in dubium revocari possit utilitas calculi trigonometrici in Archi tectura militari; hoc unum adhuc probe perpendi velim. Subinde per ea, quæ in methodo muniendi sumuntur vi principiorum generalium, molesta est constructio geometrica, si quidem accurata desideretur. Quodsi vero lineæ aliæ supputentur, ex iis tanquam cognitis jam multo simplicior evadit & accuratior. Exemplum habemus in methodo muniendi *Blondelliana* (§. 151 *Arch. mil.*), cujus constructio per calculum trigonometricum ad *Paganianam* revocatur. Immo ope hu jus calculi constructio ex latere interno assumto potest revocari ad alteram, quæ ex externo procedit & contra: id quod subinde usui esse potest, præsertim in munitionibus irregularibus. Munimenta irregularia expendimus capite tertio, & quænam hic sint observanda, exponimus. Enimvero in methodo muniendi irregulari inprimis opus est, ut principia generalia constanter ob oculos versentur, ne quid contra ea admittatur: id quod facile accidit, nisi per ea examinentur, quæ in delineandis munimentis irregularibus facis. Hic sane haud raro cœcutiunt, qui ea non satis perspecta habent, vel in eorum applicatione hæsitant. Unde apparet, quam necessaria sit scientifica Architecturæ militaris cognitio, cum irregularia munimenta sint frequentiora regularibus, ut adeo is demum artis muniendi peritus sit dicendus, qui in delineandis munimentis irregularibus non hæret, nec cespitat. Denique qui rationes quoque operum campestrium, quæ capite ultimo describimus, perspicere voluerit, is duo scholia, quæ in fine adjicimus, attente perlegat, ut processus obsidionis ideam animo concipiat & quænam

nam obsessi defensionis gratia faciunt, intelligat. Hinc enim multo clarius intelliguntur, quæ de illis præcipiuntur.

§. 335. Quodsi quis praxi Architecturæ militaris operam dare decreverit, ei scientificam ejus cognitionem quam maxime commendamus, experientia domestica deinde magis illustrandam ac confirmandam. Ab eo autem cum expectetur, ut accuratas & nitidas munimentorum delineationes dare possit; in iis quoque delineandis multum operæ consumere tenetur, donec tandem multiplici exercitio eum consequatur habitum, quo se commendare possit. Vulgo peritiam Architecturæ militaris ex munimentorum delineationibus æstimare solent, fallaci admodum judicio. Etsi autem in arte muniendi excellere possit, qui in iis delineandis parum excellet; cum tamen qui eidem totum sese dat nec ea negligere debeat, quæ artem ornant, nitidas quoque delineationes ab eo jure exigimus, tanto quidem magis, quo certius est, haud raro, immo plerumque contemni artem ornatu isto destitutam. Qui vero praxi operam dare ipsamque artem exercere non decrevit, etsi castra sequatur; ei vix suademus, ut in habitu isto comparando tempus fallat, quod longe utilius in aliis addiscendis consumere poterit.

§. 336. Quibus tertius cognitionis gradus curæ cordique est, in Architectura quoque reperient militari, quæ attentionem ipsius merentur, sive in sola Mathesi versari voluerint, sive intellectum perficere studuerint, ut eodem prompte ac rite etiam extra eandem utantur. Cum Architectura militaris in numero disciplinarum practicarum sit, ratio ultima eorum, quæ in eadem traduntur, finis est, qui per eam intenditur. Quamobrem hic probe perpendendum venit, quomodo ex fine, qui in definitione indicatur, deducantur principia, quæ in capite primo proposuimus, applicata vero deinde ad eadem Geometria cetera hinc deriventur, sine quibus forma muniendi concipi nequit, multo minus munimenta actu excitare licet. Hinc enim non solum addiscere datur, quæ ad cognitionem artis mathematicam venandam usui sunt; verum

rum etiam quomodo in diſciplinis practicis verſandum, ut ſatis ad æquatas nanciſcaris ideas, quæ praxi ſufficiunt. Satis autem adæquata eſt, ſi in ea ſingula, quæ fieri debent, determinentur, quemadmodum ex tractatione Architecturæ militaris abunde eluceſcit, modo attentionem tuam in ea deſiderari minime patiaris. Diverſæ dantur muniendi formæ; ſed, ubi eas juxta principia in capite primo propoſita examines, non omnes cum iis æque conſentiunt. Unde aliæ aliis tanquam meliores præferuntur. Docet autem progreſſus Architecturæ militaris, quod primo inventæ muniendi formæ defectibus fuerint obnoxiæ, quos experientia detexit, primum ab inventoribus non animadverſas, iis autem mederi ſtuduerint, qui recentiores excogitarunt. Etſi in uſum artis inveniendi non inutile foret, eo fine expendere omnes muniendi formas, quæ hactenus publici juris factæ, & quidem eo ordine, quo luci publicæ expoſitæ fuerunt; noſtri tamen inſtituti ratio minime ferebat, ut in tantas ambages deſcenderemus. Ne tamen hac in re prorſus deeſſemus lectori ad tertium cognitionis gradum adſpiranti, ea tradidimus, quæ ad ideam quandam hujus facti animo concipiendam ſufficiunt, profuturam iis, qui in aliis diſciplinis practicis Architectos militares non infeliciter imitari voluerint. Non alia ſane de cauſa expoſuimus methodum muniendi Belgicam, utut propter defectus, quibus laborat, hodie antiquatam, ut nullius uſus eſſe videatur, niſi quatenus adhuc extent munimenta bene multa hac methodo conſtructa, & iisdem ſubjunximus methodos muniendi Gallorum. Conſtat enim formam muniendi Belgicam tanquam omnium optimam celebratam fuiſſe, ejus autem nævis animadverſis, Gallos primum publicaſſe formas alias, quibus hiſce mederi tentarunt. Ceterum applicatio Trigonometriæ ad Architecturam militarem in uſum tertii cognitionis gradus etiam aliquam attentionem meretur, non modo quod hoc ipſo confirmetur, quod in arte inveniendi locum mereatur; verum etiam ut ejus ampliſſimus uſus in majore luce conſtituatur.

§. 337.

§. 337. Architecturæ civilis cognitionem historicam acquisiturus legat definitiones & problemata, exceptis iis, quæ ad delineationes Ordinum architectonicorum & eorum usum in ornandis januis atque fenestris spectant, & quæ de ichnographia & orthographia ædium agunt. Quodsi desit occasio ædificia juxta regulas architectonicas constructa contemplandi; ichnographias & orthographias externas ædificiorum æri incisas perlustret, ut ideam ædificii integri juxta regulas architectonicas constructi animo imprimat. Inprimis autem terminos & constructionem Ordinum architectonicorum sibi familiares reddat, ne in ornatu, qui inde petitur, coecutiat. Hoc pacto obtinebit, ut non solum libros de Architectura civili conscriptos sine hæsitatione legere, sed quæ usui suo esse possunt, etiam addiscere ac data occasione ad eundem transferre queat. Historica igitur cognitio non ob solam curiositatem, sed & ob utilitatem, quam unicuique præstat, acquiritur. Sane qui peregrinantur, quemadmodum Germani facere solent, studiis academicis absolutis, cognitione ista animum imbutum habere debent, ne in ædificiis aliisque operibus architectonicis spectandis ignorent, quid videant, laudaturi aliis, quod cur laudent, nullam afferre valent rationem. Male adeo sibi consulunt, qui studium architectonicum, quod ea fini intra paucas hebdomades absolvi poterat, in Academiis prorsus negligunt non alia de causa, quam quod architecti fieri nolint. Perfacile autem hoc studium est, præsertim si ultra cognitionem historicam progredi nolueris. Quodsi otium suppetat, ruditer saltem delineare ordinem aliquem architectonicum, veluti Toscanum, qui delineatu omnium facillimus, juvat; non modo ut idea Ordinis, sed etiam membrorum memoriæ firmius infigatur: id quod tanto magis suadendum, cum norim plerosque fieri desertores studii architectonici, quod tædiosum videatur terminorum notitiam sibi comparare.

§. 338. Scientificam Architecturæ cognitionem desiderans elementa integra eo, quo conscripta sunt, ordine perlegat &

eam attentionrm afferat, quæ ad singula rite percipienda sufficit. Qui vel in Elementis Geometriæ versatus fuerit, ei attentio huc afferenda nulla fere videbitur: Mathematum vero prorsus ignarus non majorem hic requiri experietur, quam qua in legendo libro alio quocunque utendum; immo minorem, cum omnia distincte explicentur, quod vulgo fieri non solet, nec occurrant verba, quorum dubius est sensus, præter doctrinam vero de Ordinibus architectonicis nihil occurrat, cujus non habeat lector ideam vulgari experientia acquisitam. Nemo autem hic expectet demonstrationes, quales in Geometria dedimus: sufficit enim addisci eorum, quæ præcipiuntur, rationes, ut intelligatur, cur hoc potius modo fieri debeant, quam aliter. Inprimis etiam probe perpendat in Ordinibus architectonicis multa esse arbitraria, quorum etsi dentur atque a nobis datæ sint rationes, absit tamen, ut quis rationes istiusmodi desideret, quales sunt ceterorum, quæ necessarias habent. Sane in Arithmetica, quæ rigidas demonstrationes admittit cum veritates numerorum non minus necessariæ sint, quam linearum & figurarum in Geometria, eorum, quæ arbitraria sunt, veluti legis numerandi & notarum numericarum, non dari possunt rationes, quæ veritatibus necessariis conveniunt. Qui praxi architectonicæ sese dedunt, iis inprimis opus est scientifica Architecturæ cognitione: architectus enim in promptu habere debet rationes, quas reddat quærentibus, cur hoc vel illud ita fecerit (§. 3. *Arch. civ.*). Obtinebit præterea; ne cœca sit aliorum imitatio, quam haud raro esse fallacem, ne opus probetur intelligentium judicio, experientia loquitur. Non desunt exempla, quibus quod dictum est, confirmari poterat; sed nostrum jam non est perstringere ea, quæ ab aliis minus recte facta sunt, cum jam docere id unice intendamus, quomodo tractandum sit studium architectonium, ut recte fiant omnia. Industriam præterea suam exercere debent in delineationibus architectonicis, quicunque artem exercere decreverunt, & quæ paulo ante de delineationibus munimentorum annotavimus (§. 335),

335), ea quoque hic notanda veniunt. Ex elegantia delineationum vulgo judicium fertur de peritia Architecti, etsi male ac ſubinde non ſine damno fundatoris. Quamobrem cum dandum non modo ſit aliquid opinioni, ſed & qui in arte quadam excellit, ea negligere non debeat, quæ ad ornatum faciunt; nemo erit, qui ab Architecto elegantiam in delineandis ædificiis aliisque operibus architectonicis jure non deſideret, quamvis non probemus contemni propterea artem in eo, qui eadem excellit, quia elegantiam in delineando non poſſidet. Qui enim hoc faciunt, ſuo & aliorum, quibus a conſilio eſſe debebant, hoc faciunt damno. Immo ſi quis deſideret delineationes elegantes, aliorum opera eædem perfici poterunt, modo, qui in arte excellit, ea ſuppeditet, quæ ad eas perficiendas neceſſaria ſunt.

§. 339. Qui denique ad tertium cognitionis gradum adſpirant, eos quoque juvabit Architectura civilis. In Architectura civili, regulæ omnes deducuntur ex fine, quem loquitur definitio ejusdem. Finis hic in eo conſiſtit, quod ideam ædificii animo concipere & juxta eam ipſum extruere debeamus, ita ut ſcopo fundatoris ex aſſe ſatisfaciat. Quamobrem huc potiſſimum animum advertere tenetur, qui tertium cognitionis gradum intendit, quomodo ex hoc fine deriventur regulæ omnes, ita ut rationes earundem tandem in hanc rationem ultimam reſolvantur. Monuit jam *Vitruvius* & nos in Elementis noſtris a priori ex ipſo fine Architecturæ oſtendimus, regulas Architecturæ omnes redire ad firmitatem, utilitatem ſeu commoditatem & venuſtatem atque ornatum ædificii, vel alterius operis architectonici cujuscunque. Quamobrem regulæ omnes rationem ſufficientem vel in firmitate, vel in utilitate, vel in venuſtate atque ornatu, vel hisce binis, aut omnibus ſimul ſumtis agnoſcunt. Sufficit itaque inquirere, quomodo ex hiſce fontibus vel immediate vel mediate fuerint deductæ. Cum pauciſſimæ ſint, quæ Geometriæ auxilium poſtulant; hæc disquiſitio plurimum proderit ei, qui diſciplinas practicas a Ma-


theſi

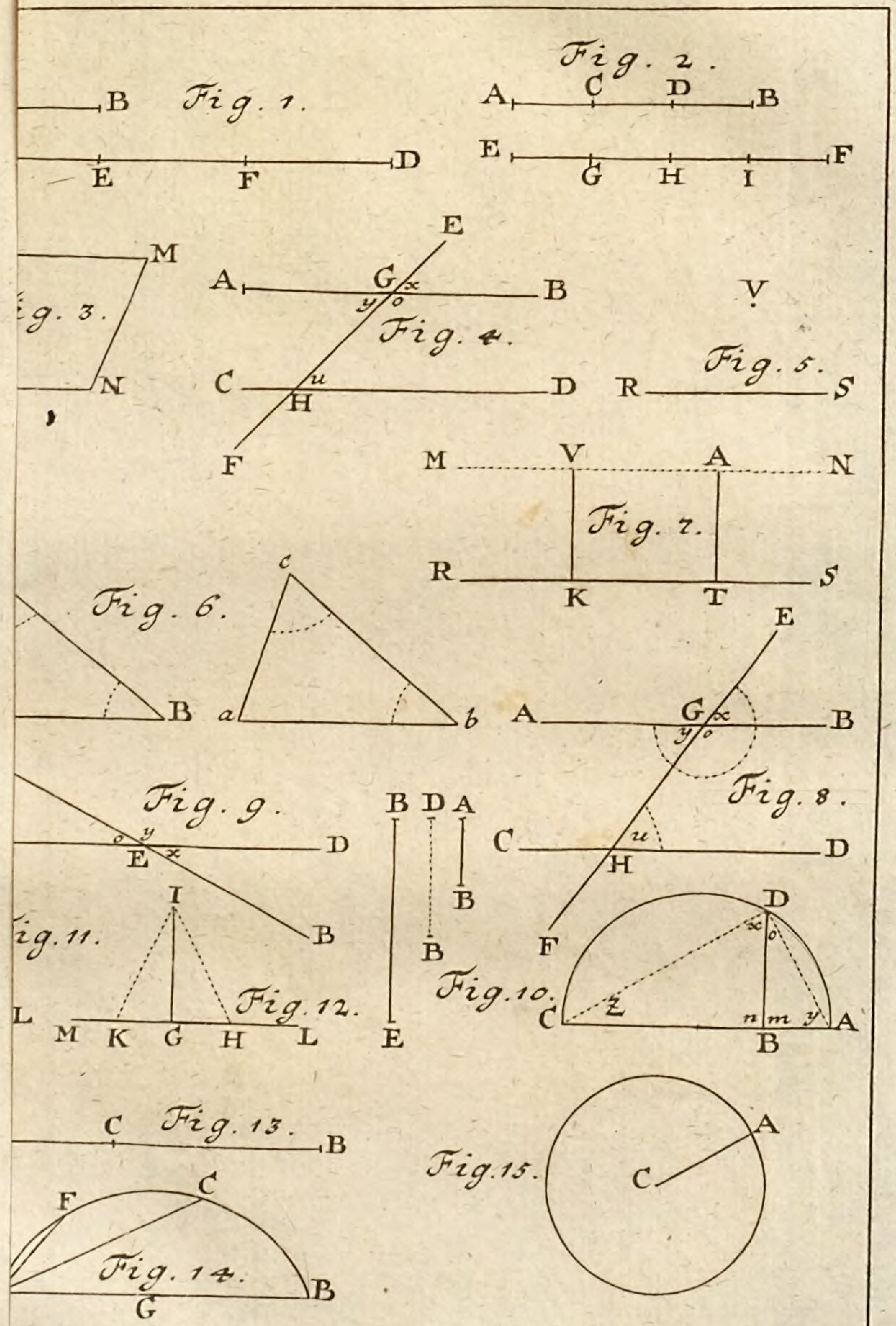
thesi sejunctas accurata methodo pertractare voluerit. Notandum præterea, si quis ideam ædificii animo concipit, dato fundatoris scopo, eum inventorem agere ac regulis Architecturæ civilis uti tanquam principiis in ratiocinando. Quamobrem qui ad modum, quo hoc facit, animum attendit; is hinc addiscere valet, quomodo theoriæ ad tractanda negotia, quæ levi brachio tractari minime possunt, dextre ac rite applicentur. Suademus ergo ut ædificiorum supposito fundatoris scopo inveniatur constructio etiam ab iis, qui artem exercere non intendunt: quod ut facilius succedat, ante in examinandis ædificiis juxta regulas architectonicas non inutiliter versabitur, quam ad telam istam pertexendam se accingit. Non adeo levem, nec contemnendæ utilitatis deprehendet demonstrationem, qui ædificium dato fundatoris scopo construendum sibi tanquam problema proponit, veluti *construere in data area datoque loco ædificium, quod huic fundatoris scopo ex asse satisfacit*, deinde quomodo extruendum sit eodem modo exponat, quo resolutiones problematum per universam Mathesin exhibuimus, & tandem demonstret pro datis circumstantiis scopo fundatoris ex asse satisfieri, siquidem hoc modo exstruatur. Etenim qui in expediendis negotiis tam privatis, quam publicis eam certitudinem consequi voluerit, quam consequi datur, plurimum hinc lucis fœnerabitur, quam aliunde vix ac ne vix quidem adeo commode expectet. Non igitur erubescimus studium Architecturæ civilis hoc modo instituendum commendare iis, qui ad negotia publica gerenda sese præparant, ut eorum rite tractandorum ideam quandam exemplarem animo insinuent. Plura addere possem, quomodo prudentia Architecti prodesse possit in gerendis negotiis, nisi principiis, quæ in Philosophia practica tradimus, imbutus per se hoc videre possit, ubi ea, quæ hic commendamus, exercitia non neglexerit.

§. 340. Atque ita tandem nos satis docuisse confidimus, quomodo studium mathematicum tractandum sit, ut omnem consequamur usum, qui ab eo expectari potest. Non loquor nisi

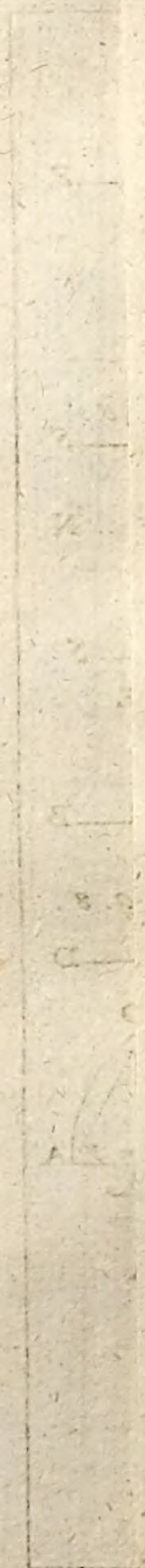
experta ac ingenue profiteor, me nunquam ea, quæ hactenus in Philosophia conscripsi & in posterum, si Deo ita visum fuerit, additurus sum, daturum fuisse, nisi adminiculis istis adjutus fuissem. Eadem experientia fretus docere quoque poteram, quomodo Mathesi uti possimus ad distinctas & foecundas in Philosophia prima notiones venandas & quomodo studio mathematico perfici possit etiam appetitus; sed cum hoc a præsenti instituto alienum sit, quæ hic dici poterant, alii occasioni reservamus. Ne tamen dixisse videamur, quæ absona sunt, unum saltem alterumque exemplum in medium afferre lubet. Poteramus hic tantummodo provocare ad ea, quæ alibi jam tradidimus, veluti quod notio generum, & specierum (*not.* §. 72. 73 *Log.*) atque individui ex formulis algebraicis derivari possit (*not.* §. 74 *Log.*), & ipse modus, quo Deus universalia eorundemque nexum in singularibus intuetur, ex iisdem formulis ediciatur (*not.* §. 275 *part.* 1. *Theol. nat.*); sed ne lectorem ablegemus ad alibi quærenda, nec hic repetamus alibi dicta, consultius visum fuit exempli loco alia quædam proferre. Inter notiones difficiles referri solet notio determinati & indeterminati. Enimvero nos eandem derivavimus ex exemplis mathematicis: qua etiam de causa singula, quæ in Ontologia de determinato & indeterminato docuimus, exemplis mathematicis illustramus. Neque enim dantur alia hisce clariora & notionem in Philosophia longe utilissimam felicius illustrantia. In formula algebraica quacunque, veluti si $\frac{a+b}{2}$ dicatur numerus major, summa existente $a$ & differentia $b$, numeri $a$ & $b$ dicuntur indeterminati, quia tam $a$, quam $b$ explicari potest per numeros infinitos, consequenter de $a$ affirmari potest, tum quod sit 6, tum quod sit 12, tum quod sit 19 & ita porro in infinitum, & de $b$ affirmari potest, tum quod sit 2, tum quod sit 4, tum quod sit 5 & ita porro in infinitum. Indeterminata igitur dicitur summa, quatenus consideratur ut id, de quo affirmari potest numerus 6, 12, 19 &c. nullus tamen adhuc de eadem affirmatur: quæ est ipsa notio indeterminati

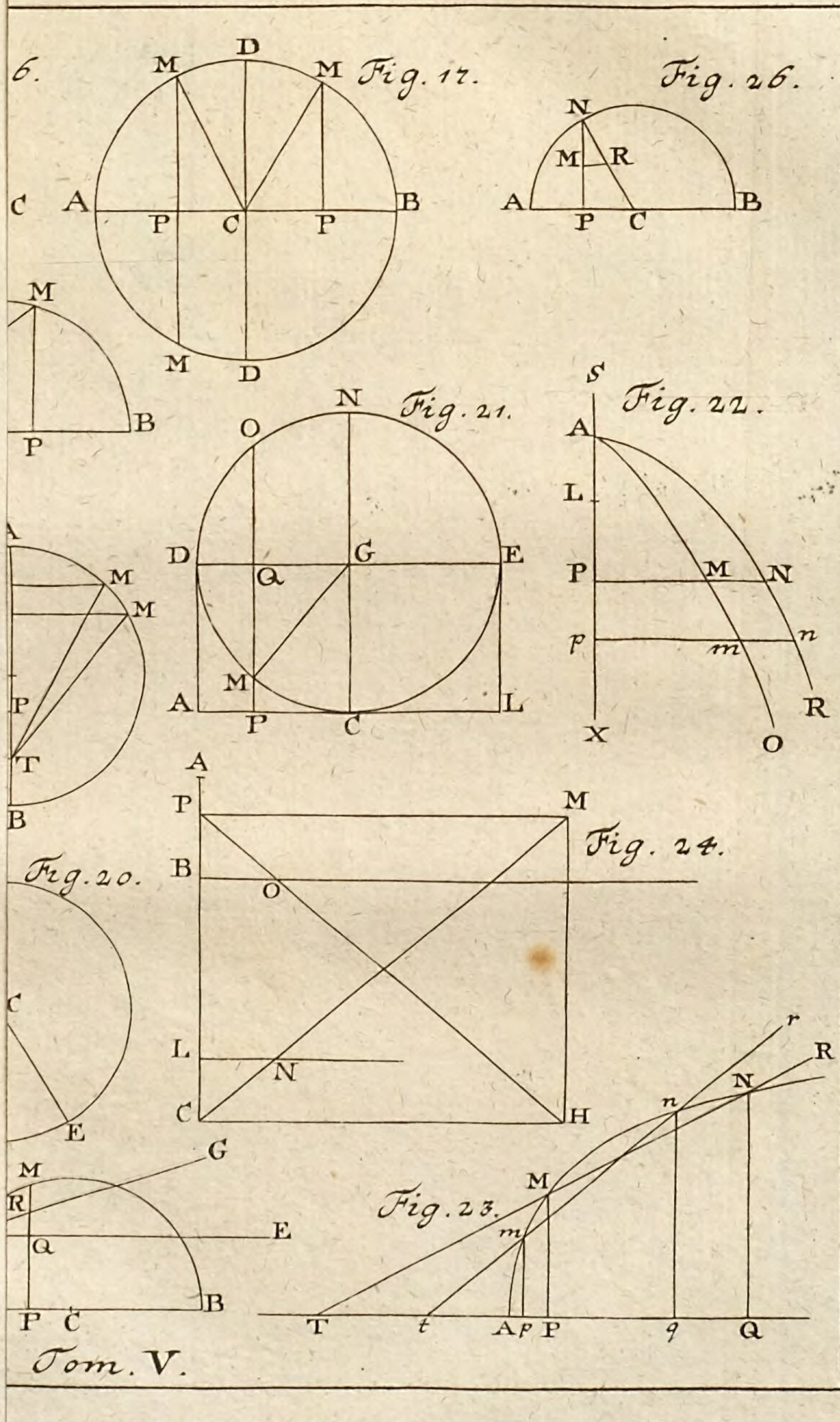
(§. 105 *Ontol.*). Ast si summa dicatur 6, determinata dicitur, quia jam constat, quinam numerus de ea sit affirmandus: quæ est ipsa notio dererminati (§. 112 *Ontol.*). Idem patet de differentia *b*. Ordinis quoque notio distincta inter eas refertur, quæ difficiles sunt; sed ex seriebus infinitis, quarum termini ordine dicuntur progredi, haud difficulter eruitur. E. gr. in serie $\frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 - \frac{1}{7.8}Cv^2$ &c. in infinitum, ubi *A* terminum primum, *B* secundum, *C* tertium denotat; terminus sequens determinatur ex præcedente eodem modo, ac ideo ordo in progressu terminorum adesse dicitur. Ex identitate determinationis nascitur similitudo (§. 217 *Ontol.*) Ordo igitur hic est similitudo obvia in modo, quo termini se invicem consequuntur, quemadmodum vult definitio nostra ordinis (§. 472 *Ontol.*). Sed pauca hæc sufficiant.

# *FINIS COMMENTATIONIS* DE *STUDIO MATHESEOS RECTE INSTITUENDO.*

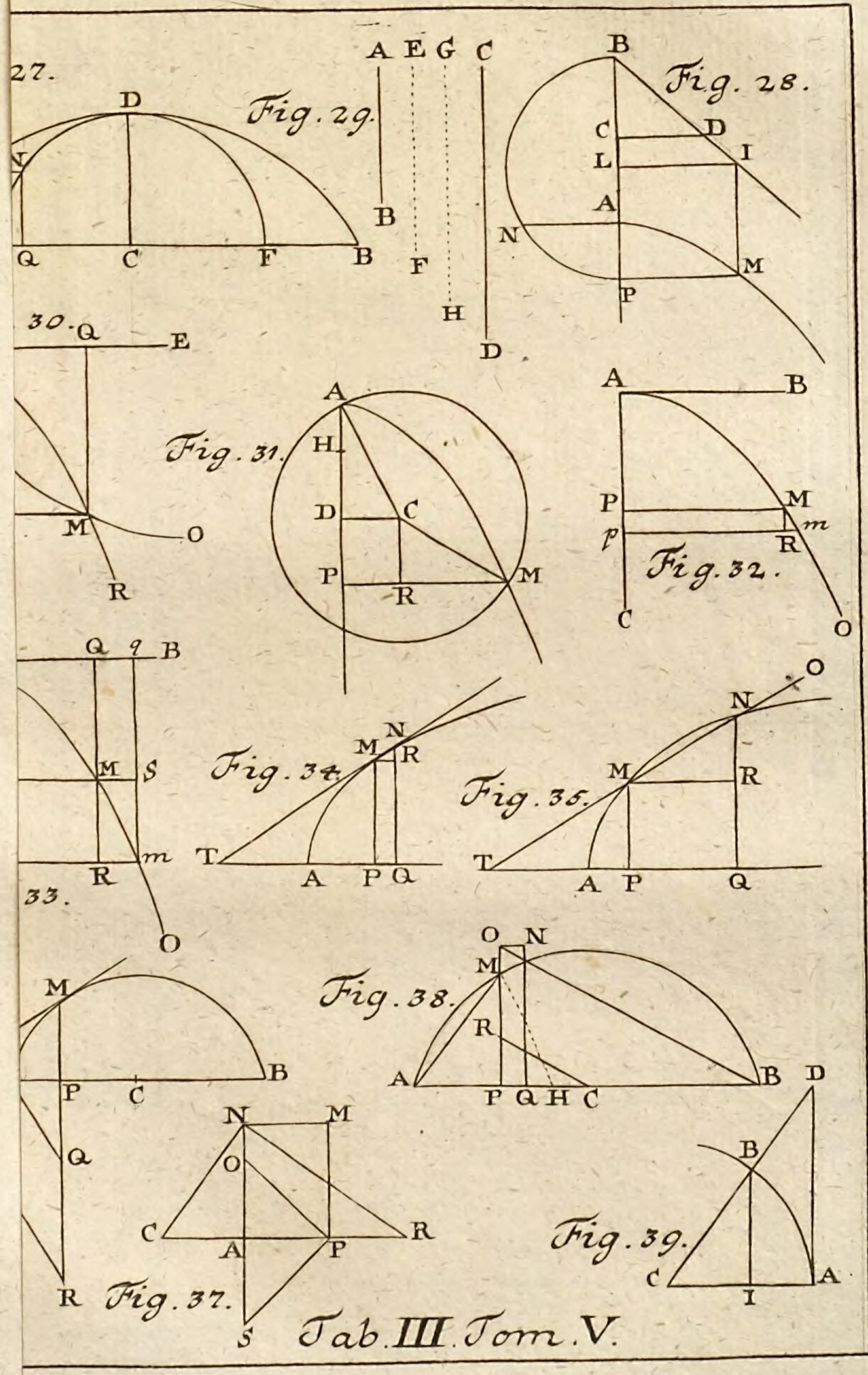

Fig. 1.
Fig. 2.
ig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
ig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

I. Tom. V.






Tom. V.


27.
Fig. 29.
Fig. 28.
30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 34.
Fig. 35.
33.
Fig. 38.
Fig. 37.
Fig. 39.
Tab. III. Tom. V.

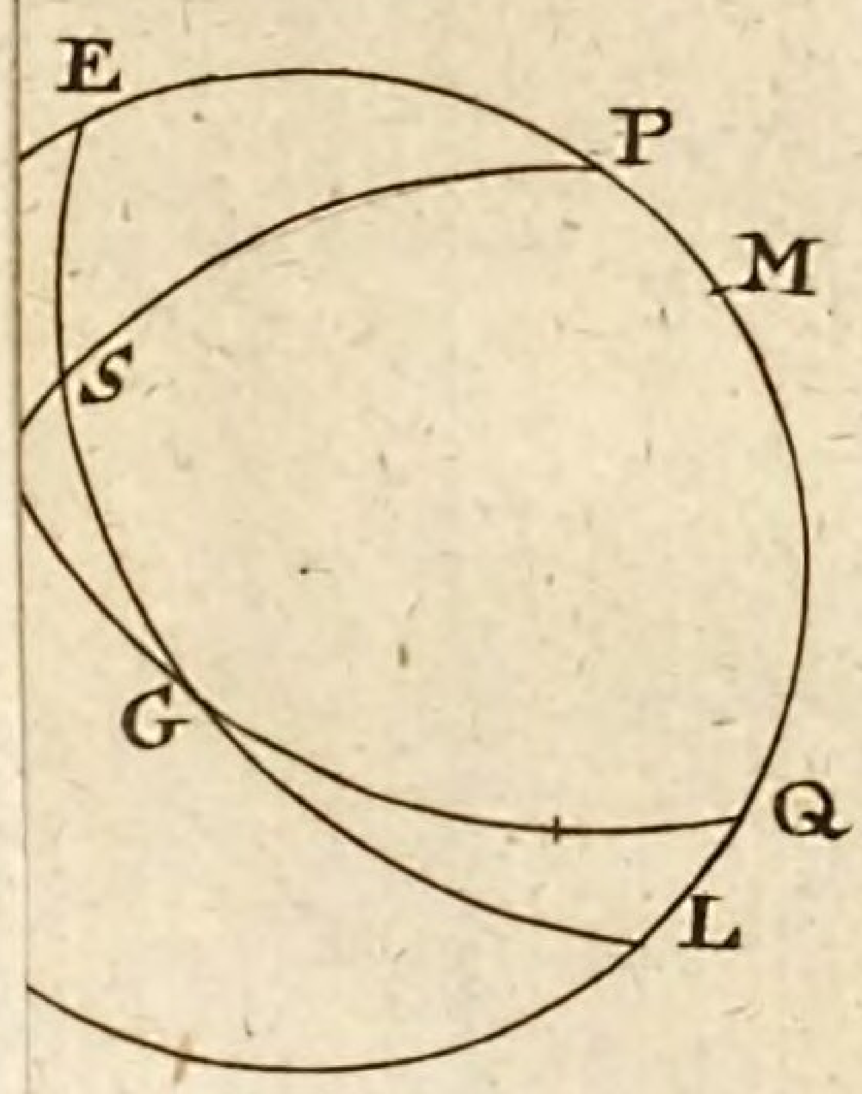
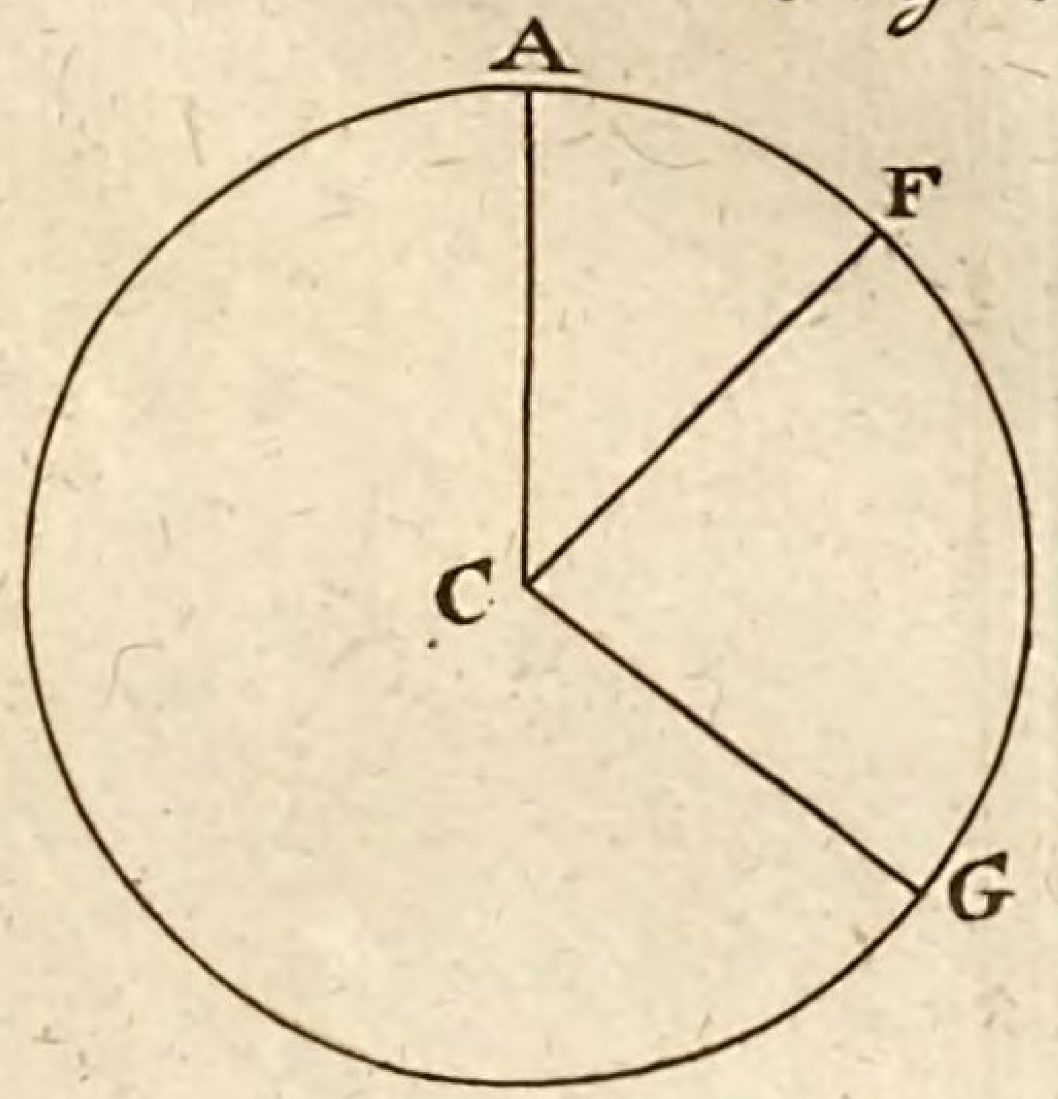



Fig. 43.



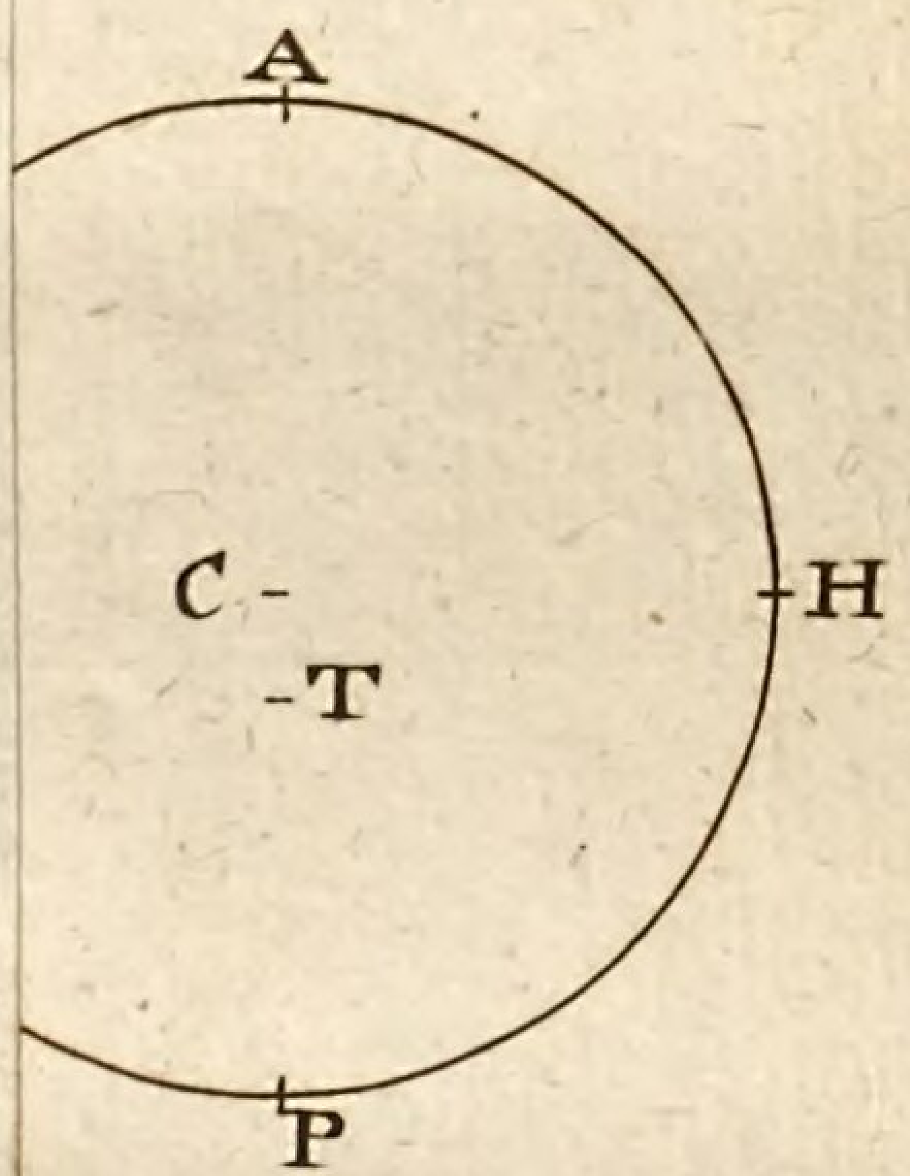
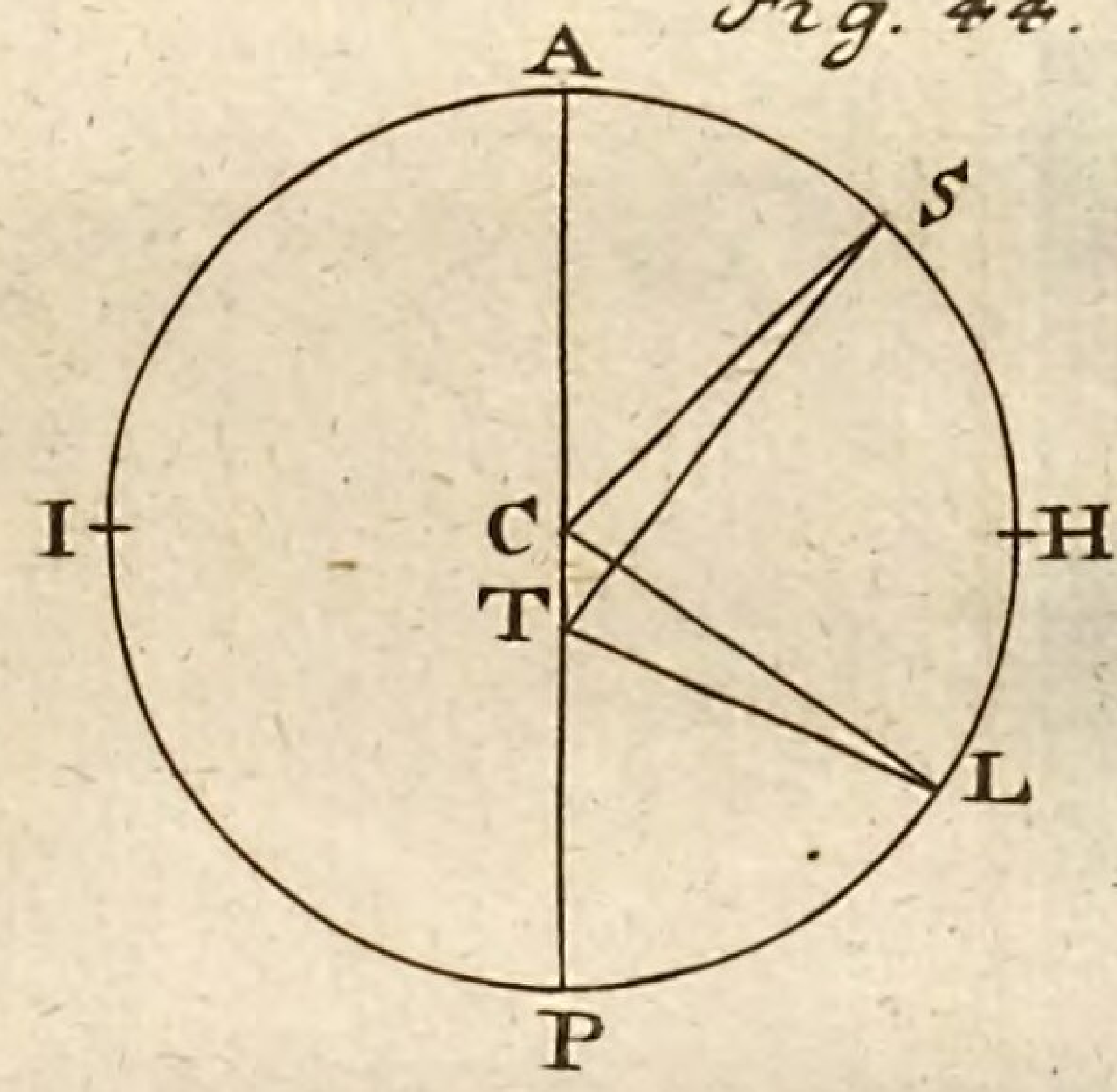




Fig. 44.



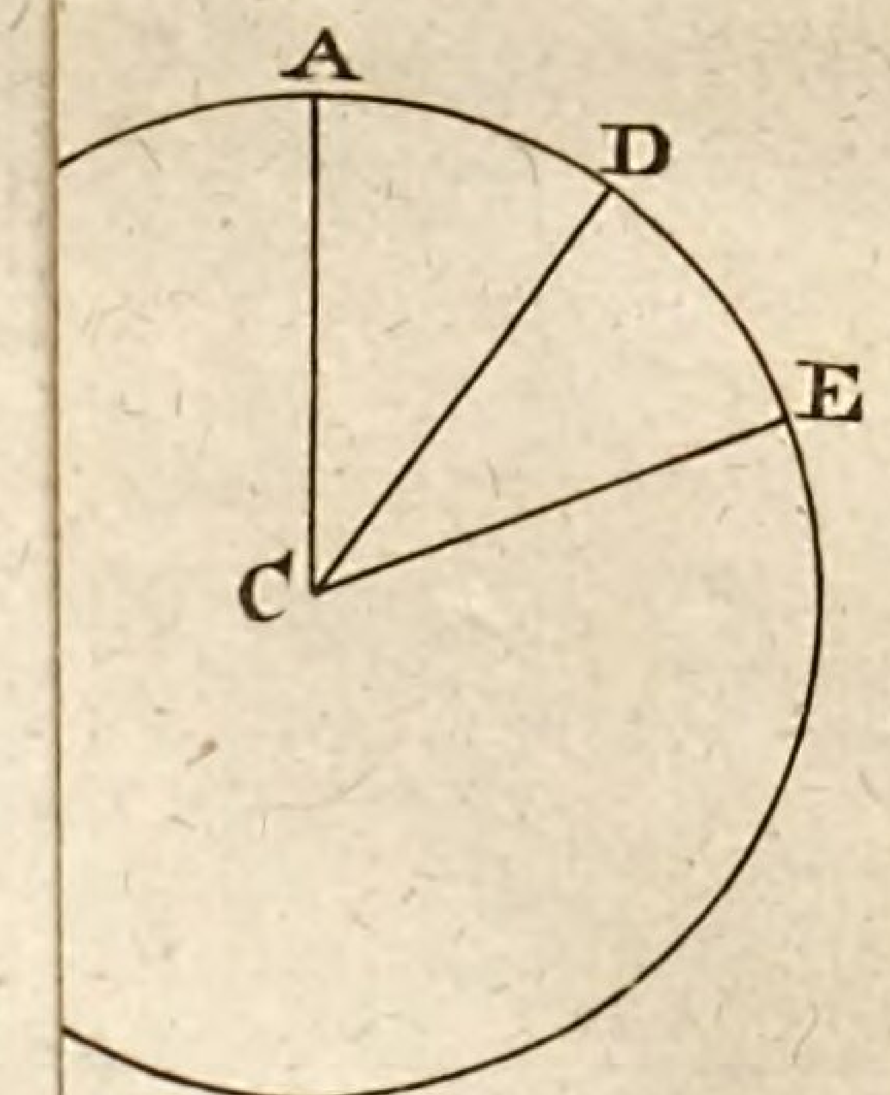
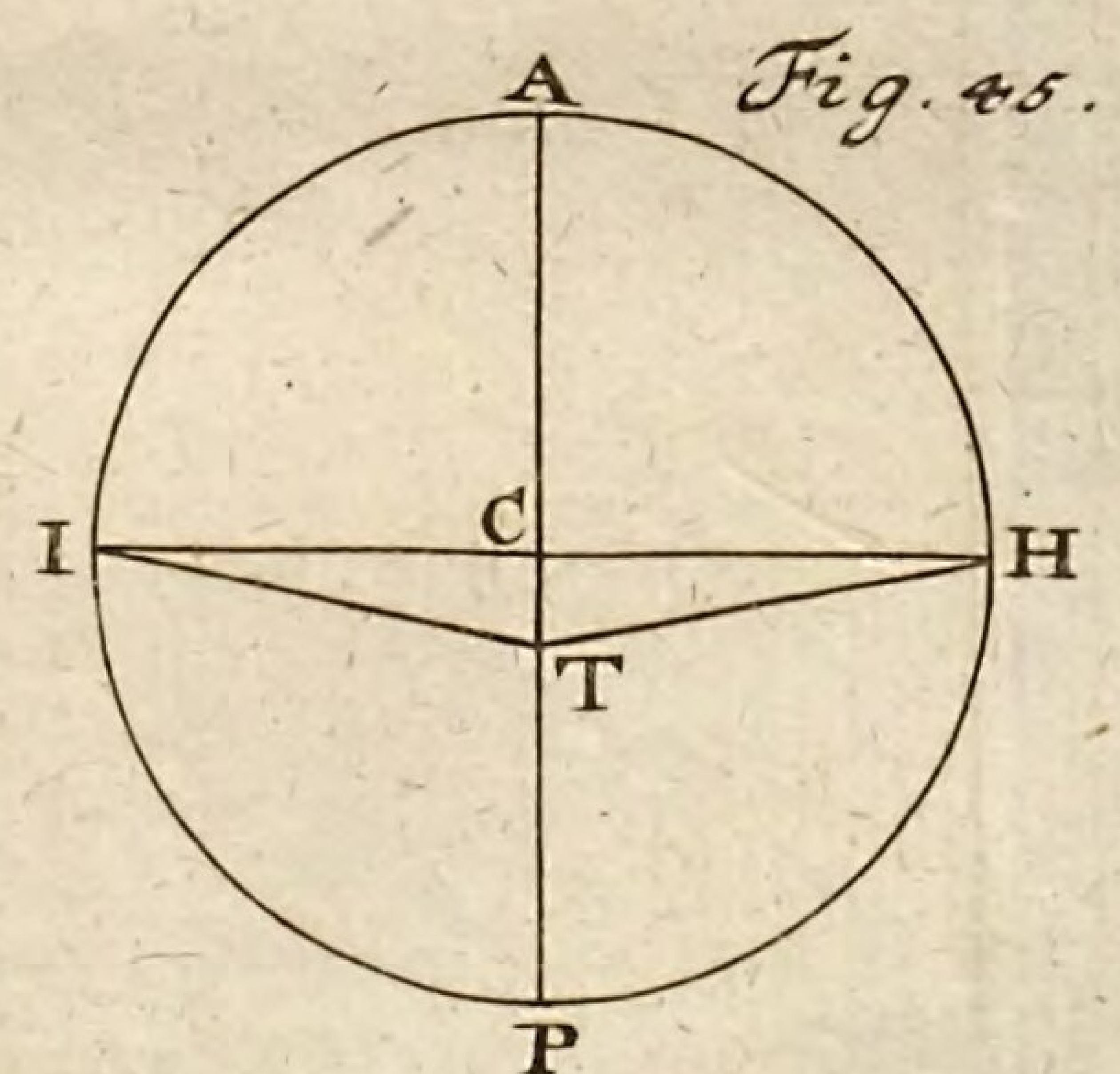




Fig. 45.



# INDICES
IN
# TOMOS QUINQUE
ELEMENTORUM
# MATHESEOS UNIVERSÆ.

I.

# CONSPECTUS ELEMENTORUM MATHESEOS UNIVERSÆ.

## TOMUS I.

1. De Methodo mathematica brevis commentatio, 1.
2. Elementa Arithmeticæ, 18.
3. Geometriæ, 117.
4. Trigonometriæ planæ, 262.
5. Analyseos finitorum, 297.
6. infinitorum, 543.

## TOMUS II.

7. Elementa Mechanicæ & Staticæ, 1.
8. Hydrostaticæ, 316.
9. Aërometriæ, 353.
10. Hydraulicæ, 421.

## TOMUS III.

11. Elementa Opticæ, 1.
12. Perspectivæ, 101.
13. Catoptricæ, 135.
14. Dioptricæ, 223.
15. Sphæricorum & Trigonometriæ Sphæricæ, 381.
16. Astronomiæ, 446.

## TOMUS IV.

17. Elementa Geographiæ & Hydrographiæ, 1.
18. Chronologiæ, 111.
19. Gnomonicæ, 199.
20. Pyrotechniæ, 261.

21. Elementa Architecturæ militaris, 317.
22. Architecturæ civilis, 383.

TOMUS V.

23. De præcipuis scriptis mathematicis brevis Commentatio, 1.

CAPUT I.

De Cursibus, Operibus atque Lexicis mathematicis, 5.

CAPUT II.

De Arithmetica, 28.

CAPUT III.

De Geometria, 32.

CAPUT IV.

De Scriptis analyticis, 51.

CAPUT V.

De Trigonometria, 71.

CAPUT VI.

De Statica & Mechanica, 78.

CAPUT VII.

De Hydrostatica, Aërometria & Hydraulica, 89.

CAPUT VIII.

De Optica, Catoptrica, Dioptrica & Perspectiva, 94.

CAPUT IX.

De Astronomia, 101.

CAPUT X.

De Chronologia, Geographia & Gnomonica, 127.

CAPUT XI.

De Architectura civili, 140.

CAPUT XII.

De Pyrotechnia, 151.

CAPUT XIII.

De Architectura militari, 153.

24. Com-

24. Commentatio de ſtudio mathematico recte inſtituendo, 165.

CAPUT I.

De diverſis cognitionis gradibus & quomodo iidem acquirantur, 169.

CAPUT II.

De modo inſtituendi ſtudium Matheſeos intellectus perficiendi cauſa, 244.

CAPUT III.

De ſtudio Arithmeticæ, Geometriæ & Trigonometriæ planæ in ſpecie, 256.

CAPUT IV.

De ſtudio Algebræ ſeu Analyſeos mathematicæ in ſpecie. 270.

CAPUT V.

De ſtudio Mechanicæ, 407.

CAPUT VI.

De ſtudio Hydroſtaticæ, Aërometriæ & Hydraulicæ, 418.

CAPUT VII.

De ſtudio Opticæ, Perſpectivæ, Catoptricæ & Dioptricæ. 427.

CAPUT VIII.

De ſtudio Sphæricorum & Trigonometriæ ſphæricæ, 444.

CAPUT IX.

De ſtudio Aſtronomiæ, 450.

CAPUT X.

De ſtudio Geographiæ, Chronologiæ & Gnomonicæ, 499.

CAPUT XI.

De ſtudio Pyrotechniæ, Architecturæ Militaris & Architecturæ civilis, 514.

## *FINIS*

*TOTIUS CONSPECTUS.*

II.

# INDEX

## Ostendens paragraphos, in quibus definitiones & propositiones Elementorum Euclidis continentur.

## Notes velim, Ar. designare Arithmeticam, G. Geometriam, An. Analysin finitorum.

Elementi I.


| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Def. 1. | G. §. 6. 8.9. | Def. 20. | G. §. 87. | Post. 2. | G. §. 21. |
| 2. | 10. 12. | 21. | 97. | 3. | 131. |
| 3. | 11. | 22. | 104. | Ax. 1. | Ar. 87.89. |
| 4. | 17. | 23. | 88. | 2. | 88. |
| 5. | 28. | 24. | 89. | 3. | 91. |
| 6. | 29. | 25. | 90. | 4. | 90. |
| 7. | 36. | 26. | 91. | 5. | 91.92. |
| 8. | 54. | 27. | 92. | 6. | 93. |
| 9. | 54. | 28. | 93. | 7. | 94. |
| 10. | 65.78. | 29. | 98. | 8. | G. §. 161. |
| 11. | 66. | 30. | 100. | 9. | Ar. §. 84. |
| 12. | 66. | 31. | 99. | 10. | G. §. 250. |
| 14. | 32. | 32. | 101. | 11. | 50. |
| 15. | 37. | 33. | 103. | 12. | 145. |
| 16. | 37. | 34. | 81. | 13. | 262. |
| 17. | 39. | 35. | 102. | 14. | 170. |
| 18. | 135. | 36. | 111. | Prop. 1. | 198. |
| 19. | 34. | Post. 1. | 20. | 4. | 179. |

Pr. 5. G. §. 184.
6. 253.
7. 202.
8. 204.
9. 209.
10. 210.
11. 212.
12. 216.
13. 147.
14. 147.
15. 156.
16. 188.
17. 247.
18. 189.
19. 189.
20. 190.
21. 300.
22. 205.
23. 208.
26. 251.
27. 255.
28. 255.
29. 233.
30. 232.
31. 258.
32. 239.240.
33. 257.
34. 335.337.
35. 383.
36. 383.
37. 385.
38. 385.
41. 386.
44. 391.

Pr. 45. G. §. 391.
46. 338.
47. 417.
48. 417.

Elem. II.

Pr. 1. An. 91.
2. 93.
3. 86.
4. Ar. 261.
An. 95.
5. 88.
6. 94.
7. 90.
8. 90.
9. 89.
11. 258.

Elem. III.

Def. 1. G. 171.
2. 47.
3. 47.
4. 225.
5. 225.
6. 45.
7. 77.
8. 70.
9. 56.
10. 46.
Pr. 1. 295.
3. 291.
4. 332.
5. 288.
6. 287.
7. 303.
8. 302.

Pr. 9. G. §. 173.
10. 203.
14. 298.
15. 299.301
16. 304.305
17. An. 291.
18. G. 308.
19. 309.
20. 313.
21. 315.
22. 350.
25. 295.
26. 315.
27. 315.
28. 289.
29. 289.
30. 293.
31. 317.
318.
319.
32. 323.
35. 381.
36. 379.
37. 380.

Elem. IV.

Def. 3. G. §. 116.
6. 117.
Pr. 5. 294.
297.
6. 353.
7. 351.
11. An. 279.
12. G. 355.
15. 357.




Elem.

Elem. V.
Def. 1. Ar. 30.
2. 142.
3. 126.
4. 131.
5. 219.
6. 155.
7. 158.
8. 155.
9. 156.
10. 159.216
11. 159.216
13. 173.
14. 169.
15. 190.
16. 193.
17. 193.
18. 194.195
19. 194.
20. 195.
Pr. 4. 185.
5. 188.
6. 188.
7. 168.
8. 203.205
9. 177.
10. 204.206
11. 167.
12. 155.
15. 178.
16. 173.
17. 193.
18. 190.
19. 188.

Pr. 22. G.§.194.
23. 198.
Elem. VI.
Def. 1. G. 175.
2. An. 261.
3. 258.
4. G. 227.
5. Ar. 159.
Pr. 1. G. 389.
2. 268.
3. 269.
4. 267.
5. 207.
6. 183.
8. 329.
9. 274.
10. 275.
12. 271.
13. 327.
16. 378.
17. 377.
18. 360.
19. 398.
20. 403.
23. 376.388
30. An.258.
33. G. 314.
Elem. VII.
Def. 1. Ar.§. 3.4.
2. 10.
3 30.
4. 30.
5. 142.
6. 72.

Def. 7.. Ar.§.73.
11. 75.
12. 79.
13. 76.
14. 80.
15. 66.69.
18. 246.
19. 248.
20. 155.
22. An.248.
23. Ar. 74.
24. 126.
26. 159.
27. 217.
Ax. 7. 210.
9. 212.
Pr. 1.Ar.§.230.
2. 228.
11. 188.
12. 187.
13. 173.
14. 194.
16. 207.
17. 178.
18. 178.
19. 297.299
20. 298.
22. 198.
Elem. VIII.
Pr. 11.Ar.§.259.
12. 259.
13. 260.
Elem. IX.
Pr. 21.An.§.72.

Pr. 22. An. §. 75.
23. 75.
24. 72.
25. 73.
26. 74.
27. 73.
28. 72.
29. 74.
30. 79.
35. 119.
36. 248.
Elem. X.
Def. 1. Ar. §. 31.
2. 31.
6. 39.
7. 43.
Pr. 3. 230.
5. 163.
6. 160.
7. 163.
8. 164.
117. G. 421.
Elem. XI.
Def. 1. G. §. 444.
3. 486.
4. 494.
6. 476.
8. 498.
9. 564.
11. 445.
12. 472.
13. 456.
14. 470.
Def. 15. G. §. 470.
16. 470.
17. 470.
18. 467.
19. 467.
20. 468.
27. 475.
28. 475.
29. 475.
30. 462.
Pr. 1. 478.
2. 480. 481
3. 482.
4. 484.
5. 491.
6. 492.
7. 483.
8. 492.
9. 495.
10. 496.
11. 505.
12. 502.
13. 488.
14. 497.
15. 500.
16. 499.
17. 501.
18. 506.
19. 508.
21. 452.
28. 537.
29. 535.
30. 535.
Pr. 31. G. §. 535.
32. 573.
33. 578.
34. 580.
Elem. XII.
Pr. 1. G. 408.
2. 408.
5. 573.
6. 573.
7. 543.
8. 578.
9. 580.
10. 547.
11. 573.
12. 578.
14. 573.
15. 580.
18. 579.
Elem. XIII.
Pr. 8. An. 294.
9. 275.
10. 279.
12. 268.
13. 299.
14. 305.
15. 302.
16. 311. & seqq.
17. 308. & seqq.
18. 301. 304 307. 310 311.

*FINIS INDICIS SECUNDI.*

III.

# INDEX AUTORUM,

## Qui in Commentatione de præcipuis ſcriptis mathematicis recenſentur.

## Notes velim Numerum Romanum Caput, ceteros vero §. §. ejusdem deſignare.


A.

*Abalphatus* Aſphahamenſis, III. 13.
*Albategnius*, IX. 2. 12.
*Alberti*, Andreas, VIII. 21.
de *Albertis*, Leo Baptiſta, XI. 1. 2. 3.
*Alexander*, Dominicus Jacobus, VI. 27. 31.
*Alhazen*, VIII. 2. 3. 31.
*Alimarus*, Dorotheus, X. 20.
*Alingham*, Wilhelmus, I. 8.
*Alphonſus* IX. IX. 25.
S. *Andreas*, Hieroſolymitanus, X. 2.
*Anonymi*, VI. 26. VII. 8. IX. 2. 57. XI. 15. 26. 30. XIII. 17. 27.
*Apollonius*, Pergæus, I. 1. 24. III. 11. 13. 25. 28. 29. IV. 1. VII. 14.
*Aratus*, X. 2.
*Archimedes*, I. 24. 34. III. 11. 12. 13. 29. VI. 1. VII. 1. 14.
**Ardüſer**, Joannes, III. 34.
des *Argues*, XI. 24.
*Ariſtæus*, III. 13. IV. 1.
*Ariſtarchus* Samius, I. 34. VII. 14.
*Athenæus*, I. 30.
*Auzout*, I. 31. 37.

B.

*Bachetus*, Caſparus, IV. 2.
*Bacon*, Rogerius, VIII. 5.
*Baker*, Thomas, IV. 8.
*Baldus*, Bernhardinus, I. 30. XI. 1.
*Balianus*, Johannes Baptiſta, VI. 5. VII. 10.
*Bara*, J. VIII. 20.
*Baratteri*, Johannes Baptiſta, XI. 26.
*Barlaamus*, Monachus, II. 5.
*Barrowius*, Iſaacus, III. 2. 11. 19. 29. IV. 8. 23. VIII. 14.
*Bartholinus*, Eraſmus, IV. 6.
*Bartſchius*, Jacobus, V. 10.
*Bayerus*, Johannes, IX. 35.
Johannes Hartmannus, II. 16.
Johannes Matthias, VI. 22.
de *Beauue*, Florimundus, IV. 6.
*Bedford*, Arturus, X. 6.
**Beeren**, Thomas Leonhardus, XII. 1.
**Behr**, Johannes Henricus, XIII. 25.
de *Belidor*, VII. 18. XII. 8. XIII. 34.
**Berger**, Chriſtianus Philippus, VI. 27. IX. 36.


Bernoulli.

*Bernoulli*, Daniel, VII. 12.
Jacobus, IV. 18. 21. IX. 39.
Johannes, IV. 14. 18. 19. 31. 33. 35. 36. X. 21.
Nicolaus, IV. 14. X. 21.
*Beroaldus*, Franciscus, VI. 20.
*Besson*, Jacobus, VI. 20.
*Beveregius*, Guilielmus, X. 5.
*Beyerus*, Johannes Hartmannus, III. 31.
de *Beze*, I. 37.
*Bierum*, Henricus, X. 33.
de *Billy*, Jacobus, III. 26.
*Bion*, Joannes Theobaldus, I. 13.
Nicolaus, IX. 35. X. 35. 38.
de *Birac*, XIII. 37.
*Biton*, I. 30.
*Blanchini*, Franciscus, IX. 8. 39. X. 7.
*Bleau*, Guilielmus, IX. 35. X. 39.
le *Blond*, XI. 9.
*Blondel*, Franciscus, I. 37. X. 7. XI. 10. XII. 8. XIII. 427.
*Boëthius*, Anitius Manlius Severinus, II. 1.
**Böckler**, Georgius Andreas, VII. 16. XI. 5. XII. 7. XIII. 36.
*Bæcklerus*, Joannes, III. 31.
*Bombelle*, XIII. 27.
*Bombelli*, Raphaël, IV. 3.
*Bonannus*, Philippus, VIII. 19.
*Bone*, Edmundus, III. 39.
*Bonjour*, Guilhelmus, X. 7.
*Borellus*, Johannes Alphonsus, III. 13. VI. 3.
de **Borgsdorf**, Ernestus Fridericus, XIII 9.
*Borromini*, Franciscus, XI. 19.
*Bose*, Georgius Matthias, IX. 43.
*Bosse*, Abrahamus, VIII. 20.
*Boyle*, Robertus, VII. 3.
*Braikenridge*, Guilielmus, IV. 37.
*Branca*, XI. 9.
**Brand**, Augustinus, XII. 6. 7.
*Braunius*, Ernestus, XII. 1.
*Briennius*, Manuel, I. 34.
*Briggius*, Henricus, V. 11.
*Brook Taylor*, IV. 31.
*Browne*, Wilhelmus, VIII. 15.
*Brunetti*, Franciscus Xaverius, IV. 39.
*Buchnerus*, Joannes Sigismundus, XII. 1.
*Bullet*, XI. 29.
*Bullialdus*, Ismaël, III. 23. IV. 17. V. 16. IX. 3. 18. 20. 28. 41.
*Buonaroti*, Michaël Angelus, XI. 7.
*Byrgius*, Justus, III. 39. IV. 38. V. 10. 14. IX. 2.

C.

de *Camus*, VI. 19.
*Calvisius*, Sethus, X. 3. 7.
*Cantzlerus*, Bernhardus, III. 32.
*Capellus*, Angelus, IX. 44.
*Carré*, IV. 20.
*Cartesius*, Renatus, IV. 6. 20. VIII. 7.
*Casatus*, Paulus, VI. 2.
*Cassini*, Johannes Dominicus, I. 37. IX. 6. 30. 53. X. 7. 24.
Filius, IX. 6.
*Castellus*, Robertus, XI. 17.
*Castronius*, Benedictus Maria, X. 37.
*Caswellus*, Johannes, I. 34.
*Cataneo*, Petrus, XI. 9.
*Cavalerius*, Bonaventura, III. 12. 24. IV. 17. V. 15.
*Ceva*, Joannes, VII. 9.
Thomas, I. 35.
*Chamberus*, Joannes, II. 5.

de *Chambray*, Roland Freard, XI. 9.
*Chambres*, E. I. 19.
*Chamberus*, Joannes, II. 5.
de *Champdoré*, Curæus, XI. 7.
*Cherubim*, VIII. 10.
*Cheynæus*, Georgius, IV. 22.
*Christmannus*, Jacobus, X. 8.
*Claramontius*, Scipio, IX 39.
*Clarke*, Joannes, IV. 39. VI. 16.
Samuel, VIII. 12.
*Clavius*, Christophorus, I. 24. II. 12. III. 33. IX. 24. 38. X. 7. 9. 26.
du *Clos*, I. 37.
*Cæhorn*, XII. 4. 7. 27. XIII. 6. 26. 27.
*Cætsius*, Henricus, X. 32.
*Collins*, Joannes, I. 34. IV. 34.
*Colombonus*, Angelus Maria, X. 38.
*Colson*, Joannes, IV. 27.
*Combachius*, Johannes, VIII. 5.
*Commandinus*, Fridericus, III. 8. VII. 16.
*Commentarii* Academiæ Scientiarum imperialis Petrapolitanæ, I. 39.
*Commentarii* de Bononiensi Scientiarum & Artium Instituto atque Academia, I. 40.
*Conradi*, Johannes Michaël, VIII. 17.
*Copernicus*, Nicolaus, IX. 2. 13. 26. 39.
*Cotes*, Rogerus, IV. 30. VI. 13.
*Crabtrius*, Guilielmus, IX. 4.
*Craige*, Johannes, IV. 23.
de *Crouzas* IV. 13. 19.
*Cunitia*, Maria, IX. 27.
*Cunn*, Samuel, II. 17.
*Cune*, Samuel, III. 39.
*Curio*, Jacobus, IX. 25.

D.

*Dasypodius*, Conradus, I. 15. III. 4.
*Dechales*, Claudius Fanciscus Milliet, I. 4. II. 12. III. 2. 29. V. 20. VI. 11. VII. 5. 15. X. 11. 14. XI. 23. XII. 1. XIII. 15.
*Demontiosius*, Ludovicus, XI. 1.
*Deran*, Philippus, XI. 24.
*Derham*, Wilhelmus, IX. 39.
*Desaguliers*, J. T. VIII. 15.
*Desargues*, VIII. 20.
*Desgodetz*, Antonius, XI. 13.
*Detonvillæus*, III. 14.
*Dieussart*, Carolus Philippus, XI. 9.
*Dilichius*, Wilhelmus, XIII. 15.
*Diophantus*, Alexandrinus, I. 23. 27. IV. 2. 9.
*Ditton*, Henricus, VI. 15.
Humphredus, IV. 39.
*Dodartus*, I. 37.
**Doegen**, Matthias, XIII. 18.
*Domicke*, VI. 16.
*Doppelmeyer*, J. Gabriel, IX. 20. X. 31. 35.

E.

*Ecchellensis Maronita*, Abrahamus, III. 13.
*Eisenschmid*, Joannes Casparus, V. 10.
**Elrich**, Daniel, XII. 1.
*Eratosthenes*, IV. 1.
*Errardus*, XIII. 27.
*Eslerus*, Joannes. IX. 24.
*Euclides*, I. 1. 2. 4. 7. 23. 24. 29. 32. 34. II. 6. 4. III. 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 10. IV. 1. VII. 14. VIII. 1. X. 15.
*Eulerus*, Leonhardus, VI. 18. VII. 12.
*Eustachius de Divinis*, I. 35.
*Eutocius*, I. 34.

F.

*Faber Stapulensis*, Jacobus, II. 3.


*Fabry*

*Fabry*, Honoratus, IV. 37. VIII. 26.
Fäsch, Joannes Ludolphus, I. 22.
Faulhaber, Joannes, IV. 38. XIII. 30.
du *Fay*, Abbas, XIII. 5.
*Fermatius*, I. 31. IV. 8.
*Feuillée*, Franciscus, X. 22.
Ludovicus, IX. 9.
*Finæus*, Orontius, III 2.
Fischer ab Erlachen, Johannes Bernhardus, XI. 18.
*Flamstædius*, Joannes, I. 34. IX. 7. 28. 33. 34.
von Flemming, Johannis Fridericus, XIII. 37.
*Flussates Candalla*, Franciscus, III. 2.
de *Fontenelle*, Bernhardus, I. 37. IV. 33.
*Fournier*, Georgius, X. 14.
*Frenicle* de Bessy, I. 31. 37.
Freytag, Adamus, XIII. 1.
*Frezier*, XI. 25.
*Frisius*, Gemma, II. 14.
*Frontinus*, *Sextus Julius*, VII. 13.

G.

*Galilæus* Galilæi, III. 39. VI. 4. VIII. 6. IX. 39. 41.
*Gallonus*, IV. 25.
*Gaubil*, IX. 9.
Gauppe, Johannes, X. 33.
*Gauricus*, Lucas, IX. 10. XI. 1.
*Gautier*, Henricus, XI. 27.
*Gaza*, Theodorus, X. 2.
*Gellibrand*, Henricus, V. 12.
*Gemma*, Frisius, II. 14.
*Germanus*, Georgius, I. 24.
*Ghetaldus*, Marinus, I. 1. IV. 6. 9. VII. 1.
*Ghislerius*, Antonius, IX. 56.
*Girardus*, Albertus, I. 23.
Glaser, Johannes Christophorus, XIII. 35.
Goldmann, Nicolaus, III. 39. XI. 11.
*Gooden*, Jacobus, V. 19.
*Gordonius*, Georgius, X. 18.
de *Gottignes*, Ægidius Franciscus, IV. 15.
*Goulon*, XIII. 31.
de *Graaf*, Abrahamus, I. 6. IV. 12.
*Grandus*, Guido, I. 35. III. 16.
s'*Graveſand*, G. J. IV. 12. VIII. 25.
*Gray*, Joannes, I. 36.
*Gregorius*, à S. Vincentio, I. 35. III. 14.
Jacobus, IV. 22. VIII. 14. 15.
David, III. 2. IV. 22. VIII. 15. IX. 22. 40.
Griendel von Aach, Johannes Franciscus, VIII. 19. XIII. 14. 21.
de *Grotte*, Alexander, XIII. 7.
Gruber, Bernhardus, X. 37. 38.
Sebastianus, XIII. 25.
*Guarinus*, X. 27.
*Guisnée*, IV. 11.
*Guldinus*, Paulus, III. 18. IV. 8.
*Gulielminus*, Dominicus, I. 40. VII. 11. 15. XI. 26.

H.

*Hadley*, J. VIII. 15.
*Halfpenny*, Guilielmus, XI. 22.
*Halley*, Edmundus, III. 13. 28. IV. 12. IX. 37.
du *Hamel*, Johannes Baptista, IX. 39.
*Hanke*, Johannes, IX. 43.
*Hartmannus*, XIII. 26.
*Harriot*, Thomas, IV. 5.
*Harris*, J. I. 18. IV. 6.
Harsdörffer, Philippus, I. 42.

*Hartsæker*, Nicolaus, VIII. 9.
*Hasius*, Johannes Matthias, III. 37. XIII. 33.
*Hausen*, Christianus Augustus, III. 16.
*Hawney*, Wilhelmus, V. 18.
*Hayes*, Carolus, IV. 24.
*Hazan*, Isaacus, IX. 25.
**Heer**, Christophorus, XIII. 14. 30.
**Heidenmann**, Christophorus, XIII 14.
*Henischius*, Georgius, II. 10. IV. 3.
ab *Herberstein*, Ferdinandus Ernestus Comes, III. 26.
*Herigonius*, Petrus, I 1. II. 12. III. 2. VIII. 1.
*Herlinus*, Christianus, III. 4.
Ludovicus Andreas, XIII. 11.
*Hermannus*, Jacobus, IV. 33. VI. 17. VII. 11. 15.
*Heron*, Alexandrinus, I. 30. VII. 16.
**Hertel**, Christianus Gottlieb, VIII. 18.
*Herward ab Hohenburg*, Johannes Georgius, II. 18.
*Hevelius*, Johannes, IX. 3. 31. 35. 39.
*Hipparchus*, IX. 2. 32. X. 2.
de la *Hire*, Philippus, III. 14. 15. 33. IV. 11. VI. 10. VII. 19. IX. 6. 30. 43. 44. X. 28.
*Histoire*, de l' Academie Royale des Sciences, I. 37.
*Hodgson*, Jacobus, X. 15.
*Hooke*, Robertus, VIII. 19. IX. 3.
*Horoccius*, Jeremias, IX. 4. 17. 39.
*Horrebowius*, Petrus, IX. 41. 50. 51. 54.
de l' *Hospital*, Marchio, IV. 11. 19. 20. 23. 39. VI. 12.
*Hortensius*, Martinus, V. 6.
*Hostus*, I. 29.
*Hugenius*, Christianus, I. 31. 35. III. 14. 20. 25. IV. 6. 14. VI. 5. 7. 8. 12. 24. VIII. 8. 13. 18. IX. 39. 48. X. 21.
*Hulsius*, Levinus, III. 39.
*Hyde*, Thomas, IX. 32.

I.

*Intieri*, Bartholomæus, IV. 37.
*Joannes de Sacro Bosco*, I. 24. IX. 24. X. 9.
*Joannes Peccamus*, VIII. 4.
*Jones*, Wilhelmus, IV. 21. 30. 32. 34.
*Jordanus*, II. 3.
*Isaacus* Monachus. X. 2.
*Julius* Africanus, I. 30.
**Jungenickel**, Andreas, VI. 2.
*Jurin*, Jacobus. X. 12.

K.

*Keill*, Joannes, III. 8. IV. 34. 35. 36. VI. 9. 12. 23. X. 18.
*Keplerus*, Joannes, III. 12. V. 10. VII. 3. VIII. 6. IX. 16. 18. 17. 27. 32. 39. 40. 55.
*Kersey*, Joannes, IV. 9.
*Kinckhuysen*, Gerhardus IV. 12.
*Kircherus*, Athanasius, I. 2. III. 40. VIII. 16.
*Klimmius*, Johannes Albertus, IX. 44.
**Kolhans**, Johannes Christophorus, VIII. 17.
*Kresa*, Jacobus, V. 22.

L.

de *Lagny*, I. 37.
*Lalovera*, Antonius, III. 26.
*Lambion*, Lambertus, XIII. 30.
*Lamy*, Bernhardus, III. 6. IV. 10. VI. 2. VII. 5. VIII. 21.

*Landsbergius*, J. H. XIII. 12.
**Langhansen**, Christophorus, IX. 43.
*Langley*, Batty, III. 36. XI. 29.
de *Lanis* Franciscus Tertius, VII. 4.
*Landsbergius*, Philippus, I. 26. V. 7. IX. 13. 16. 17. 28.
**Lauterbach**, Joannes Balthasar, XI. 14.
van *Leeuwenhoek*, Antonius, VIII. 19.
*Leibnitius*, Godofredus Guilielmus, I. 11. 12. 21. 34. II. 15. IV. 10. 20. 22. 23. 31. 33. 34 35. IX. 16.
*Leotaudus*, Vincentius, II. 12.
*Leupoldus*, Jacobus, VI. 20. VII. 19.
*Leutmannus*, Joannes Georgius, IV. 26. VIII. 18.
*Leyborn*, Wilhelmus, I. 5.
**Liebknecht**, J. G. X. 13.
*Limpergh*, Petrus, VI. 23.
*Longomontanus*, Christianus Severinus, IX. 14. 16. 27.
*Lorenzini*, Laurentius, III. 22.
*Lorinus*, Bonajutus, XIII. 19.
de *Lorme*, Philibertus. XI. 24.
*Lowthorp*, Joannes, I. 36.
*Lucas Paciolus de Burgo S. Sepulchri*, II. 6. IV. 3.
*Ludovicus*, Ferrariensis, IV. 3.
*Ludolphus à Ceulen*, III. 21.

M.

*Mac Laurin*, Colinus, IV. 37.
*Maffejus*, Scipio, XI. 17.
*Maginus*, Joannes Antonius, IX. 55.
le *Maitre*, Alexander Christianus, XIII. 20.
*Mallet*, Allain Manesson, III. 30. XIII. 28.
*Manfredi*, Eustachius, I. 40. IX. 52. 53. 56. X. 7.
*Manfredi*, Gabriel, I. 40. IV. 20.
*Maphæus*, Thomas Pius, X. 7.
*Maraldus*, IX. 6.
de *Marchettis*, Angelus, III. 7. 27.
*Marinonius*, Joannes Jacobus, VIII. 13.
de *Martino*, Nicolaus, III. 16.
*Martius*, Georgius Conradus, XIII. 25.
*Mariottus*, I. 31. VI. 11. VII. 2. 10. 19. VIII. 13.
*Marolois*, XIII. 27.
*Maurolycus*, Franciscus, I. 32. II. 9. VII. 14.
de *Maupertuis*, IX. 25. 39.
S. *Maximus*, Martyr, X. 2.
de *Medrano*, Don Sebastian Fernandez, XIII. 24.
*Megerlinus*, Petrus, IX. 41.
**Melder**, Gerhardus, XIII. 1.
*Menechmus*, IV. 8.
*Menelaus*, VII. 14.
*Mercator*, Nicolaus, I. 5. IV. 21. IX. 23. 27.
*Mersennus*, Marinus, I. 31. 37. VII. 14.
*Metius*, Adrianus, II. 14. III. 34. X. 39.
*Meyer*, Cornelius, XI. 26.
*Mezzavacca*, IX. 56.
*Michaëlis* Georgius, X. 32.
**Mieth**, Michaël, XII. 2.
*Milnes*, Jacobus, III. 14.
*Miscellanea* Berolinensia, I. 38.
de *Moivre*, Abrahamus, IV. 14. 29.
*Mæstlinus*, Michaël, IX. 2. 24.
*Molerus*, Elias, IX. 43.
*Molyneux*, Wilhelmus, VIII. 8.
de *Monmort*, Remundus, IV. 14.

*Moore*, Jonas, I. 3.
*Morinus*, Johannes Baptista, IX. 27. 58.
*Morlandus*, Samuel, II. 15.
*Motte*, Benjamiuus, I. 36.
*Muet*, XI. 15.
**Müller**, Johannes Ulricus, X. 32.
*Münsterus*, Sebastianus, X. 8. 29.
*Muhammedes*, Tixinus, IX. 32.
van *Musschenbræk*, Petrus, X. 23.
*Mydorgius*, Claudius, III. 14. VII. 14.

N.

*Neperus*, Joannes, II. 18. V. 8. 14.
**Neubauer**, Christianus, XIII. 8.
*Newton*, Joannes, V. 13. IX. 20. 28.
*Newton*, Isaacus, I. 34. IV. 12. 16. 18. 20. 21. 22. 23. 26. 27. 30. 35. VI. 13. VII. 6. 11. VIII. 12. 15. IX. 16. 40. X. 6.
*Niceron*, Joannes Franciscus, VIII. 22.
*Nicomachus*, II. 1. 6.
*Nieuwentiit*, Bernhardus, IV. 33.
*Noël*, Franciscus, IX. 9. 22.
*Nourse*, Robinson, VII. 11.
*Norwood*, Richardus, V. 17.

O.

de *Omerique*, Hugo, IV. 16.
*Ori*, Rabbi, X. 8.
*Origanus*, David, IX. 55.
de l' *Orme*, Philibertus, XI. 2. 6.
*Oswaldus*, Erasmus, IX. 10.
*Otho*, L. Valentinus, V. 4.
*Oughtredus*, Guilielmus, I. 27. IV. 4. V. 16. VI. 2. 26. VII. 1.
*Ozanam*, I. 7. 17. 33. 43. III. 15. 39. 33. IV. 10. 11. V. 20. 21. XIII. 24.

P.

de *Pagan*, Comes, III. 23. IX. 19. 28. XIII. 2. 17. 27.
*Palladius*, Andreas, XI. 4. 5. 9. 10.
*Palma*, Johannes Baptista, III. 26.
*Pappus*, Alexandrinus, I. 34. III. 13. 17. 28. 29. IV. 1. VI. 1. VII. 14.
*Pardies*, Ignatius Gaston. III. 6. VI. 2. 11. X. 36.
*Parent*, VI. 11.
*Pascal*, III. 14. IV. 14.
*Paschalius*, Julius, VI. 20.
*Patoun*, Archibaldus, X. 17.
*Peletarius*, Jacobus, III. 2.
*Pemberton*, IV. 16. 27.
*Pena*, Joannes, VIII. 1. 6.
*Perrault*, I. 37. VI. 3. 6. 24. XI. 2.
*Petavius*, Dionysius, X. 2. 5.
*Philander*, Guilielmus, XI. 1.
*Philo*, I. 30.
*Philosophical Transactions*, I. 36.
*Picardus*, I. 31. VII. 10. 19. X. 24. 28.
*Pitiscus* Bartholomæus, V. 3. 5.
*Pitot*, X. 21.
*Polenus*, Joannes, II. 15. VII. 13. IX. 40.
*Polynier*, Petrus, III. 7.
*Porphyrius*, I. 34.
*Porta*, Joannes Baptista, VIII. 6.
*Portius*, Lucas Antonius, VII. 16.
*Post*, Petrus, XI. 16.
*Prestet* Joannes, IV. 9. 10.
*Psellus*, II. 2.
*Ptolomæus*, Claudius, I. 34. V. 1. IX. 2. 10. 11. 32. 58. X. 9.
*Purbachius*, Georgius, V. 7. IX. 2. 11. 24. 25.

*Puzzo*, Andreas, VIII. 24.

Q.

*Quadrus*, Joannes Ludovicus, X. 38.
*Quartaironius*, Dominicus, X. 7.

R.

*Rabuel*, Claudius IV. 7.
de *Ramellis*, Auguſtinus, VI. 2.
*Ramus*, Petrus, III. 5. VII. 14.
*Ranzovius*, Henricus, IX. 58.
*Raphſon*, Joſephus, IV. 12. 35.
de *Rees*, K. F. II. 14.
*Regiomontanus*, Joannes, V. 2. 14. IX. 2. 11. 24. 25.
*Reidius*, I. 36.
*Reinholdus*, Eraſmus, III. 38. IX. 26.
*Rembold*, Johannes Chriſtophorus, VIII. 23.
*Renau*, X. 21.
*Reyherus*, Samuel, II. 18.
*Reyneau*, Carolus, IV. 25.
*Rheticus*, Georgius Joachimus, V. 3. IX. 39.
*Rhodius*, Ambroſius, VIII. 4.
*Riccatus*, Jacobus, I. 40.
*Ricciolus*, Joannes Baptiſta, IX. 5. 22. 28. 32. 39. X. 4. 10. 11.
*Riccius*, Michaël Angelus, IV. 21.
*Richardus*, Claudius, III. 13.
*Richerus*, I. 37.
**Rimpler**, Georgius, XIII. 10. & ſeqq.
*Riſnerus*, Fridericus, VIII. 2. 3.
*Rivius*, Gualterus H. XI. 2.
*Rizettus*, Joannes, I. 40.
*Robervallius*, Ægidius Perſonerus, I. 31. 37. IV. 8.
*Rœmerus*, Olaus, I. 37. VII. 10. IX. 50. 51. 54.
*Rohault*, Jacobus, VI. 2.
*Rolle*, IV. 13.
*Romanus*, Adrianus, I. 25.
*Ronayne*, IV. 32.
*Rondelli*, Geminianus, V. 15.
*Roſetti*, Donatus, XIII. 7. 20.
de *Roſſi*, Dominicus, XI. 12.
*Roſtius*, Joannes Ludovicus. IX. 45.
*Rothmannus*, Chriſtophorus, IX. 2.
*Rozard*, XIII. 23.
*Rudolphus*, Chriſtophorus, IV. 3.
*Ruggieri*, Ferdinandus, XI. 20.
de *Ruſenſtein*, Henricus Ruſius Baro, XIII. 3.

S.

*Saccherius*, Hieronymus, III. 9.
*Scagiler*, Joſephus, I. 24.
de *Saint Julien*, Chevalier, XII. 5. 7. XIII. 24. 27.
*Salmaſius*, Claudius, XI. 1.
*Santini*, Vincentius, III. 16.
*Sardius*, XIII. 27.
*Scaliger*, Joſephus, X. 1.
*Scamozzi*, Vincentius, XI. 8. 9.
*Scarlet*, Eduardus, VIII. 15.
*Scharpius*, Abrahamus, III. 35. IX. 7.
**Scheffelt**, Michaël, III. 39.
*Scheinerus*, Chriſtophorus, VIII. 11. IX. 39.
**Scheiter**, Joannes Berhardus, XIII. 8. 27.
*Scheubelius*, Joannes, III. 3.
**Scheubler**, Joannes Jacobus, X. 34.
*Schickardus*, Wilhelmus, IX. 2. 35.
**Schildknecht**, Wendelinus, XIII. 16.
*Schmidius*, Joannes Andreas, III. 6.
*Schonerus*, Joannes, III. 5. V. 2. IX. 25. 35. 37. 46. 58.
Andreas, IX. 46.

à *Schoo-*

à *Schooten*, Franciscus, III. 25. IV. 14. 6. 7.
*Schottus*, Casparus, I. 2. 41. II. 12. III. 40. VI. 28. 29. VII. 16. IX. 48.
*Schreckenfuchsius*, Erasmus Oswaldus, IX. 24.
*Schwenterus*, Daniel, I. 42. III. 31.
*Schyrlæus de Rheita*, Antonius Maria, IX. 42.
*Scipio Ferreus*, IV. 3.
*Serenus*, III. 13.
*Sererius*, Josephus, I. 13. 20.
*Serlius*, Sebastianus, XI. 4.
**Seyler**, Joannes Christianus, XI. 9.
*Simienowitz*, Casimirus, XII. 1.
*Slusius*, Renatus, IV. 8.
*Smith*, Jacobus, XI. 2. 3.
Lobertus, IV. 30.
*Snellius*, Willebrordus, I. 1. III. 21. V. 6. VIII. 7. IX. 2. 19. 23.
*Speckle*, Daniel, XIII. 13.
*Stadius*, Joannes, IX. 55.
**Stengel**, Johannes Peterson, X. 32.
*Stephanus de Angelis*, III. 24.
*Stevinus*, Simon, I. 23. VI. 2. 3. VII. 14.
*Stifelius*, Michaël, II. 7. IV. 3. V. 14.
*Stirling*, Jacobus, IV. 26. 28.
*Stone*, E. IV. 19.
*Strada*, Jacobus, VI. 20. XI. 4.
*Strauchius*, Ægidius, IX. 35. X. 5.
*Streete*, Carolus, IX. 28.
Thomas, IX. 20.
*Sturmius*, Joannes Christophorus, I. 9. III. 11. X. 30. XIII. 22.
*Sturmius*, Leonhardus Christophorus, I. 10. III. 38. VII. 19. X. 13. XI. 7. 11. 21. XIII. 5. 10. 27.
*Sully*, Henricus, VI. 27.
*Surirey de St. Remy*, XII. 3.
*Sutherland*, Wilhelmus, XI. 28.
**Süttinger**, Daniel, XIII. 10.
*Swizer*, Stephanus, VII. 16.

T.

*Tacquet*, Andreas, I. 28. II. 11. III. 2. 11. 33. VIII. 14. IX. 15. 38.
*Tartaglia*, Nicolaus, II. 8. III. 2.
*Tatius*, Achilles, X. 2.
*Taylor*, Jacobus, I. 8.
Brook, IV. 31.
*Teyler*, Joannes, XIII. 33.
*Theodosius*, I. 1. 4. 24. III. 11. 29. VII. 14.
*Torricellius*, Evangelista, I. 31 37. III. 12. VI. 5.
*Traberus*, Zacharias, VIII. 16.
*Trapezuntius*, Georgius, IX. 10.
*Trevigar*, L. IV. 39.
**Trew**, Abdias, III. 32.
de *Tschirnhausen*, Ehrenfried Waltherus, IV. 12.
*Tycho de Brahe*, IX. 2. 27. 32. 47.

U.

*Valk*, Gerardus, IX. 37.
*Varenius*, Bernhardus, X. 12.
*Varcinus*, Amatus, I. 4.
*Varignonius*, IV. 19. VI. 3. 4. 14. VII. 11.
de *Vauban*, Comes, XIII. 5 17. 23. 26. 27. 32.
*Ubaldus*, Guidus, VI. 2. VII. 14.
*de la Vergne*, Jacobus, XIII. 21.
*Veteranus*, Simon Laurentius, I. 28.
*Victoria*, X. 2.
*Vieta*, Franciscus, I. 1. 24. 25. IV. 4. 9. X. 7.
*Vignola*, Jacobus Barozzius, XI. 7. 9. 10.


de *Ville*,

de *Ville*, Antonius, XIII. 17. 27.
*Villemot*, Philippus, IX. 16.
*Vingboon*, Philippus, XI. 16.
*Virdungus*, Joannes, IX. 25.
*Vitalis*, Hieronymus, I. 16.
*Vitellio*, I. 31. VIII. 3.
*Vitruvius*, XI. 1. 10.
*Viviani*, Vincentius, I. 33. III. 13. 22. 26.
*Vlacq*, Adrianus, V. 11. 21.
*Ulugh Beigh*, IX. 32.
**Vogel**, Johannes, XI. 23.
**Voigtel**, Nicolaus, III. 38
*Ursinus*, Benjamin, V. 9.
**Uttenhöffer**, Casparus, X. 34.

W.

*Waller*, Richardus, X. 24.
*Wallisius*, Joannes, I. 34. II. 12. IV. 17. 18. VI. 7. 8. VII. 5.
*Waltherus*, Bernhardus, IX. 2. 25.
*Wardus*, Joannes, X. 18.
Sethus, V. 16. IX. 18. 19. 20.
*Warnerus*, Waltherus, IV. 5.
*Weidlerus*, Joannes Fridericus, III. 38.
*Weigelius*, Erhardus, X. 7. 10.
**Weinig**, Joannes Christophorus, VII. 2.
*Wells*, Eduardus, II. 12.
*Welperus*, Eberhardus, X. 29. 30.
*Wernerus*, Joannes, IX. 2. 25.
**Wertmüller**, Johannes Jacobus, XIII. 29.
*Whiston*, Guilielmus, III. 2. IV. 12. IX. 23. 28.
*Wideburgius*, Joannes Bernhardus, IX. 43.
**Wilhelm**, Joannes, XI. 23.
*Wilhelmus*, Landgravius Hassiæ, IX. 2.
*Willichius*, Jodocus, II. 2.
*Wilson*, Henricus, III. 33. V. 16. X. 16.
*Wing*, Vincentius, IX. 2. 20.
de *Witt*, Joannes, IV. 6. IX. 38.
*Wolfius*, Christianus, I. 11. II. 13. III. 10. VII. 7.
Jeremias, XI. 21.
**Wormbser**, David, XIII. 19.
*Wotton*, Henricus, XI. 1.
*Wren*, Christophorus, VI. 7.
*Wurstisius*, Christianus, IX. 24.
a *Wurtzelbauer*, Joannes Philippus, IX. 49.

X.

*Xylander*, Guilielmus, II. 2. IV. 2. 3.

Z.

*Zahn*, Joannes, VIII. 16.
*Zanottus*, Franciscus Maria, I. 40.
a *Zesen*, Philippus, XIII. 28.
**Zimmermann**, Joannes Jacobus, IX. 29. 41. 43.
*Zumbach de Kæsfeld*, Lotharius, IX. 36.
*van Zyl*, Joannes, IV. 23.

# FINIS
## INDICIS TERTII.

IV.

# INDEX
## *RERUM ET VERBORUM*
## TOMO I.
## CONTENTORUM.

Notes velim, literam *c.* Commentationem de methodo mathematica, *a.* Arithmeticam, *g.* Geometriam, *t.* Trigonometriam planam *f.* Analysin finitorum, *i.* Analysin infinitorum & numeros §. §. designare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime præcedentem.

A.

*Abaci Pythagorici* constructio, *a.* 109. necessitas, 110.

*Abscissa*, *f.* 371.

*Additio.* Definitio, *a.* 61. quomodo absolvatur, 96. 98. in numeris concretis, 99. examen, 101. 107. hujus fundamentum, 103. signum, 63. quomodo addiscatur, 97.

*Additio iterata ejusdem numeri* quid sit, *a.* 62.

*Æqualitas.* Definitio, *a.* 15. signum, 18. 19. unde colligatur, 87. 88. 91. 93 94. 175. 176. 177.

*Æqualitas angulorum* unde colligatur, *g.* 167.

*Æquatio.* Definitio, *f.* 133. natura explicata, 329. reductio per analogias, 259. 266. 268. 289. transformatio in aliam, 354. in locales resolutio, 620.

*Æquatio algebraica* quænam dicatur, *f.* 378.

*Æquatio biquadratica* quomodo construatur, 616. & seqq. 622. quomodo resolvatur, 362. quomodo ad cubicam reducatur, 361.

*Æquatio Circulorum superiorum* generalis, 517.

*Æquatio Cissoidis*, 548.

*Conchoidis*, 538.

*Æquatio cubica.* Definitio, 139. quomodo resolvatur, 358. quomodo construatur, 607. & *seqq.* 622.

*Æquatio ellipsis*, 420. 431. 432. 454.

*evolutæ* qomodo inveniatur, 321.

*exponentialis.* Definitio, 270.

*Æquatio hyperbolæ* respectu axis, 459. & *seqq.* 534. intra asymptotos, 488. 490. respectu diametri, 500. 502.

*Æquatio hyperbolarum infinitarum*, *f.* 425.
*Æquatio parabolæ* externæ, 419. internæ respectu axis, 388. respectu diametri, 416.
*Æquatio parabolarum infinitarum*, 519.
*Æquatio simplex*. Definitio, 138. constructio geometrica, 252.
*Æquatio quadratica*. Definitio, 139. constructio geometrica, 253. reductio ad inventionem linearum reciprocarum, 263. 265.
*Æquationum superiorum* constructio geometrica, 605. & seqq.
*Æquemultiplicium* proportio, *a.* 219.
ex *Æquo proportionalia*, 194. 198.
*Aggregatum*. Definitio, 61.
*Algebra*. Definitio, *f.* 132. applicatio ad problemata arithmetica determinata, 144. & seqq. indeterminata, 223. & seqq. ad Geometriam elementarem, 250. & seqq. sublimiorem, 367. & seqq. Trigonometriam planam., 316.
*Alternatio* rationum, *a.* 173.
*Altitudo* figuræ. Definitio, *g.* 115. qualis linea sit, 227.
*Altitudo* oblongi, 229.
quadrati, 229.
*Altitudo* trianguli quomodo inveniatur, 394. quomodo ex lateribus computetur, 287.
*Altitudo* trianguli rectanguli, 228.
*Altitudines*, quomodo metiamur, *g.* 284. & seqq. *t.* 75. 83.
*Anagrammata* omnia possibilia detegendi modus, *f.* 131.
*Analysis mathematica*. Defenitio, *f.* 1.
*Analyseos perfectæ* exemplum, *a.* 84. 85.
*Angulus*. Definitio, *g.* 54. quomodo denominetur, 55. describatur, 155. alteri æqualis construatur, 208. metiendi modus, 152. bisectio 209. 269. 270. trisectio, *f.* 629. quantitas a cruribus independens, *g.* 140. quomodo hæc æstimetur, 58. 59.
*Anguli* quomodo distinguantur, *g.* 58. quomodo in figura rectilinea per calculum eruantur, *t.* 54.
*Angulorum* æqualitas unde colligatur, *g.* 141. 142.
*Angulorum* æqualium quales sint mensuræ, *ibid.*
*Angulorum* circa idem punctum constitutorum ratio ad rectum, 159. 160.
*Angulorum* Congruentia, 166.
similium ratio, 174.
*Angulus acutus*. Definitio, *g.* 66. relatio ad rectum, 146.
*Anguli alterni*. Definitio, *g.* 68. ratio intra parallelas, 233.
*Anguli cantigui*. Definitio, *g.* 60.
*Angulus contactus*. Definitio, 76. qualis sit, 305. 306.
*Angulus deinceps positus*. Definitio, 62. qualis sit, 63. 64. quando in campo eum metiri teneamur, 150. 151.
*Angulorum deinceps positorum* ratio ad rectum, 147. quot iidem sint graduum, 148.
*Angulus ad centrum*. Definitio, *g.* 72. qualis sit, 73. ratio ad angulum ad peripheriam, 313.

*Angulus extra* centrum. Definitio, 74. 75. menſura, 315.
*Anguli homologi.* Definitio, *g.* 110.
*Angulus obliquus.* Definitio, 66.
*Angulus obtuſus.* Definitio, 66. relatio ad rectum, 146.
*Angulorum obtuſorum* ſinus, *t.* 6.
*Anguli oppoſiti.* Definitio, *g.* 69.
*oppoſitus externus*, ibid.
*internus*, ibid.
*Angulus ad peripheriam.* Definitio, *g.* 70. Menſura 314.
*Anguli ad peripheriam* quando æquales, 315.
*Angulorum in polygono* ſumma quomodo inveniatur, 343.
*Angulorum in polygono regulari* quantitates, 345. quomodo inveniantur, 344. 349.
*Angulus ſegmenti.* Definitio, *g.* 77.
*Anguli majoris ſegmenti* menſura, 323.
*Anguli minoris ſegmenti* menſura, 322.
*Angulus in ſegmento.* Definitio, *g.* 70.
*Angulus in majore ſegmento* qualis, 318. ratio ad angulum minoris ſegmenti, 323.
*Angulus in minore ſegmento* qualis, 319. ratio ad angulum majoris ſegmenti, 323.
*Angulus in ſemicirculo* qualis, 317.
*Angulus rectus.* Definitio, *g.* 65. menſura qualis, 143. 144.
*Anguli recti* quando æquales, 145.
*Angulus ſolidus.* Definitio, 445. 448. proprietates, 446 & ſeqq. æqualitas, 449. ſimilitudo, 451. magnitudo, 452.
*Anguli verticales.* Definitio, *g.* 67. ratio ad ſe invicem, 156.
*Annuli* area quomodo inveniatur, 433.
*Antecedens* rationis, *a.* 126.
*Antilogarithmus*, *t.* 31.
*Arcus.* Definitio, *g.* 41. quomodo biſecetur, 293. perficiatur, 295. triſecetur, *f.* 629. per datum numerum multiplicetur, 326. in communi menſura per calculum inveniatur, *t.* 49.
*Arearum ichnographiæ* quomodo perficiendæ, *g.* 363. & ſeqq.
*Areæ curvæ* elementum, *i.* 99.
*Arithmetica.* Definitio, *a.* 1.
*Arithmetica practica.* Definitio, *a.* 1. an ſit methodus inveniendi, 2.
*Arithmetica infinitorum.* Definitio, *i.* 333. uſus in Geometria, 348 & ſeqq.
*Arithmetica irrationalium*, *f.* 59. & ſeqq.
*Arithmetica ſpecioſa.* Definitio, *f.* 2.
*Arithmetice proportionalia.* Definitio, *a.* 323. proprietates, 324. & ſeqq.
*Artis characteriſticæ* præſtantia, *a.* 52.
*Artis inveniendi* regulæ ab Algorithmo abſtractæ, *a.* 125.
*Aſymptotus* Ciſſoidis, *f.* 549.
Conchoidis, 537.
*Aſymptoti hyperbolæ.* Definitio, 474.
*Aſymptoti* curvarum algebraicarum quomodo determinentur, *t.* 46.
*Atramentum* in Geometria practica quale commendandum, *g.* 124.
*Axioma.* Definitio, *c.* 30. quænam propoſitiones in hunc numerum referantur, 31. abuſus circa ea vitandus, 32. quando numerus minuatur,

nuatur, 33. quænam cum axiomatis confundantur, 34.
*Axiomata mathematica*, *a*. 81.
*Axis conjugatus*. Definitio, *f*. 461.
*Axis* sphæræ, *g*. 470.
*Axis transversus*. Definitio, *f*. 459.
B.
*Baculi* quomodo in linea recta terræ infigantur, *g*. 125.
*Basis figuræ*. Definitio, 112. 113.
*Binomium* quomodo ad dignitatem quamcunque evehendum, *f*. 95. & seqq.
*Biquadratum*. Definitio, *a*. 252.
C.
*Calculus differentialis*. Definitio, *i*. 1. regulæ, 10. & seqq., usus in determinandis tangentibus, 20. & seqq. in determinandis maximis & minimis, 61. & seqq.
*Calculus differentio-differentialis*. Definitio, *i*. 293. usus in determinandis evolutis curvarum & radio osculi, 313. & seqq. item puncto flexus contrarii, 301. & seqq.
*Calculns exponentialis*. Definitio, *i*. 263. regulæ, 266. 267. usus, 271. & seqq.
*Calculus integralis*. Definitio, *i*. 91. usus inquadrandis curvis, 97. & seqq. in rectificatione curvarum, 143. & seqq. in cubandis solidis, 196. & seqq. in doctrina Logarithmorum, 255. in methodo tangentium inversa, 72. & seqq.
*Calculus literalis* in integris, *f*. 27. & seqq. in fractis, 41. & seqq. pro potentiis, 54. & seqq. usus in inveniendis theorematis, 72. & seqq.
*Calculus potentiarum*, *f*. 54. & seqq.
*Calculus summatorius*. Definitio, *i*. 91.
*Calculi universalis* idea, *a*. 95.
*Cathetus*. Definitio, *g*. 96.
*Centrum*. Definitio, *g*. 37.
*Centrum* hyperbolæ. Definitio, *f*. 461.
*Centrum* sphæræ, *g*. 470.
*Chorda*. Definitio, *g*. 38. quænam maxima, 299. quomodo ex arcu inveniatur, 171. quomodo ex alia Chorda data, *i*. 184.
*Chordarum* proprietates, *f*. 320. & seqq. relatio ad se invicem, *g*. 301. in circulo ductarum proprietates & symptomata, 289. 290. 291. 292. 298. 312. se mutuo secantium proprietates, 334. 381.
*Chorda arcus dimidii* quomodo inveniatur, *g*. 423.
*Chordæ arcuum multiplorum* quomodo inveniantur, *f*. 326.
*Citationum* usus in demonstrando, *c*. 44
*Circinus* qualis esse debeat, *g*. 133.
*Circulus*. Definitio, *g*. 37. descriptio, 131. 132. 294. per quæ determinetur, 294. quando alterum secet, 197.
*Circuli* ad triangulum sibi æquale reductio, *g*. 410. subtangens, *i*. 23. subnormalis quomodo determinetur, 38. rectificatio, 153. 157. 158. quadratura, 124. area quomodo inveniatur, *g*. 429. & seqq.
*Circulo* quomodo quadratum circumscribatur, *g*. 351. quomodo polygonum regulare, 335.
*Circuli concentrici*. Definitio, *g*. 44. symptomata, 137.
*Circuli eccentrici*. Definitio, ibidem quinam sint, 49. 287. 288.

*Circuli se extus tangentes* quales sint, g. 49.
*Circuli se intus tangentes* quales sint, 287.
*Circuli se mutuo secantes* quales sint, 288.
*Circuli superiorum generum.* Definitio, *f.* 516. æquatio, 517.
*Circulorum æqualitas* unde colligatur, g. 171.
*Circulorum congruentia* unde colligatur, g. 164. 296.
*Circulorum* ratio ad seinvicem, 409. 412.
*Circulorum* sectio, 203.
symptomata, 287. & seqq.
*Circulorum infinitorum* maxima ap-applicata, *i.* 65. subtangens, 24. subnormalis, 39.
*Cissois Dioclis.* Definitio, *f.* 544. æquatio, 548. genus, 550. proprietates, 545. & seqq. subtangens, *i.* 31. subnormalis, 43. quadratura, 133.
*Combinationes* omnes possibiles quomodo inveniantur, *f.* 220.
*Combinationum* numerus quomodo inveniatur, 219.
*Commensurabilia.* Definitio, *a.* 31. quænam sint, 160. ratio ad se invicem, 163. 164. rationis exponens, 166.
*Communicantia irrationalia*, *f.* 63.
*Complementum ad totum* quid dicatur, *a.* 9.
*Compositio* rationum, 190.
*Compræsentia* quid significet, 27.
*Congruentia.* Definitio, *g.* 3. quid sit, 161.
*Congruentia* angulorum, 166. linearum, 163. magnitudinum, 162.
*Conchilis*, *f.* 535.
*Conchois* Nicomedis *prima* & *secunda.* Definitio, *f.* 535. æquatio, 538. proprietates, 536. 537. punctum flexus contrarii, *i.* 310. quadratura, 138. subtangens, 49. subnormalis, 49.
*Conchoidum* species, *f.* 540. 543.
*Conchoides infinitæ*, 541.
*Conoides parabolicum* quomodo cubetur, *i.* 202. 214. 352. quomodo superficies ejus complanetur. 223.
*Conoidis hyperbolici* cubatio, *i.* 208. 209.
*Conus.* Definitio, *g.* 467. proprietas, 468. constructio, 523. ad prisma reductio, 547. quomodo soliditas inveniatur & superficies, *g.* 548. *i.* 199. 220. 351. quomodo superficies ad triangulum, *g.* 519. ad sectorem reducatur, 520.
*Conus rectus.* Definitio, *g.* 467.
*scalenus.* Definitio, *g.* ibid.
*Coni truncati* constructio, 524. soliditas & superficies computanda, 549.
*Coni superiorum generum.* Definitio, *f.* 527.
*Conorum* æqualitas unde colligatur, *g.* 542. ratio ad se invicem, 572. & seqq.
*Conorum æqualium* proprietas, 580. quinam maximam superficiem habeat, *i.* 87.
*Conorum similium* ratio, 570. 578.
*Consequens rationis* terminus, *a.* 126.
*Contraharmonice proportionalium* inventio, *f.* 194. 195.

*Conver-*

*Convergentia* linearum. Definitio, *g.* 83. proprietas, 262.

*Conversio* rationum, *a.* 193.

*Corollarium.* Definitio, *c.* 49. quando demonstratione indigeat, 50.

*Corpora Platonica*, *g.* 454.

*Corpus.* Definitio, *g.* 444. quomodo construatur, 529. quomodo soliditas inveniatur, 559.

*Corporis cavi* soliditas quomodo inveniatur, *g.* 563.

*Corpus irregulare.* Definitio, 453. quomodo soliditas inveniatur, 559. 561.

*Corpus regulare.* Definitio, 453. proprietas, 455. quomodo soliditas ac superficies inveniatur, 558. & seqq. quomodo hæc corpora construantur, 525. & seqq. quot eorum sint, 530.

*Corporum similium* proprietates, *g.* 565. & seqq. ratio inter se, 578. *f.* 128.

*Cosecans.* Definitio, *t.* 11.

*Cosinus.* Definitio, *t.* 11. quomodo inveniatur, 16. angulorum multiplorum quomodo inveniatur, *f.* 325.

*Cotangens.* Definitio, *t.* 11.

*Crus* anguli. Definitio, *g.* 54.

*Cubatio* solidorum rotatione genitorum, *i.* 197.

*Cubus, cubicus numerus.* Definitio, *a.* 248. logarithmus qualis, 339. quomodo in progressionem arithmeticam resolvatur, *f.* 3.

*Cubicorum numerorum* in serie naturali progredientium differentiæ, *f.* 84. summatio, 200.

*Cubocubus*, *a.* 252.

*Cubus cubi*, ibid.

*Cubocubocubus*, ibid.

*Cubus*, solidum. Definitio, *g.* 459. proprietates, 460. 461. quale corpus, 530. constructio, 513. quomodo superficies & soliditas inveniatur, 531. 532. quomodo dato corpori æqualis inveniatur, 576. parallelepipedo æqualis construatur, *f.* 628.

*Cubi* duplicatio, *f.* 625.

*Cuborum* ratio inter se qualis, *g.* 534.

*Cubi diametri* ad sphæram ratio, 552.

*Curva.* Definitio, *g.* 22. quadratura, *i.* 100. & seqq.

*Curva algebraica.* Definitio, *f.* 377. divisio, 381. 382. quomodo natura investigetur, 579. & seqq. puncta quotcunque inveniantur, 631.

*Curvarum algebraicarum* æquatio generalis, *f.* 385. subtangens, *i.* 32.

*Curva primi, secundi, tertii* &c. *generis.* Definitio, *f.* 381.

*Curva ex evolutione* descripta, *i.* 313.

*Curva exponentialis.* Definitio, *i.* 269. constructio, 268. quadratura, 285. subtangens, 271. & seqq. subnormalis quomodo inveniatur, 283.

*Curva mechanica.* Definitio, *f.* 381.

*Curva* normalis constantis, *i.* 235.
subnormalis constantis, 227.
subtangentis constantis, 242.
tangentis constantis, 250.

*Curva transcendens.* Definitio, *f.* 380.

*Cyclois.* Definitio, *f.* 573. proprietates, *f.* 574. & seqq. quadratura, *i.* 131. 132. 182. rectificatio, 168. subtangens, 52. circulus eam oscu-

osculans, 328. sui evolutione seipsam describit, 330.
*Cyclois* punctum flexus contrarii habens, 304.
*Cylindrus.* Definitio, *g.* 465. constructio, 518. quomodo superficies & soliditas inveniatur, 541. superficiei ad parallelogrammum reductio, 516.
*Cylindrorum* æqualitas unde colligatur, 555. ratio inter se, 572. & seqq.
*Cylindrorum æqualium* proprietas, 580.
*similium* ratio, 570. 578.
*Cylindrus rectus*, *g.* 465.
*scalenus*, 465.

D.

*Decagoni regularis* circulo inscribendi latus quomodo inveniatur, *f.* 275.
*Definitio* quid sit, *c.* 13. quomodo dividatur, 16. quotuplici modo consideretur, 30.
*Definitiones* superfluæ num dentur in Mathesi, 56.
*Definitio nominalis* quænam sit, *c.* 17. quomodo ad eam perveniatur, 19. & seqq. quomodo realitas demonstretur, 23. 24.
*Definitio realis* quænam sit, 18. quomodo inveniatur, 25. & seqq. quomodo possibilitas demonstretur, 29.
*Demonstratio* quam habere debeat formam, *c.* 46. 47. quænam circa eam observanda, 39. & seqq.
*Demonstrationes* quomodo tyronibus faciliténtur, *g.* 158. num superfluæ dentur in Mathesi, *c.* 56.
*Denominator rationis.* Definitio, *a.* 36. *f.* 113. num, 117. & quando cum exponente idem, 115.
*Determinari eodem modo* quænam dicantur, *g.* 119.
*Diagonalis.* Definitio, *g.* 111. in quadrato quomodo se habeat ad latus, 421. in polygono quocunque quomodo omnis inveniatur per calculum, *t.* 51. 53.
*Diameter circuli.* Definitio, *g.* 39. quomodo circulum dividat, 135. quomodo inveniatur, 328. 434. quam rationem ad peripheriam habeat, 413. 414. quomodo inveniatur, 425. quanta sit, 426. 427.
*Diameter curvæ.* Definitio, *f.* 368. quomodo in parabola, 414. 415. in ellipsi, 449. 450. 452. in hyperbola determinetur, 492. 493.
*Diameter conjugata.* Definitio, *f.* 374.
*transversa.* Definitio, *f.* 373.
*Differentia.* Definitio, *a.* 64.
*Differentiales*, *t.* 31.
*Differentiale.* Definitio, *i.* 6. signum, 8. gradus, 296. quomodo integretur, 95. quomodo denuo differentietur, 267. & seqq.
*Differentiale areæ.* Definitio, *i.* 97. arcus, 144.
*Differentiale exponentiale* quomodo integretur, *i.* 267.
*Digitus.* Definitio, *g.* 25.
*cubicus.* Definitio, *g.* 477.
*quadratus.* Definitio, *g.* 118.
*Dignitas* Definitio, *a.* 250. gradus, 252. signa, 254.
*Dissimilitudo.* Definitio, *a.* 24.

*Distantia.*

*Distantia*. Definitio, *g*. 15. exemplum, 16. puncti a linea & plano, 225. puncti a puncto in plano 192. punctorum peripheriæ a centro circuli, 193.
*Distantiæ locorum* quomodo inveniantur, *g*. 194. 195. 228. & seqq. *t*. 56. 65. 74.
*Divergentia linearum*. Definitio, *g*. 83. proprietas, 261.
*Dividendus*. Definitio, *a*. 69.
*Divisio*. Definitio, *a*. 69. signum, 71. examen, 124. regulæ, 117. 119. 120.
*Divisio* ejusdem per majus & minus, 201. majoris & minoris per idem, 182.
*Divisio* rationum, 193.
*Divisor*. Definitio, 69.
*Dodecaëdrum*. Definitio, *g*. 475. constructio, 528. quale corpus, 530. quomodo sphæræ inscribatur, *f*. 310. quomodo latus sphæræ inscribendi inveniatur, 308. hujus ratio ad radium, 314.
*Dolii* soliditatem in mensura fluidorum reperire, *g*. 588. & seqq.
*Dureri curva fornicum* qualis sit, *f*. 601.

E.

*Efficientes*. Definitio, *a*. 66.
*Elementum* areæ, *i*. 98.
lineæ curvæ, 144.
solidi rotatione geniti, 197.
superficiei ejusdem, 219.
*Ellipsis*. Definitio, *f*. 420. descriptio, 426. 435. 436. 515. 594. 598. 600. proprietates, 421. & seqq. quod sit sectio conica, 512. maxima applicata, *i*. 66. osculator circulus, 325. quadratura, 126. & seqq. rectificatio, 172. subtangens, 25.
*Ellipsis Apolloniana*, *f*. 522.
*Ellipses infinitæ*. Definitio, *f*. 522. maxima applicata, *i*. 66. subnormalis, 40. subtangens, 26.
*Eliptoides*. Definitio, *f*. 522.
*cubicales*, ibid.
*biquadraticæ*, ibid.
*Epicyclois*. Definitio, *f*. 576.
*superior*, ibid.
*inferior*, ibid.
*Error* in metiendis altitudinibus admissus quomodo æstimetur, *t*. 76. & seqq. in metiendis distantiis admissus quomodo æstimandus, 58. & seqq. 66. & seqq.
*Evoluta*, *i*. 313.
*Examen* quomodo differat a demonstratione, *a*. 102.
*Examen* additionis, *a*. 101. & seqq.
subtractionis, 106. 107.
multiplicationis, 122.
divisionis, 124.
extractionis radicum, 289.
angulorum rite dimensorum, *g*. 151.
*Experientia* quid sit, *c*. 34. ejus objectum, 35. quomodo Mathematici circa eam versentur, 36. 37.
*Exponens dignitatis*. Definitio, *a*. 251.
*Exponens rationis*. Definitio, *a*. 136. quando sit terminus primus, 138. quomodo se habeat ad unitatem, 140. quomodo exprimatur, 141.

*Exponens rationis potentiarum* qualis sit, 290.
*Extensionis* notio, *g.* 2.
*Extractio radicis quadratæ*, *a.* 269. & seqq.
*Extractio radicis cubicæ*, *a.* 282. & seqq.
*Extratio radicis* ex dignitate. Definitio, 256.
*Extractio radicis* ex linea recta, *g.* 331.
*Extractio radicis* ex æquatione quadratica, *f.* 143. cubica, 358. biquadratica, 362. quacunque per approximationem, 363. & seqq. ex serie infinita, 366.
*Extractio radicis indeterminatæ*, 98. & seqq.

F.

*Factum.* Definitio, *a.* 66. ex quoto in divisorem, 212.
*Facta* quales numeri, 211.
 æqualium factorum, 201. 208.
*Facti* Logarithmus, 337.
*Factores.* Definitio, 66.
*Factorum & efficientium* quando eadem ratio, 178.
*Familia curvarum.* Definitio, *f.* 383.
*Figura.* Definitio, *g.* 32. 33. in campo designatio, 369.
*Figura æquiangula*, 105.
 *æquilatera*, 88.
 *circulo inscripta*, 116.
 *circulo circumscripta*, 117.
 *curvilinea*, 37.
*Figura irregularis.* Definitio 106. constructio, 359. 360. 361.
*Figura mixtilinea*, 34.
 *multilatera*, 104.
 *obliquangula*, 97.
 *plana*, 36.
*Figura polygona*, 104.
 *quadrilatera*, 97.
*Figura rectilinea.* Definitio, 34. divisio in partes æquales, 441.
*Figura regularis.* Definitio, 106. proprietates, 348. 401. quomodo circulo inscribatur, 342.
*Figura rectangula*, 97.
*Figuræ congruentes* quales sint, 177.
*Figuræ inter se æquiangulæ*, 109.
 *æquilateræ*, 108.
*Figuræ similes* quales sint, 175. 176. earum ratio, 406. circulo inscriptarum & circumscriptarum ratio, 408.
*Fluidi* quantitatem in dolio non pleno determinare, 600.
*Fluxio.* Definitio, *i.* 6. signum, 9.
*Focus.* Definitio, *f.* 395.
*Focus parabolæ*, quomodo inveniatur, 396. & seqq. proprietates, 418.
*Focus ellipsis* quomodo inveniatur, 463. proprietates, 434. 457. 458.
*Focus hyperbolæ* quomodo inveniatur, 463. proprietates, 464. 465. 470. 503. 504.
*Fractio.* Definitio, *a.* 38. scriptio, 59. 60. quando integro major, minor, eidem æqualis, 221. quænam major, minor altera, 225. quomodo ad minores terminos reducatur, 231. & seqq. quomodo ad eandem denominationem, 235. quomodo in aliam datæ denominationis convertatur, 303.
*Fractionis* Logarithmus quomodo inveniatur, 351. & seqq. quomodo valor ad communem mensuram reducatur, 304.

*Fractiones* quænam æquales, *a.* 225. quod sint rationes, 129.
*Fractionum* algorithmus, 236. 237. 239. & seqq. 243. identitas unde colligatur, 226. reductio ad alias æquales, 227. in infinitum certa lege decrescentium summa quomodo inveniatur, *i.* 334.
*Fractio decimalis.* Definitio, *a.* 361. scriptio, 306. 364. 365. logarithmus quomodo inveniatur, 366. 368. quomodo alia ad eam reducatur, 305.
*Fractio decimalis exacta.* Definitio, 370.
*Fractio decimalis approximans.* Definitio, 370.
*Fractionum decimalium* algorithmus, 373. & seqq.
*Fractiones sexagesimales.* Definitio, 385. algorithmus, 391. & seqq. quomodo scribantur, 387.
*Fractio spuria* quænam dicatur, 222. quomodo ad integra reducatur, 223.

G.

*Geometria.* Definitio, *g.* 1.
*sublimior.* Definitio, *f.* 367.
*Geometrice proportionalia* quænam dicantur, *a.* 323.
*Gradus.* Definitio, *g.* 41. inæqualitas in circulis inæqualibus, 42.

H.

*Harmonica proportio.* Definitio *f.* 186.
*Harmonice proportionalium* inventio, 187. & seqq.
*Helix*, *f.* 569.
*Heptagonum.* Definitio, *g.* 104.
*Heterogenea* quænam sint, *a.* 32.
*Hexaëdrum.* Definitio, *g.* 475. quomodo sphæræ inscribatur, *f.* 304. sphæræ inscribendi latus quomodo inveniatur, 302. hujus ad sphæræ semidiametrum ratio, 314.
*Hexagonum.* Definitio, *g.* 104.
*Hexagonum regulare* quomodo conconstruatur, 358. quomodo circulo inscribatur, 357.
*Homogenea* quænam sint, *a* 32.
*Hyperbola.* Definitio, *f.* 459. descriptio, 471. 472. quod sit sectio conica, 513. quadratura, *i.* 120. 123. rectificatio, 175. 179. subtangens, 27. circulus eam osculans, 327. recta ad eam perpendicularis, 74. 75.
*Hyperbolæ intra asymptotos* constructio, *f.* 489. proprietates, 475. & seqq. subtangens, *i.* 29. subnormalis, 42. quadratura, 123.
*Hyperbola æquilatera.* Definitio, *f.* 505. proprietates, 506. & seqq. descriptio, 531. 532.
*Hyperbola Apolloniana* quænam dicatur, 425.
*Hyperboloides.* Definitio, 425.
*Hyperbolæ infinitæ.* Definitio, *f.* 425. subtangens, *i.* 28. quadratura, 118.
*Hypothenusa.* Definitio, *g.* 95.

I.

*Ichnographia arearum* quomodo perficienda, *g.* 363. & seqq.
*Icosaëdrum.* Definitio, *g.* 475. constructio, 527. quale corpus, 530. quomodo sphæræ inscribatur, *f.* 311. sphæræ inscribendi latus quomodo inveniatur, 311. hujus ad semidiametrum sphæræ ratio, 314.

*Inæqualia.* Definitio, *a.* 15. eorum ad se invicem relatio, 16. 17. 21.
*Inclinatio plani ad planum.* Definitio, *g.* 476.
*Incommensurabilia.* Definitio, *a.* 31. ratio ad se invicem, 163. 164. quod dentur, *g.* 422.
*In directum situm* quid significet, *g.* 61.
*Infinitesima.* Definitio, *i.* 2.
*Infinitinomium* quomodo ad dignitatem quamcunque elevetur, *f.* 102. 103. 104.
*Insistere* quando angulus dicatur, *g.* 56.
*Instrumentum transportatorium* quodnam & quale sit, *g.* 153. 154.
*Instrumenti transportatorii rectilinei* constructio, *t.* 42. usus, 43. 44.
*Integrorum* per fractiones divisio *a.* 245. ad fractiones reductio, 224.
*Inversio* rationum, 169.
*Irrationalium* ad eandem denominationem, *f.* 59. 146. ad simpliciorem expressionem reductio, 61. algorithmus, 67. 68. ratio rationalis quomodo inveniatur, 64.
*Judicium* quando & quomodo acuatur studio Matheseos, *c.* 53. 54.

L.

*Lamellarum Nepperianarum* constructio, *a.* 113. usus, 115.
*Latus coni.* Definitio, *g.* 467.
*Latus educere ex dignitate* quid significet, *a.* 256.
*Latus figuræ.* Definitio, *g.* 35. quomodo quodlibet in figura rectilinea per calculum eruatur, *t.* 52.
*Latus hexagoni regularis* quomodo se habeat ad radium circuli circumscripti, *g.* 356.
*Latus numeri polygoni.* Definitio, *f.* 208. quomodo inveniatur, 213.
*Latus pentagoni regularis* quomodo ex data diagonali inveniatur, *f.* 294.
*Latus polygoni regularis circumscripti* quomodo ex latere inscripti inveniatur, *g.* 424.
*Latus potentiæ.* Definitio, *a.* 252.
*Latus quadrati parallelogammo vel triangulo æqualis* quomodo inveniatur, *g.* 395.
*Latus rectum.* Definitio, *f.* 388.
*transversum.* Definitio, 459.
*Latera homologa* quænam dicantur, *g.* 110.
*Latera polygonorum regularium* in fractionibus decimalibus radii, *g.* 47.
*Limites æquationis* quomodo inveniantur, *f.* 356.
*Linea.* Definitio, *g.* 10. termini, 11. proprietas, 12. 13. usus, 14. quænam brevissima inter duo puncta, 191.
*Linea*, pars digiti, 25.
*Linea curva.* Definitio, *g.* 22.
*Linearum congruentia*, 163.
*Lineæ convergentes.* Definitio, 83. unde convergentia colligatur, 262. 263.
*Lineæ divergentes.* Definitio, 84. unde divergentia colligatur, 261.
*Linea normalis*, 78.
*obliqua*, 80.
*Linea parallela.* Definitio, *g.* 81. quomodo alteri ducatur, 258.

*Linearum parallelarum* symptomata, 230. & seqq. 238. & seqq. 260.

*Linea perpendicularis.* Definitio, 78. quando sit, 79. quomodo ducatur,

*Linearum proportionalium* inventio, g. 271. & seqq. 327. 338. duarum mediarum in continua proportione inventio, *f.* 624. proprietates, g. 377. 378.

*Lineæ reciprocæ.* Definitio, *f.* 261. quomodo inveniantur, 262. & seq.

*Linea recta.* Definitio, *g.* 17. differentia ab alia, 18. quomodo gignatur, 19. ducatur, 121. bisecetur, 210. in partes æquales, 274. proportionales dividatur, 275. quomodo media & extrema ratione secetur, *f.* 258. quomodo eam metiamur, *g.* 126. & seqq. quando centro applicata in peripheria terminetur, 173.

*Linearum rectarum* sectio qualis sit, *g.* 250. congruentia, 168. & seqq.

*Linea recta ad planum perpendicularis.* Definitio, 486.

*Linea secantium.* Definitio, *f.* 562. proprietates, 563.

*Linea sinuum.* Definitio, 560. proprietates, 561.

*Linea tangentium.* Definitio, 562. proprietates, 563.

*Locus geometricus.* Definitio, *f.* 584.
*planus*, 585.
*solidus*, 585.
*primi, secundi, tertii* &c. *ordinis*, 585.

*Locus ad circulum.* Definitio, 584. constructio, 589.

*Locus ad rectam.* Definitio, 584. constructio, 586.

*Locus ad ellipsin* quomodo construatur, 588.

*Locus ad hyperbolam* quomodo construatur, 590. 591.

*Locus ad parabolam* quomodo construatur, 587.

*Logarithmica.* Definitio, *f.* 552. proprietates, 554. & seqq. circulus osculator, *i.* 332. quadratura, 134. & seqq. 274. & seqq. rectificatio, 177. subnormalis, 280. subtangens, 54. 243.

*Logarithmi.* Definitio, *a.* 334. proprietates, 337. & seqq. quomodo fuerint computati, 346. quomodo in Logarithmica, *f.* 555. in Hyperbola, *i.* 256. per arcus tractoriæ repræsententur, 253. quomodo inveniantur, 255. quomodo eidem respondens numerus inveniatur, 260. differentiale quomodo integretur, 266.

*Logarithmorum Canonis* constructio, *a.* 346.

*Logarithmus hyperbolicus* binarii, *i.* 257.

*Logarithmus secantis* quomodo inveniatur, *t.* 30.

*Logarithmus sinus* quomodo inveniatur, *i.* 261. *t.* 28.

*Logarithmus tangentis* quomodo inveniatur, *t.* 29. *i.* 262.

*Logistica speciosa.* Definitio, *f.* 2.

*Logistica linea* vide Logarithmica.

*Logistici solidi* cubatio, *i.* 277. & seqq.

*Logistica spiralis.* Definitio, *f.* 557.

*Logisticæ spirales infinitæ*, 559.

M.

*Magnitudo ſcalaris.* Definitio, *a.* 250.

*Majus.* Definitio, *a.* 20.

*Majoritas* unde colligatur, 89. 90. ejus ſignum, 22. 23. 204.

*Matheſis* quomodo & quando judicium acuat, *c.* 53. 54.

*Maxima chorda* in circulo, *i.* 64. *g.* 299.

*Maxima vel minima applicata* in curvis algebraicis quomodo determinetur, *i.* 63.

*Medii arithmetici* inventio, *a.* 330.

*Medius proportionalis* numerus quinam dicatur, 156. quomodo inveniatur, 301.

*Media proportionalis linea* quomodo inveniatur, *g.* 327. quomodo inveniantur duæ in proportione continua, *f.* 624.

*Menſura.* Definitio, *g.* 23. 24.

*Menſura anguli.* Definitio, 57. quo radio deſcribatur, 139.

*Menſura anguli ad peripheriam*, 314.
*extra centrum*, 316.
*figuræ.* Definitio, 118.

*Menſura linearum.* Definitio, 25. diviſio, 26. diverſitas in diverſis locis, 26. unius ad aliam reductio, 130. ex qua materia fieri debeat, 127. & ſeqq.

*Menſura numeri, communis, maxima, communis maxima.* Definitio, *a.* 77. 78. communis maxima quomodo inveniatur, 228. 230.

*Menſura ſolidi.* Definitio, *g.* 477.

*Meſologarithmus*, *t.* 31.

*Methodus mathematica.* Definitio, *c.* 1. cur ita dicatur, 52. forma, 2. 18. 14. 15. ab objectionibus vindicata, 55. & ſeqq.

*Methodi tangentium inverſæ* exempla, 286. & ſeqq.

*Methodus de maximis & minimis.* Definitio, *i.* 61.

*Metiri* quid ſignificet in Geometria, *g.* 23. quid in Arithmetica, *a.* 74.

*Minuendus* numerus quinam dicatur, *a.* 64.

*Minus.* Definitio, *a.* 20. unde colligatur, 89. 90. 206. ſignum, 22. 23.

*Minutiæ phyſicales*, *a.* 385.

*Minutum primum, ſecundum* &c. Definitio, *a.* 388.

*Minutum primum, ſecundum* &c. *gradus*, *g.* 41. qualis ſit fractio, 43.

*Miraculoſa* in definitionibus geometricis admittenda, *g.* 469.

*Multa.* Definitio, *a.* 7.

*Multiplicatio.* Definitio, *a.* 66. quid ſit, 67. ſignum, 68. regulæ, 111. 112. 115. 116. examen, 122.

*Multiplicandus.* Definitio, 66.

*Multiplicator*, 66.

*Multitudo.* Definitio, 8.

N.

*Nomen rationis*, *a.* 136.

*Normalis linea.* Definitio, *g.* 78.

*Normæ* conſtructio & uſus, 212. 216. examen, 321.

*Notæ numericæ*, *a.* 49. 51.

*Notæ fractionum decimalium.* Definitio, 372.

*Notio.* Definitio, *c.* 4. differentia, 5. & ſeqq. qualis in definitionibus mathematicis admittatur, 13. & ſeqq.

*Notio adæquata.* Definitio, *c.* 10. gradus, 11.
*Notio clara.* Definitio, 6. divisio, 8. 9.
*confusa*, 9.
*distincta.* Definitio, 8. divisio, 10. 12.
*inadæquata*, 12.
*obscura*, 7.
*Numerare* quid in Arithmetica significet, *a.* 74.
*Numerandi* lex, 44. 46.
*Numerus.* Definitio, 10. & seqq. quomodo scriptus enuncietur, 55. quomodo occulte scribatur, 53. 54.
*Numeri compositi inter se.* Definitio, *a.* 80,
*Numeri dati* cur in divisione & multiplicatione non debeant esse homogenei, 70.
*Numeri heterogenei* inter se, 35. 36.
*homogenei*, 36.
*Numeri primi inter se*, *a.* 39.
*Numerorum* nomina, 45. 47. 48. notæ, 49. 51. progressio, 50.
*Numerus abstractus* quinam, *a.* 34.
*angulorum.* Definitio, *f.* 208. 209.
*compositus*, *a.* 76.
*concretus*. 34.
*Numerus cubicus.* Definitio, *a.* 248. genesis, 276. & seqq. tabulæ horum numerorum quomodo construantur, *f.* 85.
*Numerus determinatus*, *a.* 13.
*effabilis*, 39.
*fractus*, 38.
*Numerus heptagonus.* Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
*Numerus hexagonus.* Definitio, 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
*Numerus indeterminatus*, *a.* 13.
*ineffabilis*, 43.
*Numerus integer.* Definitio, 37. quid exprimat, 139. quando radicem perfectam non habeat, 293. 294.
*Numerus irrationalis.* Definitio, *a.* 43. per lineas expressio, *g.* 420. *f.* 630.
*Numerus impar.* Definitio, *a.* 72. proprietates & symptomata, *f.* 72. & seqq.
*Numerus numerans*, *a.* 33. 34.
*numeratus*, 33.
*Numerus octogonus.* Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
*Numerus par.* Definitio, *a.* 72. proprietates & symptomata, *f.* 77. & seqq.
*Numerus pentagonus.* Definitio, *f.* 206. quomodo inveniatur, 211. summatio, 212.
*Numerus perfectus* quinam sit & quomodo inveniatur, *f.* 248.
*Numerus polygonus.* Definitio, 206. quomodo inveniatur, 210. summetur, 212.
*Numerus primus in se*, 475.
*Numerus pronicus.* Definitio, *f.* 196. quomodo inveniatur, 198.
*Numerus pyramidalis* primus, secundus &c. triangularis, pentagonalis &c. Definitio, *f.* 214. summatio, 216. 217.
*Numerus surdus*, *a.* 43.
*Numerus triangularis.* Definitio, *f.* 206.

206. quomodo inveniatur, 211. summetur, 212.
*Numerorum proportionalium* symptomata analytice investigata, *f.* 173. & seqq.

O.

*Obliqua linea.* Definitio, *g.* 80.
*Oblongum.* Definitio, 100. constructio, 339.
*Octaëdrum.* Definitio, *g.* 475. constructio, 526. quale corpus, 530. quomodo sphæræ inscribatur, *f.* 307. latus sphæræ inscribendi quomodo inveniatur, 305. hujus ad radium ratio, 314.
*Octogonum.* Definitio, *g.* 104.
*Octogoni regularis* latus quomodo inveniatur, *f.* 272.
*Opponi* quænam dicantur, *g.* 85. 86.
*Ordinata ratio*, *a.* 194.
*Ordinatim applicatæ.* Definitio, *f.* 370.
*Ordo* Mathematicorum an jure taxetur, *c.* 57.
*Ordo naturæ* quinam, 57.
*scholæ* quinam, 57.
*Osculatio curvarum*, *i.* 314.

P.

*Parabola.* Definitio, *f.* 388. constructio, 393. 400. 401. proprietates respectu axis, 390. & seqq. respectu diametri, 416. 417. quod sit sectio conica, 511. circulus osculator, *i.* 323. ad eam perpendicularis, 72. 78. quadratura, 103. 104. 107. 349. 350. rectificatio, 146. hujus dependentia a quadratura hyperbolæ, 147. subnormalis, 36. subtangens, 21.
*Parabolæ externæ* proprietas, *f.* 419.
*secundi generis* rectificatio, *i.* 150.
*Parabola Apolloniana* quænam dicatur, *f.* 519.
*Parabolæ infinitæ* seu *superiorum generum.* Definitio, *f.* 519. constructio, 581. 583. circuli osculatores *i.* 323. quadratura, 105. 106. rectificatio, 152. subnormalis, 37. subtangens, 22. quod sint sectiones conorum superiorum, *f.* 528.
*Paroboloides cubicales*, *biquadraticales*, *surdesolidales* &c. Definitio, *f.* 519.
*Parallela* linea. Definitio, *g.* 81. quomodo ducatur, 258. symptomata, 255. & seqq. 260,
*Parallelismi* constructio & usus, 258. 259.
*Parallelogrammum.* Definitio, *g.* 102. bisectio, 439. in partes æquales divisio, 440. proprietates, 335. 337.
*Parallelogramma* quotnam sint, 336.
*Parallelogrammorum* ratio, 388. proprietas, 388. æqualitas unde colligatur, 383. 384. 389. similium proprietates, 396. & seqq.
*Parallelepipedum.* Definitio, *g.* 462. proprietates, 463. 464. descriptio in plano, 510. constructio, 514. bisectio, 537. 111. superficies & soliditas quomodo inveniatur, 536.
*Parallelepipedorum* æqualitas unde colligatur, 535. ratio, 572. & seqq. æqualium proprietas 580. similium ratio, 578.
*Parameter.* Definitio, *f.* 388.
*Pars aliquanta.* Definitio, *a.* 30.

*Pars aliquota.* Definitio, *a.* 30.
*Partes.* Definitio, *a.* 9. quando similes, 170.
*Partium similium* ratio ad totum, 170. inter se, 171.
*Pennæ* optimæ quænam sint, *g.* 123.
*Pentagonum.* Definitio, 104.
*Pentagoni regularis latus* circulo inscribendi quomodo inveniatur, *f.* 279.
*Perimeter*, *g.* 31
*Peripheria* circuli, 37. 41.
*Permutatio* rationum, *a.* 173.
*Perpendicularis* linea. Definitio, *g.* 78. quomodo dicatur, 210. 212. 216. symptomata & proprietates, 213. & seqq. 217. 224.
*Perpendicularis ad curvam* quanta sit, *i.* 76. 85.
*Perpendicularis* ad parabolam, 72.78.
*Perpendicularis* ad hyperbolam æquilateram, 74.
*Perpendicularis* ad hyperbolam scalenam, 75.
*Pertica cubica*, *g.* 477.
*quadrata*. 118.
*Perturbata ratio*, *a.* 198.
*Pes*, *g.* 25.
*cubicus*, 477.
*quadratus*, 118.
*Planum*, *g.* 36.
*Planum plano parallelum*, 498.
*ad planum perpendiculare*, 494.
*Plura.* Definitio, *a.* 7.
*Polus* conchoidis, *f.* 535.
*Polygonum.* Definitio, *g.* 104.
*Polygonum regulare* quomodo construatur, *g.* 352. *t.* 48. quomodo circulo inscribatur & circumscribatur, *g.* 353. 355. *t.* 46 quomodo circulus eidem circumscribatur, *g.* 347. ejus ad circulum inscriptum & circumscriptum relatio, 416. proprietas, 407. area quomodo inveniatur, 402. 416.
*Polygonorum similium* proprietas, *g.*403. 406.
*Polynomium* quomodo ad dignitatem quamcunque evehatur, *f.* 101.
*Postulatum.* Definitio, *c.* 30 quænam propositiones huc referantur, 31.
*Potestas.* Definitio, *a.* 250. signa, 254.
*Potentia.* Definitio, *a.* 250. signa, 254. logarithmus, 339. quomodo prodeat, 341. quomodo ex additione numerorum imparium procreetur, *f.* 170. 171.
*Potentiarum* proportio, 259. 260.
*Potentiæ numerorum naturalium quæcunque* quomodo summentur, *f.* 203. 205.
*Potentia Hyperbolæ.* Definitio, *f.*477. quomodo determinetur, 478. & seqq.
*Practica Italica*, *a.* 316. & seqq.
*Prisma*, *rectum*, *obliquum*, *triangulare*, *quadrangulare* &c. Definitio, *g.*456. proprietates, 457. 458. in plano descriptio 510. constructio, 515. superficies & soliditas quomodo inveniatur, 539
*Prismatum* ratio, 572. & seqq. æqualitas unde colligatur, 535.
*Prismatum æqualium* proprietas. 580.
*similium* ratio, 578.
*Prismatis triangularis* ad pyramidem redu-

reductio, 543. 545. ad parallelepipedum ratio, 538.
*Problema* quale sit & quibus constet partibus, *c.* 48. quomodo algebraice solvatur, *f.* 141.
*Problema Deliacum*, *f.* 626.
*Problemata* arithmetica, *f.* 144. & seqq. arithmetica indeterminata, 223. & seqq. geometrica, 250. & seqq. geometrica indeterminata per Algebram soluta, 255. & seqq.
*Problematis Kepleriani* solutio, *i.* 193.
*Productum* quid dicatur, *a.* 66.
*Progressio arithmetica.* Definitio, *a.* 333. proprietates, *f.* 106. summa quomodo inveniatur, 107. 108.
*Progressionis arithmeticæ* problemata per Algebram soluta, *f.* 164. & seqq.
*Progressio geometrica.* Definitio, *a.* 322. proprietates, *f.* 118. & seqq. summa quomodo inveniatur, 120.
*Progressionis geometricæ* problemata per Algebram soluta, *f.* 182. & seqq.
*Progressionum geometricarum ab unitate incipientium* proprietates, *f.* 126.
*Proportio.* Definitio, *a.* 155.
*Proportio æquemultiplicium*, 219.
*Proportionum regulæ*, 301. & seqq.
*Proportio continua.* Definitio, *i.* 156.
*contraharmonica*, *f.* 193.
*discreta*, *a.* 156.
*Proportionalitas* quid sit, *a.* 157.
*Proportionales quantitates* quænam dicantur, 155.
*Propositionis* partes, *c.* 39. 40.
*Propositiones Elementi II. Euclidis* analytice demonstratæ, *f.* 86. & seq.
*Punctum.* Definitio, *g.* 6. theoria, 7. 8. 9.
*Punctum flexus contrarii.* Definitio, *i.* 301. quomodo determinetur, 302. 309.
*Punctum regressus*, 301.
*Pyramis.* Definitio, *g.* 472. proprietates, 473. 474. in plano descriptio, 512. constructio, 515. 521. ad prisma triangulare reductio, 543. 545. 546. superficies ac soliditas quomodo inveniatur, 548. *i.* 351.
*Pyramidum* æqualitas unde colligatur, *g.* 542. ratio, 572. & seqq.
*Pyramidum æqualium* proprietas, 580.
*similium* ratio, 578.

Q.

*Quadratrix* curvæ, *i.* 234.
*Quadratrix* Dinostratis. Definitio, *f.* 564. subtangens, *i.* 55.
*Quadratrix* Tschirnhusiana, *f.* 566. 568.
*Quadratorum numerorum* in serie naturali differentiæ, *f.* 81. 83 quomodo summentur, 200. quomodo duorum summa in duo alia quadrata dividatur, 230. logarithmus, *a.* 338. vide numerus quadratus.
*Quadratum.* Definitio, *g.* 98. constructio, 338. area quomodo inveniatur, 370. & seqq.
*Quadratorum* ratio ad se invicem, 374. additio, 419.
*Quadratiquadratum*, *a.* 252.
*Quadrato-cubus*, ibid.
*Quadratocubocubus*, ibid.
*Quadratoquadratum*, ibid.
*Quadratoquadratocubus*, ibid.
*Quadratum Cubi*, ibid.

*Quadratum surdesolidi*, ibid.
*Quadrata reciproca* quomodo construantur, *f.* 285. 286.
*Quadrilateri circulo inscripti* proprietas, *g.* 350. *f.* 324.
*Quadrilaterorum similium* proprietas, *g.* 350.
*Quantitas* quid sit, *a.* 13. 14. quomodo ad dignitatem evehatur, 255. *f.* 95. quomodo differentietur, *i.* 12. & seqq.
*Quantitatum* signa, *a.* 57. 58.
*Quantitatum permutatio* quomodo inveniatur, *f.* 129.
*Quantitas affirmativa*, *f.* 16.
*Quantitas constans.* Definitio, *f.* 375. signum, 376.
*Quantitas exponentialis.* Definitio, *i.* 264. signum, 265. constructio, 268.
*Quantitas infinite parva.* Definitio, 2. quando habeatur pro nulla, 3.
*Quantitas nihilo major*, *f.* 16.
*minor*, 16.
*Quantitas positiva.* Definitio, *f.* 17. quomodo prodeat, 17.
*Quantitas privativa.* Definitio, 16. quomodo prodeat, 17.
*Quantitas variabilis.* Definitio, 375. signum, 376.
*Quantitates continue æquidifferentes.* Definitio, *a.* 322. proprietates 324. & seqq.
*Quantitates discretim æquidifferentes.* Definitio, *a.* 322. proprietates, 324. & seqq.
*Quantitates harmonice proportionales.* Definitio, *f.* 186. quomodo inveniantur, 187. & seqq.
*Quantitates incommensurabiles* num dentur, *a.* 165.
*Quantitates positivæ & privativæ* quando se mutuo destruant, *f.* 21. num rationem ad se invicem habeant, 24.
*Quantitates privativæ* quid sint, 19. 20. num inter se homogeneæ, 23. quod positivis heterogeneæ, 23.
*Quartus æquidifferens numerus* quomodo inveniatur, *a.* 331.
*Quartus proportionalis numerus* quomodo inveniatur, 302.
*Quotus.* Definitio, *a.* 69. logarithmus, 343. ad dividendum ratio, 174. ex divisione facti per factorem unum prodiens, 210. quando numerus rationalis, 161. quando irrationalis, 162. ex divisione radicis per radicem quando numerus integer, 291.
*Quoti* quando numeris divisis proportionales, *a.* 181.

R.

*Radius circuli.* Definitio, *g.* 39. eorum æqualitas, 40.
*Radius circuli octogono regulari circircumscribendi* quomodo inveniatur, 274.
*Radius circuli* decagono regulari circumscribendi quomodo inveniatur, *f.* 278.
*Radius circuli* parabolam osculantis quomodo inveniatur, *i.* 322.
*Radius curvedinis.* Definitio, *i.* 314. quomodo determinetur, 320.
*Radius evolutæ.* Definitio, *i.* 314.
*Radius osculi.* Definitio, *i.* 314. quomodo determinetur, 320.

*Radix binomia* Definitio, *a.* 258.
*Radix cubica.* Definitio, *a.* 248. ratio ad cubum, 249. quomodo extrahatur, 282. & seqq.
*Radix multinomia*, 258.
*polynomia*, ibid.
*trinomia*, ibid.
*Radix quadrata.* Definitio, *a.* 246. relatio ad quadratum, 247. quomodo extrahatur, 269. & seqq.
*Radix æquationis.* Definitio, *f.* 134. quomodo transmutetur, 333. & seqq. quomodo in falsam mutetur, 332.
*Radix æquationis vera*, 135.
*falsa*, 136.
*imaginaria*, 137.
*Radix pronica* quomodo extrahatur, 199.
*Radix ex æquatione biquadratica* quomodo extrahatur, *f.* 362.
*Radix ex cubica* quomodo extrahatur, 355.
*Radix ex quacunque per approximationem* quomodo extrahatur, 363. & seqq.
*Radix ex quadratica* quomodo extrahatur, 143.
*Radix ex dignitate* quomodo extratur, *a.* 256.
*Radix ex serie infinita* quomodo extrahatur, *f.* 366.
*Radix ex quantitate irrationali composita* quomodo extrahatur, 360.
*Radices imaginariæ* quænam dicantur, 71.
*Radices rationales ex æquatione* quomodo extrahantur, *f.* 351. & seqq.
*Radices universales* quænam dicantur, 70.
*Radicum extrahendarum* theorema generale, *f.* 98. & seqq.
*Radicum* signum, *a.* 295.
*Radicum imaginariarum* algorithmus, *f.* 71.
*Radicum quadratarum surdorum* ratio, *g.* 420.
*Radicum universalium* algorithmus, *f.* 70.
*Ratio.* Definitio, *a.* 126. termini, 126. 127. genera, 130. usus, 132.
*Rationum* symptomata demonstrata, *a* 169. & seqq. analytice investigata, *f.* 124.
*Rationum indentitas.* Definitio, *a.* 149. 150. natura, 151. designatio, 152. 153. unde colligatur, 168. 177.
*Rationum similitudo* in quo consistat, 154. unde colligatur, 167.
*Ratio æqualitatis.* Definitio, 130.
*Ratio composita.* Definitio, *a.* 159. exponens, 214. quando una alteri æqualis, 218.
*Ratio dupla*, 142.
*duplicata*, 159. 216.
*inæqualitatis*, 131.
*inæqualitatis majoris*, 132.
*Ratio inæqualitatis minoris.* Definitio, 132. nomina quomodo inveniantur, 147. memoriæ facile mandentur, 148.
*Ratio irrotionalis*, 134 135.
*Ratio major*, 158.
*minor*, ibid.
*multiplex*, 142.
*multiplex superparticularis*, 145.
*superpartiens*, 146.

*Ratio multiplicata*, 159.
*quadruplicata*, 159.
*rationalis*, 134. 135.
*sesquialtera*, 143.
*sesquitertia*, ibid.
*subdupla*, 142.
*subduplicata*, 159.
*submultiplex*, 142.
*submultiplex subsuperparticularis*, 145.
*submultiplex subsuperpartiens*, 146.
*submultiplicata*, 159.
*subquadruplicata*, 159.
*subsesquitertia*, 143.
*subsesquialtera*, ibid.
*subsuperparticularis*, ibid.
*subsuperpartiens*, 144.
*superparticularis*, 143.
*subtripla*, 142.
*subtriplicata*, 159.
*triplicata*, 159. 216.
*Ratio summæ* numerorum in infinitum certa lege decrescentium ad totidem terminos maximo æquales, *i.* 341. & seqq.
*Recta.* Vide linea recta.
*Rectæ* in tres partes continue proportionales divisio, *f.* 603.
*Rectangulum* Definitio, *g.* 100. area quomodo inveniatur, 375.
*Rectangulorum* ratio, 376.
*Rectificatio curvæ.* Definitio, *i.* 143. methodus, 144.
*Regula* quale instrumentum, *g.* 121. ex qua materia parari debeat, 122.
*Regula aurea* quænam dicatur, *a.* 307.
*Regula centralis* Bakeri, *f.* 623.
*Regula Conchoidis*, 535.
*Regula de quinque*, *a* 312.
*Regula Renaldiniana* polygonum regulare circulo inscribendi confutata, *f.* 292.
*Regula Societatis*, *a.* 314.
*Regula trium* sive *detri* quænam sit, 307. ubinam locum habeat, 307. usus in vita communi explicatus, 308. & seqq.
*Regula trium composita*, 312. 313.
*directa*, 311.
*inversa*, ibid.
*Residuum.* Definitio, *a.* 64.
*Rhombus.* Definitio, *g.* 99. constructio, 340. area quomodo inveniatur, 387.
*Rhomboides.* Definitio, 101. constructio, 341. area quomodo inveniatur, 387.

S.

*Scalæ geometricæ* constructio, *g.* 277. usus, 278.
*Scholion* in Mathesi quid sit, *c.* 51.
*Scrupulum primum*, *secundum* &c. *g.* 388.
*Secans.* Definitio, 7. quomodo inveniatur, 26. *i.* 166. arcus multiplex quomodo inveniatur, *f.* 328.
*Secantium* proprietates, *g.* 302. 303. ex eodem puncto ductarum relatio, 380.
*Secans complementi.* Definitio, *t.* 11.
*Sectio circuli* per rectam qualis, *g.* 52. per circulum qualis, 53.
*Sectiones conicæ.* Definitio, *f.* 386. quænam sint, 387. & seqq.
*Sectiones conicæ* superiorum generum, 528. & seqq.
*Sectio linearum.* Definitio, *g.* 50

*Sectio media & extrema ratione facta*, *f.* 258.
*Sectionis planorum* theoria, *g.* 478. & seqq.
*Sectio rectarum* mutua, 51.
*Sector circuli*. Definitio, *g.* 46. ad triangulum reductio, 415. area quomodo inveniatur, 435. *i.* 154. & seqq.
*Sectoris elliptici* quadratura, *i.* 186. 192.
*hyperbolici* quadratura, 189. 194.
*Segmentum circuli*, *majus*, *minus*. Definitio, *g.* 44. area quomodo inveniatur, 436. & seqq. *i.* 170.
*Segmenti sphærici* soliditas quomodo inveniatur, *i.* 199.
*Segmentum superficiei sphæricæ* quomodo inveniatur, *i.* 222.
*Semi circulorum* sectio, *g.* 202.
*Semidiameter*. Definitio, 39.
*Semiordinata*. Definitio, *f.* 370.
*Series convergentes*. Definitio, *f.* 52.
*divergentes*, ibid.
*Serliana curva fornicum* qualis sit linea, *f.* 598.
*Signa exponentium indeterminatorum* tam rationum, quam dignitatum, *f.* 13. 14. operationum arithmeticarum, 8. & seqq.
*Signa quantitatum*, *f.* 3. & seqq.
*Signa rationum* universalia, 114.
*Similia*. Definitio, *a.* 24. qualia sint, 25. differentia interna, 26. quomodo a *Leibnitio* definita, 27.
*Similitudo*. Definitio, *a.* 24. signum, 28. 29. principium, *g.* 120.
*Similitudo* corporum, 564. & seqq.
polygonorum regularium ejusdem ordinis, 404. 405.
*Sinus sive sinus rectus*. Definitio, *t.* 2. proprietas, 3. mensura, 13. ex dato arcu quomodo inveniatur, *i.* 160. graduum, 18. *f.* 277. *gr.* 22. min. 30, *f.* 273. *gr.* 30, *t.* 15, *gr.* 36, *f.* 281. *gr.* 45. *f.* 270. arcus dimidii, *t.* 17. dupli, *t.* 18. arcus differentiæ, *t.* 20. angulorum multiplorum, *f.* 325. arcuum exiguæ differentiæ quomodo inveniatur, *t.* 19. & seqq.
*Sinus artificialis*, *t.* 31.
*Sinuum canon* quomodo construatur, *t.* 15. & seqq.
*Sinus complementi*. Vide Cosinus.
*Sinus totus*. Definitio, *t.* 2. proprietas, 4.
*Sinus versus*. Definitio, *t.* 2. proprietas, 4. quomodo ex arcu inveniatur, 163.
*Situm eundem* quænam habeant, *g.* 5.
*Situs planorum* theoria, 478. & seqq.
*Solidum*. Definitio, *g.* 444. quomodo dato æquale inveniatur, 577.
*Solidi cissoidalis* cubatio, *i.* 210.
*hyperbolici*, 216. 217.
*logistici*, 211. 212.
*Sphæra*. Definitio, *g.* 470. proprietas, 471. ad pyramidem reductio, 550. *i.* 200. ad cylindrum circumscriptum ratio, *g.* 551. *i.* 201. soliditas quomodo inveniatur, *g.* 556. *i.* 199. superficies quomodo inveniatur, *g.* 556. *i.* 221.
*Sphærarum* similitudo, *g.* 571. ratio, 579.

*Sphæroidis elliptici* ſoliditas quomodo inveniatur, *i.* 203. & ſeqq.
*Spiralis* Archimedis. Definitio, *f.* 569. proprietas, 570. ſubtangens, *i.* 50.
*Spiralium* quadratura, *i.* 137.
*Spirales infinitæ.* Definitio, *f.* 572. ſubtangens, *i.* 50. 51.
*Spiralis parabolicæ* punctum flexus contrarii quomodo determinetur, *i.* 312.
*Stereometria* doliorum, *g.* 582 & ſeqq.
*Strues lignorum* quomodo metiamur, 382.
*Subnormalis.* Definitio, *f.* 408. quomodo inveniatur, *i.* 35.
*Subnormalis curvæ exponentialis* quomodo inveniatur, *i.* 283.
*Subnormalis ellipſeos* quomodo determinetur, *f.* 440. *i.* 37
*Subnormalis hyperbolæ* quomodo determinetur, *f.* 491.
*Subnormalis parabolæ* quomodo determinetur, *f.* 440 *i.* 36.
*Subtangens.* Definitio, *f.* 408.
*Subtangens curvæ algebraicæ* quomodo inveniatur, *i.* 20. & ſeqq.
*Subtangens curvæ exponentialis* quomodo inveniatur, *i.* 271. & ſeqq.
*Subtangens ellipſeos* quomodo determinetur, *f.* 440. 448. *i.* 25.
*Subtangens hyperbolæ* quomodo determinetur, *f.* 491. *i.* 27.
*Subtangens parabolæ* quomodo determinetur, *f.* 410. *i.* 21.
*Subtractio.* Definitio, *a.* 64. ſignum, 65. regulæ, 103. in numeris concretis, 104. examen, 106.
*Subtrahendus*, 64.
*Summa.* Definitio, *a.* 61.
*Summandi numeri*, ibid.
*Superficies.* Definitio, *g.* 28. termini, 29. 30.
*Superficies corporis rotatione geniti* quomodo inveniatur, *f.* 219.
*Superficiei ſphæræ* ad circulum maximum ratio, *g.* 554.
*Superficierum corporum* ratio analytice inveſtigata, *f.* 128.
*Surdeſolidum*, *a.* 252.
*ſecundum*, ibid.
*tertium*, ibid.
*Syllogiſmorum* forma an in demonſtrando attendenda, *c.* 47.

T.

*Tangere* quid ſignificet in Geometria, *g.* 47.
*Tangere circulum intus*, ibid.
*extus*, ibid.
*Tangens circulum* quomodo ducatur, *g.* 311. *f.* 291. ejus ad ſecantem ex eodem puncto ductam relatio, *g.* 379.
*Tangens* in Trigonometria. Definitio, *t.* 7. proprietates, 8. & ſeqq. quomodo inveniatur, 26. *i.* 161. arcus multipli quomodo inveniatur, *f.* 327.
*Tangentis* 45° magnitudo, *t.* 32.
*Tangentium circulum* proprietates, *g.* 304. 307. & ſeqq. 325. 326.
*Tangentium & ſecantium* ex eodem puncto ductarum relatio, *g.* 334.
*Tangens artificialis*, *t.* 31.
*complementi*, 11.
*Tangentium methodus inverſa.* Definitio, *i.* 224. in quo conſiſtat, 225. exempla, 226. & ſeqq.
*Termini* rationis, *a.* 126.

*Termi-*

*Terminorum usus* in rebus distincte concipiendis, *a.* 56.

*Tetraëdrum.* Definitio, *g.* 475. constructio, 525. quale sit corpus, 530. quomodo sphæræ inscribatur, *f.* 301. latus sphæræ inscribendi quomodo inveniatur, 299. hujus ad radium ratio, 314.

*Theorema.* Definitio, *c.* 38. quænam in eo consideranda, 39. & seqq.

*Theorema Newtonianum* evehendi binomium ad dignitatem quamcunque, *f.* 95. & seqq.

*Totum.* Definitio, *a.* 9. relatio ad partem, 84. 86.

*Tractoria*, *i.* 250. & seqq.

*Trapezoides.* Definitio, *g.* 103.

*Trapezium*, ibid.

*Triangulum.* Definitio, *g.* 87. per quæ determinetur 182. 206. 265. 266. constructio, 180. 205. 234. 264. area quomodo inveniatur, 392. *i.* 107. divisio in partes æquales, *g.* 440. ratio ad parallelogrammum, *g.* 386. 391 *i.* 348.

*Triangulorum* æqualitas unde colligatur, *g.* 179. 204.

*Triangulorum* æqualium proprietas, 393.

*Triangulorum* congruentia, 179. 204. 251.

*Trangulorum* proprietates, 188. & seqq. 239. 240. 244. 246. 247. 268. 297. 300. *t.* 33. 35. resolutio trigonometrica, *t.* 36. & seqq. similitudo, *g.* 183. 207. 235. 237. 252. 267.

*Triangulorum* similium proprietates, 396. & seqq.

*Triangulum acutangulum.* Definitio, *g.* 93.

*Triangulum æquilaterum* Definitio, *g.* 88. constructio, 198. proprietates & symptomata, 185. 186. 187. 241. 254.

*Triangulum æquicrurum.* Definitio, *g.* 89. constructio, 199. per quæ determinetur, 200. proprietates & symptomata, 184. 248. 253. similitudo, 201.

*Triangulum æquilaterum.* Definitio, *g.* 88. constructio, 198. proprietates & symptomata, 185. 186. 187. 241. 254.

*Triangulum obliquangulum.* Definitio, *g.* 94.

*Triangulum obtusangulum.* Definitio, 92. proprietates, 221. & seqq. 241.

*Triangulum rectangulum.* Definitio, 91. proprietates, 218. & seqq. 241. 244. 329. 417.

*Trianguli regularis circulo inscribendi* latus quomodo inveniatur, *f.* 268.

*Trigonometria canonica* a Tabularum necessitate liberata, *t.* 167.

*Trigonometria plana.* Definitio, *t.* 1.

*Trochois.* Definitio, *f.* 573. proprietates, 574. & seqq.

## U.

*Variationes* omnes quantitatum combinatarum & permutatarum quomodo inveniantur, *f.* 222.

*Vertex* anguli, *g.* 54.
*curvæ*, *f.* 369.
*figuræ*, *g.* 114.

*Uncia*

*Unciæ potentiarum* quinam numeri dicantur, *f.* 95. quales sint numeri, 218.

*Unitas.* Definitio, *a.* 4.

*Unitates eædem* quænam sint, *a.* 5. 6. *diversæ* quænam sint, ibid.

*Unum.* Definitio, *a.* 3.

*Virgulæ pithometricæ* constructio, *g.* 582. & seqq. 595. 598.

Z.

*Zensus*, *a.* 253.

*Zensicubus*, ibid.

*Zensizenzensus*, ibid.

*Zensizensus*, ibid.

*Zensurdesolidus*, ibid.

*FINIS INDICIS QUARTI.*

V.

# INDEX *RERUM ET VERBORUM* TOMO II. CONTENTORUM.

Notes velim, literam *m.* Mechanicam, *f.* Hydrostaticam, *a.* Aërometriam, *h.* Hydraulicam & numeros §. § disignare: ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

*Acceleratio motus* gravium qua lege fiat, *m.* 85. & seqq.

*Acceleratio motus aquæ* quomodo fiat, *h.* 249. & seqq.

*Actionis & reactionis* æqualitas & contrarietas, *m.* 528. 529.

*Æquilibrium in aëre æquiponderantium* quomodo tollatur, *a.* 158.

*Æquilibrium fluidorum* diversæ gravitatis specificæ, *f.* 36. homogenorum, 34.

*Æquiponderantia* in aëre quando non æquiponderent in aliis fluidis, *f.* 58.

*Æquiponderatio.* Definitio, *m.* 122. theoria, 144. & seqq.

*Aër.* Definitio nominalis, *a.* 3. existentia, 13. 14. quod telluri circumfundatur, 44. quod compri-

mi possit, 15. 17. quomodo intra vas comprimatur, 65. quomodo ope antliæ in data ratione dilatetur, 52. num comprimatur in ratione ponderum, 72. & seqq. quod sit elasticus, 18. quod gravis, 21. quod rarefiat, 23. quod condensetur, 24.

*Aër inferior* quod superiore densior, *a.* 154. specifice gravior, 155.

*Aëris compressi* in vase ope antliæ ratio ad primitivum, *a.* 66. & seqq. compressi in vase in aqua submerso elater quantus sit, 108. compressi vi elastica quomodo aqua moveatur, *b.* 87. 89. & seqq.

*Aëris densitas* ubi eadem, *a.* 46. 47.

*Aëris ex vase educti per antliam* quantitas quomodo inveniatur, 103.

*Aëris pes cubicus* quantum ponderet, 56. 57.

*Aëris rarefactione* quomodo aqua expellatur, *b.* 91.

*Aëris residui* in vase ope antliæ evacuato ratio ad primitivum, *a.* 50. 51.

*Aërometria.* Definitio, 1. quænam in ea tradenda, 2.

*Alarum molendini situs optimus* quomodo determinetur, *b.* 316.

*Altitudines jactuum* sub diversis angulis quomodo sint inter se, *m.* 504. 505

*Altitudo ascensus ponderis super plano inclinato* quomodo se habeat, 269. 270.

*Altitudo jactus* quomodo se habeat ad parametrum, 503.

*Altitudo maxima*, ad quam grave oblique projectum ascendit, 499. 501. 502.

*Altitudo viva* fluminis, *b.* 228.

*Alveus fluminis.* Definitio, *b.* 185.
*artificialis*, 186.
*naturalis*, ibid.

*Amplitudo semitæ projectilis.* Definitio, *m.* 489. quomodo sit ad semitam, 491. & seqq. quando semiparametro æqualis, 495. quando maxima, 494. quomodo maxima inveniatur, 497. quomodo ceteræ ex ea eruantur, 496.

*Anemometrum.* Definitio, *a.* 181. constructio, 182.

*Angulus directionis.* Definitio, *m.* 240.

*Angulus elevationis* in motu projectorum. Definitio, *m.* 478. quomodo determinetur, ut projectile feriat locum datum, 506.

*Angulus incidentiæ.* Definitio, 550.

*Angulus reflexionis.* Definitio, 551.

*Antliæ attractivæ* constructio, *b.* 110.

*Antliæ ctesibianæ* constructio, 113. & seqq.

*Antliæ pneumaticæ.* Definitio, *a.* 38. inventor, 39. constructio, 40. usus, 41. & seqq. capacitas quomodo determinanda, 54. 55.

*Antliæ pneumaticæ* quomodo inter se comparandæ, 53.

*Aqua* quomodo vires ad agitandas machinas concipiat, *m.* 900. per exiguum orificium in vas immittatur, *a.* 149. per sectionem canalis horizontalis fluat, *b.* 235. & seqq. quo derivari possit, 9. quomodo ex loco uno in alterum derivetur, 13. & seqq. in locum excelsiorem deducatur, 126. 127. per siphonem ascendat, 66. ope catenarum

narum ſitulis inſtructarum elevetur, 116.

*Aqua proſiliens* quantum aſcendat, *h.* 49. & ſeqq. 56. 57.

*Aquæ gravitas ſpecifica*, *ſ.* 77.

*Aquæ libere fluentis in alveo* qua de cauſa acceleretur, *h.* 200. quantum acceleretur, 201. & ſeqq.

*Aquæ quantitas in vas inverſum aſcendens*, dum eidem immergitur, quomodo determinetur, *a.* 109. & ſeqq.

*Aquæ ſaltus* per lumen horizontale, *h.* 58. & ſeqq. per verticale, 49. & ſeqq.

*Aquarum quantitates* per tubos effluentes, *h.* 20. & ſeqq.

*Arcus circuli* centrum gravitatis, *m.* 165.

*Ars libellandi.* Definitio, 904. regulæ, 911.

*Aſcenſus* aquæ proſilientis, *h.* 49. & ſeqq. 56. 57.

*Aſcenſus celeritate per deſcenſum acquiſita factus* quomodo ſe habeat, *m.* 339.

*Aſcenſus in lineis curvis* demoſtratus, *m.* 334. & ſeqq.

*Aſſarium.* Definitio, *h.* 104. constructio, 106.

*Axis* quid ſignificet in Mechanica, *m.* 756. 757.

*Axis in peritrochio.* Definitio, 756. theoria & praxis, 792. & ſeqq.

*Axis oſcillationis.* Definitio, 379.

B.

*Barometrum.* Definitio, *a.* 89. theoria, 124. & ſeqq. conſtructio, 131.

*Baroſcopium.* Definitio, 89. ſenſibilioris conſtructio, 136. & ſeqq.

*Baroſcopii compoſiti* conſtructio, 134. *inclinati* theoria, 141. & ſeqq.

*Baſis* corporis gravis quid ſit, *m.* 221.

C.

*Calcando* quomodo machina moveatur, *m.* 886. 888.

*Calcatio* quid ſit, 874.

*Canalis* quid dicatur, *h.* 3.

*Cavitas corporis ſpecifice gravioris* quanta eſſe debeat, ne fluido leviori ſupernatet, *ſ.* 111.

*Celeritas.* Definitio, *m.* 13. quod tempori proportionalis, 14. 15. quid proprie ſit, 16. quomodo a Mathematicis conſideretur, 114. quando eadem ex ictu corporum reſultet, 534. quando in conflictu non mutetur, 590. quando mutetur, 560. 562. 576. quanta aquæ per foramen vaſis erumpentis, *h.* 48.

*Celeritas abſoluta.* Definitio, *h.* 305.

*Celeritas acquiſita* per deſcenſum perpendicularem, *m.* 92. in plano inclinato, 29. 192. 303. & ſeqq. in curva, 308.

*Celeritas aquæ in alveo* an major in fundo, quam ſuperficie, *h.* 206. per canalem declivem fluentis num augeatur ob preſſionem a ſuperiori, 243. & ſeqq.

*Celeritas corporum elaſticorum* in concurſu quomodo determinetur, *m.* 571.

*Celeritas fluidi* per ſiphonem effluentis.

tis, *h.* 81. & seqq. vi aëris compressi ejecti, 92. & seqq.

*Celeritas in motu composito* quomodo inveniatur, *m.* 252.

*Celeritas media* in fluminibus quomodo inveniatur, *h.* 238. & seqq. aquæ per canalem horizontalem fluentis, 263. & seqq.

*Celeritas penduli* in puncto infimo qualis sit, *m.* 401.

*Celeritas projectilis* quomodo inveniatur, 514.

*Celeritas respectiva.* Definitio, *h.* 305.

*Celeritates* quando in conflictu corporum permutentur, *m.* 563. 565.

*Celeritates acquisitæ* in conflictu corporum elasticorum quomodo se habeant, *m.* 603. & seqq. in diversis planis inclinatis eodem tempore quomodo se habeant, 301. 302.

*Celeritates amissæ* in conflictu corporum elasticorum quomodo se habeant, *m.* 603.

*Celeritates aquarum* per tubos effluentium, *h.* 36. & seqq.

*Celeritas terminalis* in motu corporum quænam dicatur, *m.* 727. quomodo determinetur, 728. & seqq.

*Celeritates terminales* in fluminibus. Definitio, *h.* 237. quomodo inveniantur, 239.

*Celeritatum locus* in motu gravium quænam sit curva, *m.* 99.

*Celeritatum quadratorum summa* in conflictu corporum elasticorum quod conservetur, 593.

*Centrum gravitatis.* Definitio, *m.* 122. cur pro gravi corpore sumi possit, 125. quando idem cum centro magnitudinis, 141. quomodo determinetur, 157. quomodo mechanice determinetur, 186. quomodo se habeat ante & post conflictum, 598. 560.

*Centrum gravitatis* arcus circuli, *m.* 165. coni, 174. coni truncati, 184. conoidis hyperbolici, 179. parabolici, 175. 176. truncati, 185. corporis humani, 187. cylindri, 143. lineæ rectæ, 142. Lunulæ *Hippocratis*, 169. parabolæ, 159. 162. parabolæ truncatæ, 170. parabolarum infinitarum, 160. 161. 163. parabolici mixtilinei spatii, 189. parallelepipedi, 171. parallelogrammi, 172. perimetri trianguli, 190. perimetri figuræ irregularis cujuscunque, 191. pyramidis truncatæ, 184 pyramidis, 174. sectoris circuli, 166. segmenti circuli, 168. segmenti sphæræ, 177. segmenti sphærodis elliptici, 180. semicirculi, 167. sphæræ, 178. sphæroidis truncati, 185. sphæroidis elliptici, 181. dimidii, 182. trianguli, 158.

*Centri gravitatis status* num mutetur ab actione corporum in se invicem, *m.* 602.

*Centrum gravitatis commune* duorum corporum seu ponderum quomodo determinetur, 144. 149. quomodo plurium, 151. 192. ponderum æqualium, 145.

*Centrum magnitudinis.* Definitio, *m.* 132.

*Centrum motus.* Definitio, *m.* 228.
*Centrum oscillationis.* Definitio, *m.* 423. quomodo determinetur, 426. 429. 432. quomodo in figuris in latus agitatis, 445. & seqq.
*Centrum oscillationis* coni, *m.* 459. 466. conoidis parabolici, 462. hyperbolici, 464. infinitorum parabolicorum, 463. cylindri, 457. hemisphærii, 461. 467. lineæ rectæ, 433. parabolæ, 440. 441. 451. 453. parabolarum infinitarum & curvarum agnatarum, 440. 442. 452. rectanguli 435. 448. solidorum rotatione genitorum, 454 sphæræ, 460. sphæroidis elliptici, 465. trianguli æquicruri, 436. 437. 438. 449. 450.
*Centrum percussionis.* Definitio, *m.* 527. quando cum centro oscillationis idem, 547. quando idem cum centro gravitatis, 549.
*Centrum velocitatis*, *h.* 268.
*virium.* Definitio, *m.* 654.
*Ceræ* gravitas specifica, *f.* 77.
*Circuli* area quomodo inveniatur, *m.* 198.
*Clavicula.* Definitio, *h.* 5. constructio, 7. 8.
*Clepsydræ* divisio, 45. & seqq.
*Cochlea.* Definitio, *m.* 760. theoria, 847. & seqq. praxis, 852. & seqq.
*Cochlea* mas, *m.* 760.
fœmina, ibid.
*Cochlea* Archimedis quomodo construatur, *h.* 122. & seqq.
*Cochlea infinita* seu *perpetua.* Definitio, *m.* 855. theoria, 856. 858. & seqq. praxis, 862. & seqq.
*Conatus.* Definitio, *m.* 18.
*Compressio.* Definitio, *a.* 5.
*Compressio aëris* in vase sub aqua detento, *a.* 106.
*Condensatio.* Definitio, 6.
*Condensatio aeris* quomodo æstimanda, 114. & seqq.
*Coni* centrum gravitatis, *m.* 184. centrum oscillationis, 459. 466. soliditas quomodo inveniatur, 202. 204. 205. quomodo superficies, 202. 203.
*Conoidis hyperbolici* centrum gravitatis, *m.* 179. centrum oscillationis, *m.* 464.
*Conoidis parabolici* centrum gravitatis, 175. 176. centrum oscillationis. 462.
*Conoidis truncati* centrum gravitatis, 185.
*Conoidum parabolicorum infinitorum* centrum oscillationis, *m.* 463.
*Corpora æqualium basium* quantum ab aëre premantur, *a.* 45.
*Corpora gravia* num eadem celeritate descendant, *m.* 133. 134.
*Corporis humani* centrum gravitatis, 187.
*Corporis pars* immergenda in fluido quando inveniatur, *f.* 105.
*Corporis specifice gravioris* gravitatio in fluido specifice leviori, *f.* 55. & seqq.
*Corporum in aëre æquilibratorum* æquilibrium quando tollatur, *a.* 158.
*Corpus motu reflexo* qua via ab uno termino ad alterum accedat, *m.* 558.
*Corpus asperum.* Definitio, *m.* 935.

*Corpus durum*, 520.
*elasticum*, 522.
*fluidum*, *s*. 3.
*molle*, *m*. 521.
*solidum*, *s*. 4.
*Cunei* theoria, *m*. 865.
*Currus onustus* cur difficilius trahatur super plano inclinato, quam horizontali, 277.
*Curva*, in qua grave descendens eam constanter ei ponderi absoluto æquali premit, 672.
*Curva*, in qua grave descendens eam constanter eadem vi, sed non ponderi absoluto æquali premit, 673. quæ a pondere descendente premitur in ratione dignitatum altitudinum, 675.
*Curva accessus & recessus æquabilis*. Definitio, 347. quomodo inveniatur, 349.
*Curva æquilibrationis*. Definitio, 369. quomodo inveniatur, 371. quomodo describatur, 373.
*Curva brachystochrona*. Definitio, 355. quomodo inveniatur, 357.
*Curva celerrimi descensus*. Definitio, 355. quænam sit, 357.
*Curva elastica* Bernoulli, 675.
*Curva isochrona*. Definitio, 331. quomodo inveniatur in hypothesi Galilæana, 334. in hypothesi directionum convergentium, 336. hujus rectificatio, 338. quadratura, 339. quæmodo inveniatur in quacunque accelerationis hypothesi, 343.
*Curva isochrona paracentrica*. Definitio, *m*. 347. quomodo inveniatur, 349.
*Curva oligochrona*. Definitio, 355. quomodo inveniatur, 357.
*Curva resistentiæ* in motu gravium, 708
*instantaneæ*, 682.
*totalis*, ibid.
*Curva synchrona*. Definitio, 366. quomodo construatur, 368.
*Curva tautochrona*. Definitio, 351. quænam sit, 352
*Cycloidis* proprietates mechanicæ, *m*. 352. 357. 675. proprietates singulares, 311. 388. quomodo per data tria puncta describatur, 361.
*Cyclois externa* circularium segmentorum repræsentatrix, 358.
*Cylindri* centrum gravitatis, 143. oscillationis, 457. soliditas, 197. 200. 201. superficies quomodo inveniatur, 200.

D.

*Densitates* quando sunt ut massæ, *s*. 14. quando ut gravitates, 16. quando reciproce ut volumina, 23.
*Densitatum* ratio, 24. 25.
*Densitates fluidorum* quomodo se habeant, *s*. 39. quomodo inveniantur, 67. respectivæ quando determinentur, 40.
*Densitas aëris* ubi eadem, *a*. 46. 47. quomodo crescat, 153. num inferioris ponderi atmosphærico proportionalis, 156.
*Densius*. Definitio, 8.
*Deprimendo movere* quid sit, *m*. 871.
*Descensus gravium intra minutum secundum* quomodo determinetur, 472. quantus sit, 473.
*Descensus gravium* in cycloide quomodo se habeat, *m*. 311. in lineis

curvis

curvis demonſtratus, 334. & ſeqq. in plano inclinato cum deſcenſu per verticale collatus, 293. & ſeqq. cum deſcenſu perpendiculari iisdem legibus adſtrictus, 289.
*Deſcenſus ſpecifice gravioris* in fluido leviori, *ſ.* 88. & ſeqq.
*Diabetis* conſtructio, 72. phænomena, 73. & ſeqq.
*Diagonalis parallelogrammi* quando motu compoſito deſcribatur, *m.* 241. quo tempore deſcribatur, 244.
*Diameter gravitatis.* Definitio, *m.* 126.
*Dilatatio.* Definitio, *a.* 7.
*Diſtantiæ ponderum a centro gravitatis communi* quomodo ſe habeant, 144.
*Diſtantia a centro gravitatis & centro motus* qualis ſit linea, 229.
*Directiones* quomodo opponantur, 21.

E.

*Effectus aëris compreſſi* quomodo computentur, *a.* 83. & ſeqq.
*Effectus pleni* quomodo ſe habeant, *m.* 530.
*Elateris* æſtimatio, *m.* 553.
*Elateris vi* quomodo machina moveatur, 897.
*Elater aëris.* Definitio, *a.* 9. quando non mutetur, 12 quando creſcat & deſcreſcat, 12. exiſtentia, 18. menſura, 30. & ſeqq. quod calore intendatur, 146. frigore minuatur, 147.
*Elateris aëris* directio, 25. 26. menſura ejus, quo rarefiens expanditur, 148.
*Elater aëris compreſſi* quomodo ſe habeat ad elaterem dilatati, 78. quando fortior, 79. quomodo determinetur, 81. magis compreſſi ad elaterem minus compreſſi quomodo ſe habeat, 80.
*Elevatio* quid ſit, *m.* 873.
*Ellilipſeos æquatio* abſciſſis a foco computatis, *m.* 667.
*Epiſtomium.* Definitio, *h.* 5. constructio, 7. 8.
*Ergata* qualis machina, *m.* 877.

F.

*Figuræ ſuperficialis & ſolidæ magnitudo* ex centro gravitatis determinata, *m.* 192.
*Figurarum per planum deorſum latum deſcriptarum* ſoliditas quomodo inveniatur, 196.
*Fluida homogenea* quando in æquilibrio, *ſ.* 34. quodnam præponderet, 35.
*Fluida heterogenea* quando in æquilibrio, 36.
*Fluidi ex vaſe inverſo exigui orificii effluentis* quantitas quomodo determinetur, *a.* 100. & ſeqq.
*Fluidi gravioris* in ſpecifice leviori ponderatio, *ſ.* 87. & ſeqq.
*Fluidi pondus* quomodo inveniatur, 62. 63.
*Fluidi partes inferiores* num comprimantur a ſuperioribus, 71. 72.
*Fluidi per ſiphonem effluentis* acceleratio, *h.* 81. & ſeqq.
*Fluidorum diverſæ gravitatis ſpecificæ* æquilibrium, 36.
*Fluidorum denſitates* quomodo inveniantur, 67.
*Fluidorum diverſæ gravitates ſpecificæ*

*ficæ* quomodo inveniantur, 66. 70. quomodo ſe habeant, 95.
*Fluidorum indirecte ac directe impingentium juxta lineas parallelas* theoria, *h.* 367. & ſeqq.
*Fluidorum variorum* gravitas in pollice cubico Pariſino, *ſ.* 69.
*Flumen detumeſcere* quando dicatur, *h.* 199.
*Flumen intumeſcere* quando dicatur, ibid.
*Fluminum curſus* theoria, *h.* 185. & ſeqq.
*Fons naturalis* quomodo arte conſtruatur, *h.* 18.
*Fontis intermittentis* conſtructio, *h.* 143. 152.
*Fontium ſalientium* conſtructio, 128. & ſeqq. 152. & ſeqq.
*Frictio.* Definitio, *m.* 933. quomodo æſtimanda, 940. & ſeqq. quomodo minuatur, 943. & ſeqq. 956. & ſeqq.
*Fulcra* quomodo corpori ſupponenda, ut in data ratione premantur, *m.* 234.
*Funis canabini contractio* ob humiditatem aëris, *a.* 215. 216.

G.

*Grave* quando quieſcat, *m.* 123. 124. 222. quando firmiter inſiſtat, 223. quando cadat, 222. num ſit a lapſu immune quomodo inveniatur, 224. quo motu deſcendat, 79. 85. & ſeqq. quomodo in plano inclinato deſcendat, 261. & ſeqq.
*Gravium* linea directionis, 212. & ſeqq.
*Gravia heterogenea.* Definitio, *m.* 131.
*Gravia homogenea*, 130.
*Gravitas.* Definitio, *m.* 4. quomodo ſpectetur a Mathematicis in motu gravium, 114. num in omni diſtantia eadem, 78. quod a polis verſus æquatorem continuo decreſcat, 390.
*Gravitates* quando ſunt ut volumina, *ſ.* 18.
*Gravitatis actio diverſa* quomodo ex motu pendulorum colligatur, *m.* 389.
*Gravitatis planum.* Definitio, 128.
*Gravitas abſoluta.* Definitio, *m.* 259. ad reſpectivam ponderis ſuper plano inclinato quomodo ſeſe habeat 261. 263.
*Gravitates abſolutæ* quomodo ſe habeant, *ſ.* 31.
*Gravitas aëris* evicta, *a.* 20. quod ſit variabilis, 121. & ſeqq.
*Gravitas ſpecifica* determinata, 27. & ſeqq.
*Gravitas reſpectiva.* Definitio, *m.* 260. quando in abſolutum degeneret, 266. quando nulla, ibid. ſuper plano inclinato quomodo creſcat & decreſcat, 265.
*Gravitates* reſpectivæ ponderum ſuper diverſis planis inclinatis quomodo ſint ad ſe invicem, 264.
*Gravitas ſolidi* quomodo inveniatur, *ſ.* 78. 79.
*Gravitas ſpecifica corporum* quando eadem, 19. 30. quando diverſa, 20.
*Gravitates ſpecificæ* quomodo ſe habeant, 32. 33. 65. quando ſint ut volumina reciprocæ, 29. quando

ut massæ, 28. quando ut absolutæ, 26.
*Gravitas specifica fluidorum* quomodo inveniatur, *s.* 37. 66. 70. quod æstate ac hieme non eadem, 69.
*Gravitates specificæ fluidorum* quomodo se habeant, 95.
*Gravitatis specificæ fluidi ad gravitatem specificam solidi gravioris* ratio qomodo determinetur, 73.
*Gravitas specifica solidi* quomodo determinetur, *s.* 75. 76. quomodo se habeat ad gravitatem fluidi, 101.
*Gravitates specificæ solidorum æqualium* quomodo se habeant, 103.
*Gravitatio.* Definitio, *m.* 5. in fulcra, a quibus sustentatur, 231. super plano inclinato qualis sit, 261.
*Gravitatio corporum specifice leviorum* in fluido graviori, *s.* 94. & seqq.
*Gravitatio specifice graviorum* in fluido leviori, 34.

H.

*Hemisphæria* evacuata quanta vi comprimantur, *a.* 59. & seqq.
*Hemisphærii* centrum oscillationis, *m.* 461. 467.
*Horologii oscillatorii* constructio, *m.* 994.
*Hydracontisterii* constructio, *h.* 168.
*Hydraulica.* Definitio, 1.
*Hydrostatica.* Definitio, *s.* 1.
*Hygrometrum.* Definitio, *a.* 197.
*Hygroscopium.* Definitio, 197. constructio, 220.
*Hyperbolæ æquatio* abscissis a foco computatis, *m.* 668.
*Hypomochlium.* Definitio, *m.* 753.
*Hypothesis Galilæana* de motu gravium, *m.* 89. & seqq.
*Hypothesis Baliani* de motu gravium, 102. ejus impossibilitas demonstrata, 115.

I.

*Ictus* quomodo se habeant in conflictu corporum, *m.* 567.
*Ictus perpendicularis* ad obliquum ratio, 552.
*Ignis vi* quomodo machinæ agitentur, 931.
*Impactus directus* corporis unius in alterum. Definitio, 523.
*Impactus indirectus sive obliquus.* Definitio, 526.
*Impetus.* Definitio, 543.
*Incessus hominum* quomodo fiat, 226.
*Incursus fluidorum eodem modo fieri* quando dicatur, *h.* 276.
*Instrumenta* quænam ad vectem revocabilia, *m.* 750.
*Instrumenti* constructio, quo quantitas salis in aqua salsa exploratur, *s.* 108. & seqq.

L.

*Lampadis* constructio, quæ eandem quantitatem olei ellychnio affundit, *h.* 155.
*Lapidis* gravitas specifica, *s.* 77.
*Lapsus.* Definitio, *m.* 211.
*Lapsus gravium* unde pendeat, 222.
*Lex motus*, 71.
*Libella.* Definitio, *m.* 906. constructio, 907. & seqq. rectificatio, 910.
*Libellatio aquarum* quomodo instituenda, 911.

*Libræ* theoria, 779. & seqq. constructio, 782. & seqq. examen, 787. usus, 788. & seqq.
*Linea directionis.* Definitio, *m.* 17.
*Linea directionis* gravium, 212. & seqq.
*Linea horizontalis vera.* Definitio, 207. qualis sit, 208.
*Linea horizontalis apparens.* Definitio, *m.* 209. qualis sit, 210. quando pro vera assumi possit, 218. quomodo ad veram reducatur, 216.
*Lineæ rectæ* centrum gravitatis, 142. centrum oscillationis, 433.
*Logarithmicæ* proprietas, 682.
*Lumen tubi* quid sit, *h.* 4.
*Lunulæ Hippocratis* centrum gravitatis, *m.* 169.

M.

*Machina.* Definitio, *m.* 745.
*Machina* ingenti ponderi elevando apta, *m.* 969. ad conterendam materiam pulveris pyrii serviens, 989. & seqq. qua aqua insigni cum impetu elevatur, *h.* 166.
*Machinæ*, quibus aqua elevatur, *h.* 107. & seqq.
*Machinæ compositæ.* Definitio, *m.* 966. earum numerus, 967. quomodo inveniantur, 968.
*Machinamenta hydraulica*, *h.* 161. & seqq.
*Magnetis* gravitas specifica, *f.* 77.
*Malluvii* cum fonticulo saliente constructio, *h.* 145.
*Manometri* theoria, *a.* 151.
*Manoscopium.* Definitio, *a.* 160. constructio, 161. & seqq.
*Marmoris* gravitas specifica, *f.* 77.
*Massa.* Definitio, *m.* 6. quomodo æstimanda, 138. quorumnam corporum æqualis, *f.* 12.
*Massæ* corporum quomodo se habeant, *f.* 21. 22. quando sint ut volumina, 17.
*Massæ bonæ ab adulteratis* quomodo distinguantur, 83. & seqq.
*Materia* quænam cum corpore gravitet, *m.* 136.
*Mechanica.* Definitio, 1.
*Mechanice philosophari* quid significet, *m.* 746.
*Metallorum* gravitates specificæ, *f.* 77.
*Methodus centrobaryca* Guldini, *m.* 206.
*Miscibilium quantitas* in mixto quomodo inveniatur, *f.* 81.
*Mobile* quando in curva ea lege incedat, ut radius vector verrat areas tempori proportionales, *m.* 652.
*Molæ alatæ*, *m.* 982. frumentariæ, 975. & seqq. jumentariæ, 981. manuariæ, 979. oleariæ, 983. & seqq. serrariæ constructio, 992.
*Moles.* Definitio, 7. quomodo inveniatur, 8.
*Momentum gravium* quid dicatur, *m.* 147.
*Momenta corporum* extra centrum gravitatis suspensorum, 153.
*Momenta ponderum* super plano inclinato spectatorum, 271.
*Motus.* Definitio, *m.* 2. quando acceleretur, 76. quando in medio resistente nunquam extinguatur, 690. retardetur, 77. quando nullus sequatur, 75. cur naturalis rectilineus, 73. super plano inclinato descen-

descendentis qualis sit, 284. & seqq. quando per reflexionem non mutetur, 555.
*Motus æquabilis.* Definitio, *m.* 24. theoria, 27 & seqq. 31.
*Motus acceleratus.* Definitio, 67. theoria, 101. & seqq.
*Motus animalium* explicandi principium, 226.
*Motus compositus.* Definitio, 238. theoria, 241. & seqq.
*Motus corporis impingentis* quando cesset, 544.
*Motus in conflictu amissus* quomodo determinetur, 541.
*Motus ex percussione* demonstratus, 530. & seqq.
*Motus perfecte durorum*, 532. & seqq.
*Motus elasticorum*, 560. & seqq.
*Motus oblique impingentium* quomodo determinetur, 616.
*Motus curvilineus* qualis, *m.* 239. quænam ejus causa, 74.
*Motus fluminum* theoria, *h.* 210. & seqq.
*Motus gravis ascendentis* qualis sit, *m.* 317. quibus legibus adstringatur, 318. & seqq.
*Motus gravium*, qua lege acceleretur, 86. 87. in medio resistente, 708. & seqq.
*Motus pendulorum* demonstratus, 380. & seqq.
*Motus projectorum* demonstratus, 479. & seqq.
*Motus rectilinei* in compositum resolutio, 245. 246.
*Motus retardatus.* Definitio, *m.* 70.
*Motus simplex.* Definitio, 237.
*Motus uniformiter acceleratus.* Definitio, 67. ratio, 80. & seqq.
*Motus uniformiter retardati* ratio, 97. & seqq.
*Moveri* quando dicatur corpus, 3.

N.

*Nervi fidium* mutatio quoad longitudinem ob humiditatem aëris, *a.* 218.

O.

*Oscillatio.* Definitio, *m.* 376.
*Oscillatio penduli* in cycloide quomodo determinetur, 387. quomodo efficiantur isochronæ, 382. & seqq.
*Oscillationes pendulorum* inter se comparatæ, 392. & seqq.
*Onus ferendum* quomodo in data ratione distribuatur, 235.

P.

*Parabola* curva temporis in motu gravium, *m.* 100. locus celeritatum in motu gravium, 99. via corporis projecti, 480. 482. quomodo describatur, 486.
*Parabolæ* æquatio abscissis a foco computatis, *m.* 666. centrum gravitatis, 159. 162. centrum oscillationis, 451. 453. usus in motu fluminum explicando, *h.* 229. & seqq.
*Parabolæ truncatæ* centrum gravitatis, *m.* 170.
*Parabolarum infinitarum* centrum gravitatis, 160. 161. 163. centrum oscillationis, 440. 441. 452.
*Parallelogrammi* centrum gravitatis, 172. area quomodo inveniatur, 194.
*Parallelepipedi* centrum gravitatis, 172.

*Pes horarius*. Definitio, *m.* 425 quantitas, 470. quomodo determinetur, 469. num sit mensura universalis, 471.

*Pendulum*. Definitio, *m.* 376. cur oscilletur, 380.

*Penduli agitatio in latus*, 444.
*in planum*, ibid.

*Pendulorum intra cycloides suspensorum longitudines* quomodo se habeant, 396. & seqq.

*Pendulum simplex*. Definitio, 377.
*Compositum*, 378.

*Percussio fluidi*. Definitio, *h.* 269. qualis sit, 270. 271. quænam in ea æstimanda respicienda, 272. 273. 274. theoria, 280. & seqq.

*Perimetri figuræ irregularis cujuscunque* centrum gravitatis, *m.* 191.

*Perimetri trianguli* centrum gravitatis, 191.

*Peritrochium* quid dicatur, 756.

*Plana diversa* quomodo ab aëre premantur, *a.* 61.

*Plana similiter inclinata* quænam sint, *m.* 312.

*Plani horizontalis* determinatio, 219.

*Plani inclinati longitudinis* ad altitudinem ratio quomodo in praxi facile determinetur, *m.* 277. theoria & praxis, 261. & seqq.

*Planum inclinatum*. Definitio, 258. quomodo determinetur, super quo datum pondus data vi sustentetur, 268.

*Poculi* constructio, quo bibenti illuditur, *h.* 74.

*Polyspasti* theoria & praxis, *m.* 833. & seqq.

*Pondus*. Definitio, *m.* 748. quomodo hydrostatice inveniatur, *f.* 104. quando in aëre minuatur, & augeatur, *a* 157. ejus vi quomodo machina moveatur, *m.* 890. & seqq. potentia adjuvetur, 896.

*Pondus columnæ atmosphæricæ* quomodo inveniatur, *a.* 59.

*Pondus corporis in vacuo* quomodo inveniatur, *a.* 58.

*Pondus appensum* quando corpus in plano horizontali positum e situ horizontali dimovere nequeat, *m.* 233.

*Pondera super curvis* æquiponderantia, *m.* 374.

*Ponderum super planis inclinatis æquiponderantium* ratio ad se invicem, 281. 283.

*Ponderis aëris incrementum* ob variatum pondus atmosphæricum quomodo determinetur, *a.* 159

*Potentia*. Definitio, 747. cuinam sit æqualis, 763.

*Potentia animata*, 869.
*inanimata*, 869.
*movens*, 747.
*resistens*, ibid.

*Præponderatio corporum duorum extra centrum gravitatis commune suspensorum* quomodo determinetur, *m.* 152. quomodo plurium, 155.

*Præponderatio fluidi homogenei*, *f.* 35.

*Pressio fundi vasorum* a fluidis, *f.* 41. & seqq. quando eadem, 42. 43. 47. 200. quomodo decrescat, 44. 45. si bases vasis fuerint inæquales, 48.

*Pressiones fundi* vasorum a fluidis quam habeant rationem, 46.
*Principium* rationis sufficientis, *m.* 25. 26.
*Prismatis soliditas* quomodo inveniatur, 197.
*Problema Archimedeum* de corona ex auro & argento mixta quomodo solvatur, *f.* 82.
*Problema de curva isochrona* ad omnem universalitatem revocatum, *m.* 345.
*Projectilis* motus per spatia horizontalia qualis, 490.
*Projectum horizontaliter vel oblique* qualem lineam describat, 480. 482.
*Projectio horizontalis.* Definitio, *m.* 476. qualis hinc oriatur motus, 480.
*Projectio obliqua.* Definitio, 477. qualis hinc oriatur motus, 488.
*Projectio perpendicularis.* Definitio, 475. quinam hinc oriatur, 479.
*Projectionis curva* quomodo inveniatur directionibus gravium suppositis parallelis, 516. iisdem suppositis convergentibus in centro Telluris, 518.
*Pyramidis truncatæ* centrum gravitatis, 184.

Q.

*Quantitas materiæ* in diversis corporibus quomodo per pendula definiatur, *m.* 406. & seqq. quod ponderi proportionalis, 412.
*Quantitas motionis.* Definitio, 22. 23.
*Quantitas motus.* Definitio, *m.* 22. 23. quando ante & post conflictum eadem, 581. 585. quando non, 582. & seqq. quando augeatur, 588. quando minuatur, 589. in corporibus homogeneis quomodo se habeat, 139.
*Quies.* Definitio, *m.* 2.
*Quies* ex ictu corporum resultans, 533. 538. gravium unde pendeat, 222.

R.

*Radius vector.* Definitio, *m.* 655.
*Rarefactio.* Definitio, *a.* 8.
*Rarefactio aëris* evicta, *a.* 23. quomodo eadem aqua expellatur, *h.* 91.
*Rarius.* Definitio, *f.* 10. quod specifice levius densiori, 11.
*Rectanguli* centrum oscillationis, *m.* 435. 448.
*Reflexio corporis oblique impingentis* qualis sit, *m.* 556.
*Reflexionis lex* analytice investigata, 557.
*Resistentia*, quam patiuntur corpora per fluida mota, *h.* 301. & seqq.
*Resistentia medii.* Definitio, *m.* 677. quomodo determinetur, 679. & seqq.
*Rosarii* constructio, *h.* 118. 119.
*Rota directa.* Definitio, *m.* 899. constructio, 923. quomodo vi aquæ agitetur, 920.
*Rota retrograda.* Definitio, 899. quomodo vi aquæ agitetur, 924. & seqq.
*Rota situlis instructa* quomodo construatur, *h.* 120.
*Rotarum dentatarum & radiatarum lignearum* constructio, *m.* 997.

S.

*Salis quantitas* in aqua falsa quomodo determinetur, *f.* 108. & seqq.

*Saltus aquæ* per lumen horizontale, *h.* 58. & seqq. per verticale, 49. & seqq. vi aëris compressi factus quantus sit, 96. & seqq. 101. vi rarefacti factus quantus, 102.

*Scytalæ* quænam vocentur, *m.* 757.

*Sectio alvei.* Definitio, *h.* 188.

*Sectio alvei naturalis*, 190. qualis figura, 192.

*Sectio alvei artificialis*, 190. qualis figura, 193.

*Sectio alvei tardior*, 196.

*velocior*, ibid.

*Sectiones æquiveloces.* Definitio, *h.* 195. 209.

*Sectio fluminis.* Definitio, *m.* 39. quomodo inveniatur, 914. 915.

*Sectiones diversæ fluminis* quam habeant rationem, 916.

*Sectoris circuli* centrum gravitatis, 166.

*Segmenti circuli* centrum gravitatis, *m.* 168.

*Segmenti sphæræ* centrum gravitatis, 177.

*Segmentorum circuli* ratio, 364.

*Segmentorum curvarum similium* ratio, 364.

*Semicirculi* centrum gravitatis, 167.

*Semita projectilis.* Definitio, *m.* 488. quomodo describatur, 510. parameter quomodo inveniatur, 491.

*Similitudinis principiorum* in Geometria fœcunditas, 365.

*Sipho anatomicus*, *f.* 52. usus, ibid.

*Siphonis interrupti* constructio & usus, *h.* 77. & seqq.

*Siphonum* constructio, 64. 66.

*Situla* baculo supra mensam posito appensa quando non decidat, *m.* 233.

*Solidum* quanta sui parte mergatur, *f.* 94. quando profundius mergatur, 96. 97. quando datum intra fluidum locum servet, 98.

*Solidum minimæ resistentiæ* quomodo inveniatur, *h.* 319.

*Solidorum æquiponderantium* partes in fluido submersæ quando æquales, *f.* 102.

*Sollicitatio ad motum.* Definitio, *m.* 110. quomodo determinetur ex lege accelerationis, 112. in motu composito quomodo se habeat, 253.

*Spatium* motus. Definitio, *m.* 12.

*Spatii parabolici mixtilinei* centrum gravitatis, *m.* 189.

*Specifice gravius.* Definitio, *f.* 6. quod sit densius, 9.

*Specifice levius.* Definitio, 5. quod rarius 11. quando fundo vasis incumbens a fluido non attollatur, 100. quando specifice graviori connexum in fluido non ascendat, 118. 122. & seqq. 127.

*Sphæræ* centrum gravitatis, *m.* 178. centrum oscillationis, 460.

*Sphæroidis elliptici* centrum gravitatis, 181. 182. centrum oscillationis, 465.

*Sphæroidis elliptici segmenti* centrum gravitatis, 180.

*Sphæroidis truncati* centrum gravitatis, 185.

*Spiritus vini* quantum rarefiat, *a.* 152.

*Statica.* Definitio, *m.* 1.
*Stateræ* constructio, 774. & seqq.
*Superincessus radens*, *m.* 936.
*volvens*, 937.
*mixtus*, 938.
*Sulphuris* gravitas specifica, *f.* 77.
*Symmetriæ corporis humani* ratio, 227.
*Syrinx* quomodo construatur, *h.* 107. quo impetu aqua expellatur, 108. 109.

T.

*Tempus* motus, Definitio, *m.* 11.
*Tempus descensus* per planum inclinatum, 309. & seqq. per curvam quomodo determinetur, 353. quomodo per convexitatem curvæ, 354.
*Tempora descensus* per plana similiter inclinata, 314. & seqq. per curvas similes & similiter positas, 316.
*Tempora*, quibus vasa deplentur, *h.* 41. & seqq.
*Temporis curva* in motu gravium, *m.* 100.
*Tendentia.* Definitio, 255.
*Tendentia media.* Definitio, 255. quomodo inveniatur, 256.
*Thermometrum.* Definitio, *a.* 196.
*Thermoscopium.* Definitio, 196. constructio, 198. 202. & seqq. in usu notanda, 214.
*Tractio.* Definitio, *m.* 872.
*Trahendo* quomodo machina moveatur, 878. 879. 887.
*Trahendo & deprimendo* simul quomodo machina moveatur, 882.
*Trahendo & protrudendo* simul quomodo machina moveatur, 884.
*Trajectoria* quænam linea dicatur, *m.* 519. quomodo inveniatur ex lege virium centripetarum, 664.
*Trajectoria* quomodo inveniatur si vis centripeta fuerit reciproce in ratione duplicata radii vectoris, 669. quomodo hujus æquatio inveniatur, 670.
*Trianguli* centrum gravitatis, 158.
*Trianguli æquicruri* centrum oscillationis, 436. & seqq. 449. 450.
*Trochlea.* Definitio, *m.* 759. theoria & praxis 826. & seqq.
*Trudendo movere* quid sit, 870.
*Trudendo* quomodo machina moveatur, 870.
*Tubus* in Hydraulica quid dicatur, *h.* 3.
*Tubus Torricellianus.* Definitio, *a.* 87. symptomata, 91. & seqq. 120. & seqq.
*Turres Bononiensis & Pisana inclinatæ* cur a lapsu immunes, *m.* 225.
*Tympani* constructio, quo aqua elevatur, *h.* 120.

U.

*Valvula.* Definitio, *h.* 104. constructio, 106.
*Vas ad hortos irrigandos aptum* quomodo construatur, 163.
*Vasa concordiæ* quomodo construantur, 180.
*Vectis.* Definitio, *m.* 749. usus in explicandis instrumentis & motibus animalium, 751. theoria in hypothesi directionum perpendicularium, 765. in hypothesi obliquarum 771. & seqq. praxis, 768.
*Vectis heterodromus.* Definitio, 755.
*homodromus*, 754.

*Velocitas*. Definitio, *m.* 13. quid proprie sit, 16. qua diagonalis in motu composito describitur, quanta sit, 247. 248.
*Velocitatis in motu composito quantitas* ab angulo directionis dependens, 251.
*Velocitates aquarum per tubos fluentium* quomodo sint inter se, *h.* 11.
*Velocitas media aquæ* in fluminibus, 208.
*Ventus*. Definitio, *a.* 166. celeritas qnomodo determinetur, 167. & seqq. quomodo oriatur, 185. & seqq. ex baroscopio prædicatur, 188. 189.
*Venti vi* quomodo machina agitetur, *m.* 929.
*Venti artificialis* excitatio, *a.* 194. 195. ad flammam conservandam, *h.* 176. & seqq.
*Versando movere* quid sit, *m.* 875.
*Versando* quomodo machina moveatur, 880.
*Vis* requisita ad corpus in situ horizontali sustentandum *m.* 230. ad grave super plano inclinato retinendum, 262. ad motum gravis impediendum, 267. ad solidum submersum attollendum, *f.* 92. ad specifice levius a fluido graviori ad ascensum urgendum, 99. ad solidum in fluido specifice leviori sustentandum, 126. ad vas vacuum in aquam immergendum, 113. ad specifice levius sub fluido graviori detinendum, 114. 120. 121. ad solidum in fluido demergendum, 106. qua solidum in fluido ascendit, 107.
*Vis ulla* num perdatur, 116.
*Vires æquales* quænam sint, *m.* 275.
*Vires æquiponderantium* quomodo æstimandæ, 146. 273. 274.
*Vis centralis* in omni curva quomodo se habeat, *m.* 657. in circulo, 658. & seqq. sectione conica quavis, 660. curva qualibet quomodo inveniatur, 662.
*Vires centrales* in circulo quomodo sese habeant, 623. & seqq.
*Vis centrifuga*. Definitio, *m.* 617.
*Vis centripeta*. Definitio, 619. quando urgeat corpus in linea curva motum versus aliquod punctum, 65.
*Vires conspirantes* quænam sint, *m.* 238.
*Vires fluidi in percussione* quomodo sese habeant, 280. & seqq.
*Vis mortua*. Definitio, 910. quomodo æstimanda, 278.
*Vires mortuæ* quando sint ut velocitates, 280.
*Vis motrix*. Definitio, 9.
*Vires percutientes aquarum* rotas molares agitantium quomodo ad mensuram revocentur, *h.* 286. & seqq.
*Vis resistendi*. Definitio, *m.* 20.
*Vis venti*, qua alas molendini convertit, *h.* 315.
*Vis viva*. Definitio, *m.* 9. 10.
*Vires vivæ* corporum quomodo æstimandæ, 325. & seqq.
*Volumen*. Definitio, *m.* 7.
*Volumen solidi* pondere alteri æqualis quomodo inveniatur, *f.* 80.

*FINIS INDICIS QUINTI.*

VI. IN-

VI.

# INDEX
## RERUM ET VERBORUM
## TOMO III.
## CONTENTORUM.

Notes velim, literam *o.* Opticam, *c.* Catoptricam, *d.* Dioptricam, *p.* Perspectivam, *s.* Sphærica & Trigonometricam sphæricam, *a.* Astronomiam, numeros vero §. §. designare: ubi autem nulli numeri adscribuntur, eosdem referri ad literam præcedentem.


A.

*Adnata* quid sit, *o.* 23. ejus usus, 23.

*Adspectus.* Definitio, *a.* 926. signa, 929. momentum, quo celebratur, quomodo inveniatur, 936.

*Æquatrio centri.* Definitio, *a.* 652. quomodo inveniatur, 687.

*Æquationis pars physica*, *a.* 688. *optica*, ibid.

*Æquationum Tabulæ* quomodo construantur, *a.* 688.

*Æquatio luminis* quid dicatur in theoria Lunæ, *a.* 857.

*Æquatio menstrua lunæ.* Definitio, *a.* 844. quomodo inveniatur, 851.

*Æquatio temporis.* Definitio, *a.* 714. quomodo inveniatur, 715.

*Æquationum temporis Tabulæ* quomodo construantur, *a.* 726.

*Æquator.* Definitio, *a.* 48. proprietates, 49. 50. quomodo ab horizonte dividatur, 83. quomodo a Meridiano, 84.

*Æquatoris & horizontis intersectio* qualis sit, 88.

*Æquatoris arcus* inter horizontem & meridianum interceptus quantus sit, *a.* 89.

*Æquinoctium.* Definitio, *a.* 158. quomodo observetur, 653.

*Aër* num intensitatem luminis minuat, *o.* 90. 92.

*Aëris altitudo* quomodo inveniatur, *a.* 405.

*Algebræ usus* in Catoptrica, *c.* 312. & seqq. in Dioptrica, *d.* 487. & seqq.

*Altitudo apparens* sideris. Definitio, *a.* 73. quomodo observetur, 109.

*Altitudo luminosi.* Definitio, *o.* 145.

*Altitudo meridiana* quomodo observetur,

vetur, *a.* 129. 137. 142. ſolis quomodo computetur, 202.
*Altitudinis meridianæ* menſura, 95.
*Altitudo minor* quantum officiat viſioni remotioris, *o* 255. & ſeqq.
*Altitudo nonageſimi.* Definitio, *a.* 220. cuinam æqualis, 221. quomodo inveniatur, 222.
*Altitudinis nonageſimi Tabulæ* quomodo computentur, *a.* 223.
*Altitudo objectiva* quomodo ſe habeat ad perſpectivam, *p.* 54. quomodo exhibeatur, 55.
*Altitudo oculi.* Definitio, *p.* 21.
*Altitudo poli* quomodo inveniatur, *a.* 147. 154. ejus menſura, 96.
*Altitudo puncti apparentis in tabula* quomodo ſe habeat ad altitudinem oculi, *p.* 32.
*Altitudo ſolis* quomodo ex umbra corporis inveniatur, *o.* 147. quomodo computetur, 215.
*Altitudo ſtellæ.* Definitio, *a.* 73. menſura, 94. quomodo ad datum tempus inveniatur, 300.
*Altitudo vera.* Definitio, *a.* 73.
*Altitudines* quomodo ex umbra reperiantur, *o.* 153. & ſeqq. quomodo ope quadrati geometrici inveſtigentur, 174. & ſeqq. quomodo mediante ſpeculo, *c.* 64 quando appareant inclinatæ, *o.* 326. 327. quando erectæ, 328.
*Altitudines apparentes* quando æquales, *a.* 104.
*Altitudines meridianæ* quomodo obſerventur, *a.* 129. 137. 142.
*Altitudinum differentia* quænam viſu non dignoſcantur, *o.* 250.
*Altitudinum meridianarum* obſervatarum utilitas in Aſtronomia, *a.* 130.
*Amphibleſtroides.* Definitio, *o.* 30.
*Amphora* ſive *Aquarius*, *a.* 160.
*Amplitudo occidua.* Definitio, *a.* 195. menſura, 196. quomodo ope globi inveniatur, 320. 322.
*Amplitudo ortiva.* Definitio, *a.* 195. menſura, 196. fixæ quomodo computetur, 265. quomodo ope globi inveniatur, 322. ſolis quomodo computetur, 206. quomodo ope globi inveniatur, 318.
*Amplitudinum ortivarum Tabulæ* quomodo condantur, 207.
*Anaclaſtica.* Definitio, *d.* 1.
*Anamorphoſis.* Definitio, *p.* 105. quomodo fiat, 106. & ſeqq. in ſuperficie coni convexa, 111. in concava, 113. in pyramide multilatera, 112. pro polyedro, *d.* 277.
*Anamorphoſis mechanica*, *p.* 109. 115.
*Anamorphoſes* quomodo adſpiciendæ, 114.
*Anamorphoſes* quomodo fiant pro ſpeculo cylindrico, *c.* 290. pro conico, 301. pro pyramidali, 304.
*Anamorphoſium* pro ſpeculo cylindrico perficiendarum theoria, 254. & ſeqq.
*Anguloſa* quando appareant rotunda, *o.* 280. 281.
*Anguli* ſpecies in Triangulo rectangulo ſphærico quomodo determinetur, *ſ.* 133.
*Angulus ad nodum orbitæ Cometæ* quomodo inveniatur, *a.* 1138.

*Angulus*

*Angulus ad Solem.* Definitio, *a.* 650. *ad Terram*, 762.
*Angulus circuli latitudinis cum via penumbræ* quomodo inveniatur, *a.* 1067.
*Angulus commutationis.* Definitio, *a.* 760. quomodo inveniatur, 761.
*Angulus eclipticæ cum Meridiano* quoquomodo in dato puncto computetur, 204.
*Anguli eclipticæ cum Meridiano Tabulæ* quomodo condantur, 205.
*Angulus elongationis.* Definitio, *a.* 762. quomodo supputetur, 792.
*Angulus incidentiæ.* Definitio, *c.* 19. *d.* 11.
*Angulus inclinationis.* Definitio, *d.* 12.
*Angulus opticus*, seu *visorius.* Definitio, *o.* 207.
*Angulus orientis* quomodo computetur, *a.* 218.
*Angulus parallacticus.* Definitio, *a.* 370. mensura, 371.
*Angulus reflexionis.* Definitio, *c.* 21. *refractionis.* Definitio, *d.* 13.
*Angulus refractus.* Definitio, *d.* 14. quomodo computetur, 30.
*Angulorum refractorum & refractionis* Tabulæ, *d.* 32.
*Angulus sphæricus.* Definitio, *f.* 5. mensura, 31.
*Angulorum sphæricorum* ratio, 43.
*Animalia* num dentur in Luna, *a.* 488. num in planetis, 526.
*Anni solaris magnitudo* quomodo inveniatur, 669. quanta sit, 671.
*Annulus circa Lunam* in eclipsi solis totali apparens, *a.* 454.
*Annulus saturni*, *a.* 516. 517.
*Annomalia.* Definitio, *a.* 646.
*Annomaliæ motus annuus* quomodo iuveniatur, 706.
*Anomalia coæquata.* Definitio, *a.* 650. quid sit, 651. quomodo inveniatur, 686. 690. 697.
*Anomalia eccentri.* Definitio, *a.* 649. quomodo inveniatur, 690.
*Anomalia media s. simplex.* Definitio, *a.* 647. mensura, 648. quomodo inveniatur, 684.
*Anomalia media secundo coæquatæ respondens* pro luna quomodo inveniatur, 852.
*Anomaliarum Solis Tabulæ* quomodo construantur, 707.
*Anomalia secundo æquata* pro luna quomodo inveniatur, *a.* 854.
*Anomalia vera.* Definitio, *a.* 650.
*Aphelium.* Definitio, 636.
*Aphelii locus* quomodo inveniatur pro planetis superioribus, 734. pro inferioribus, 743. pro Tellure, 674. 810. ubinam sit ad A. 1700. in planetis superioribus, 739. in inferioribus, 745.
*Aphelii motus annuus* quomodo inveniatur in planetis superioribus, 737. in inferioribus, 746. quantus sit in superioribus, 739. in inferioribus, 747.
*Apparentia.* Definitio, *p.* 22.
*Apparentia lineæ*, ibid.
*plani*, ibid.
*solidi*, ibid.
*Apogæum.* Definitio, *a.* 636.
*Apogæi solaris motus annuus* quomodo inveniatur, 702.

*Apogæi solaris motuum Tabulæ* quomodo construantur, *a.* 703.
*Apogæi Lunæ locus* ad A. 1700. 835.
*Arachnoides*, *o.* 34.
*Aranea*, 34.
*Arcitenens*, *a.* 160.
*Arcus* quando instar rectæ appareat, *o.* 275. 276.
*Arcus æquatoris datus quotempore per Meridianum* transeat quomodo computetur, *a.* 211.
*Arcus inter centra.* Definitio, *a.* 945. quomodo inveniatur, 946. & seqq.
*Arcus latitudinarius* in eclipsi terrestri. Definitio, 1069. 1070. quomodo inveniatur, 1083.
*Arcus visionis.* Definitio, *a.* 281. quomodo determinetur, 286. quantus sit, 288.
*Argumentum latitudinis.* Definitio, *a.* 769.
*Argumentum latitudinis menstruæ.* Definitio, 843. quomodo inveniatur, 846.
*Argumentum menstruum latitudinis.* Definitio, 870.
*Aries*, 160.
*Ascensio obliqua.* Definitio, *a.* 191.
*Ascensio obliqua solis* quomodo inveniatur, 208. 209. quomodo ope globi reperiatur, 318.
*Ascensio obliqua stellæ fixæ* quomodo inveniatur, 266. 267. quomodo ope globi inveniatur, 322.
*Ascensionum obliquarum Tabulæ* quomodo condantur, 210.
*Ascensio recta.* Definitio, 190.
*Ascensio recta fixæ* quomodo observetur, 228. quomodo computetur, 260. 261. 264. quod sit mutabilis, 235.
*Ascensio recta puncti dati Eclipticæ* quomodo computetur, *a.* 204.
*Ascensio recta solis* quomodo inveniatur ope globi, 313.
*Ascensionum rectarum singulorum graduum eclipticæ Tabulæ* quomodo condantur, 205.
*Ascensionum rectarum duarum fixarum differentia* quomodo inveniatur, 226. 227.
*Asterismi* quid sint, 245. eorum nomina, ibid.
*Astrognosia* quibus adminiculis juvetur, 248.
*Astronomia.* Definitio, 1.
*Astronomia sphærica.* Definitio, 2.
 *theorica.* Definitio, 3.
*Atmosphæra solis* stabilita, 419. 444. 446. figura ejus, 447.
*Atmosphæra lunaris* stabilita, 486.
*Aurora.* Definitio, *d.* 393.
*Axis incidentiæ.* Definitio, *d.* 9.
 *lentis.* Definitio, 21
 *mundi.* Definitio, 44.
 *opticus.* Definitio, *o.* 340.
 *partis coni umbrosi* quomodo reperiatur, *a.* 1049.
 *refractionis.* Definitio, *d.* 10.
 *sphæræ.* Definitio, *s.* 9.
*Azimuthum.* Definitio, *a.* 194. ejus mensura, 197.
*Azimuthum solis* quomodo inveniatur, 206. quomodo ope globi, 318.
*Azimuthum stellæ* quomodo inveniatur, 302. quomodo ope globi, 320. 322.

B.

*Basis Tabulæ* quid in Perspectiva dicatur, *p.* 12.

*Biceps* quando quis appareat in speculo plano, *c.* 113.

*Biquintilis* quinam adspectus sit, *a.* 931.

C.

*Calor* quomodo ope speculorum concavorum intendatur, *c.* 226. 227.

*Camera obscura* quid sit, *o.* 79. 80. effectus ejus demonstratus, 119. & seqq. quomodo accuratior construatur, *d.* 236.

*Cancer* quid significet in Astronomia, *a.* 160.

*Caper* sive *Capricornus* quid significet in Astronomia, 160.

*Capite ad pedes alterius jacentem* quando quis se videat in speculo plano, *c.* 115.

*Capite truncatum* quando quis se videat in speculo plano, *c.* 113.

*Caput Draconis*, *a.* 819.

*Cardines mundi.* Definitio, *a.* 80.

*Cardo meridiei.* Definitio, ibid.

*Cardo occidentis.* Definitio, 80. quomodo inveniatur, 126.

*Cardo orientis.* Definitio, 80. quomodo inveniatur, 126.

*Cardo orientis & occidentis* quomodo sibi invicem opponantur, 102.

*Cardo septentrionalis.* Definitio, 130.

*Catalogus fixarum* quomodo construatur, 244. a quibusnam constructus, ibid.

*Cathetus incidentiæ.* Definitio, *c.* 16. in quonam sit plano, 39.

*Cathetus obliquationis.* Definitio, *c.* 18.

*Cathetus reflexionis.* Definitio, 17. in quonam sit plano, 39.

*Catini ad polienda vitra commodi* quomodo parentur, *d.* 527. & seqq.

*Catoptrica.* Definitio, *c.* 1. principia, 24. & seqq.

*Catoptrica analytica*, 312. & seqq.

*Cauda Draconis*, *a.* 819.

*Celeritatum apparentium* ratio, *o.* 359 & seqq.

*Centrum mediorum motuum* ubinam sit, *a.* 680.

*Centrum penumbræ* ubi sit, *a.* 1050.

*Choroides*, *o.* 27.

*Ciliare ligamentum*, 29.

*Ciliares processus*, 29.

*Circulorum maximorum sphæræ* proprietates *s.* 15. & seqq. 25. & seqq.

*Circulorum minorum sphæræ* proprietates, 36. & seqq.

*Circulorum sphæræ in planum projectio* quando recta, quando circulus, 152.

*Circuli excursuum.* Definitio, *a.* 187.

*Circuli polares.* Definitio, 184. quales sint circuli, 185.

*Circuli sphæræ mundanæ sive cœlestis.* Definitio, 41. quomodo optime dignoscantur, 189.

*Circulus* quomodo projiciatur, *p.* 47.

*Circulus æquinoctialis.* Definitio, *a.* 53. quod vulgo cum æquatore confundatur, 55.

*Circulus declinationis.* Definitio, 78. proprietas, 79.

*Circulus diurnus.* Definitio, *a.* 56.

— *eccentricus.* Definitio, 641. 642.

*Circulus latitudinis.* Definitio, *a.* 239.
*immotus.* Definitio, 43.
*mobilis.* Definitio, 42.
*polaris antarcticus*, 184.
*arcticus*, ibid.
*Circulus verticalis.* Definitio, 93. quomodo horizontem ſenſibilem interſecet, 93.
*Ciſtula catoptrica*, in qua objecta alia videntur, ſi per aliud foramen inſpexeris, *c.* 119. in qua objecta videntur ciſtula majora, 259.
*Cœli* figura apparens, *a.* 10. motus apparens, 11. & ſeqq.
*Colorum* theoria optica, *o.* 183. & ſeqq.
*Columnarum* ſcenographia, *p.* 71.
*Coluri.* Definitio, *a.* 186.
*Colurus æquinoctiorum*, ibid.
*ſolſtitiorum*, ibid.
*Cometæ.* Definitio, *a.* 1131. qualia ſint corpora, 1168. num mundo coæva corpora, 1158. an ſint ſupra Solem, 1171. an ſupra Lunam, 1151. & ſeqq. num habeant parallaxin ſenſibilem, 1148.
*Cometarum* phænomena, 1167. motus qualis appareat, 1161. caudæ quid ſint, 1173. longitudo & latitudo quomodo inveniatur, 1132. aſcenſio recta & declinatio quomodo inveniatur, 1134. quomodo diſtantia a Sole, 1135. motus proprius, 1136. diſtantia a Terra quænam requiratur, ut datum tempus ſuper horizonte conſumant, 1150.
*Cognitio rerum naturalium* quotuplex, *a.* 627.
*Conclave ſpeculare* quomodo conſtruatur, *c.* 138. 139.
*Coni* ſcenographia, *p.* 64.
*Conjunctio planetarum.* Definitio, *a.* 535. 928. ſignum, 929.
*Conjunctio corporalis*, 935.
*centralis*, 935.
*magna*, 933.
*maxima*, 933.
*platica*, 935.
*Conjunctionis Lunæ cum Sole viſæ* momentum quomodo inveniatur, 999.
*Conjunctiones planetarum inferiorum cum ſole* quomodo obſerventur, 728.
*Conſpicilla.* Definitio, *d.* 478.
*Contigua & continua* quando videantur viſibilia, *o.* 69.
*Conus penumbroſus.* Definitio, *a.* 1040. quid proprie ſit 1044. quousque exporrigatur, 1042.
*Coni penumbroſi* angulus quantus ſit, 1045. 1048. ſimilitudo cum cono umbroſo, 1047.
*Conus umbroſus* quem ſitum habeat reſpectu penumbroſi, 1043.
*Coni umbroſi Lunæ* axis quomodo inveniatur, 1025.
*Coni umbroſi Terræ* longitudo quomodo inveniatur, 939.
*Coni umbroſi Terræ & Lunæ* quales ſint eodem tempore, 1024.
*Cornea tunica.* Definitio, *o.* 18. proprietas, 19 cur ſit tenax, 22.
*Corpus* quando inſtar ſuperficiei appareat, 274.
*Corpus diaphanum.* Definitio, 11.
*illuminatum*, 10.
*lucidum*, 9.
*luminoſum*, ibid.

*Corpus*

*Corpus opacum.* Definitio, *o.* 12. quando tegat oculo visibilia, 411. & seqq.
*Corpus pellucidum.* Definitio, 11. *perspicuum*, ibid.
*Cosecantes* quando ad cotangentes prope accedant, *d.* 51. quando sint ut cotangentes quam proxime, 52.
*Craticula ectypi* in anamorphosibus, *p.* 106. *c.* 292.
*Craticula prototypi* in anamorphosibus, *p.* 106. *c.* 292.
*Crepusculum.* Definitio, *a.* 393. causa, 395. quando per integram noctem duret, 400. quo tempore hoc fiat quomodo inveniatur, 401.
*Crepusculum matutinum.* Definitio, *a.* 393. quando incipiat, 394. initium quomodo inveniatur calculo, 402. quomodo ope globi, 404.
*Crepuscum solis secundum* quomodo observatum, *a.* 440. undenam sit, 443. 444.
*Cubi* ex angulo visi scenographia, *p.* 58.
*Culminare* quando stella dicatur, *a.* 133.
*Culminatio stellæ.* Definitio, 133. quomodo observetur, 134. quomodo computetur, 269.
*Curtatio.* Definitio, 772.
*Curtationum Tabulæ* quomodo construantur, 790.
*Curvarum versus eandem partem cavarum* quænam maxima, *f.* 48.
*Curvilineæ figuræ* projectio, *p.* 48.
*Cylindri* scenographia, 60.

D.

*Decilis*, *a.* 931.
*Declinatio.* Definitio, 75. qualis sit, 76. 77.
*Declinatio eclipticæ* quomodo observetur, *a.* 183. quomodo computetur, 198.
*Declinatio maxima eclipticæ* quomodo observetur, 163. 168. quanta observata fuerit, 165. an sit mutabilis, 166. 167.
*Declinatio Solis* quando sensibiliter non mutetur, 117 118. quomodo ope globi inveniatur, 313.
*Declinationum Solis circa Solstitium differentiæ* quomodo ope gnomonis prææalti determinentur, 664.
*Declinationum Solis a maxima paulo ante & post solstitium differentiæ* quomodo se habeant, 661. & seqq.
*Declinatio stellæ fixæ* quomodo computetur, *a.* 260. 263. quomodo ope globi inveniatur, 311. an sit mutabilis, 233. 234. num in eadem rotatione mutetur, 115.
*Delineatio accurata objecti* cujuscunque quomodo fieri possit, *p.* 3.
*Descensio obliqua.* Definitio, *a.* 192. quomodo computetur, 207. quomodo inveniatur ope globi, 320. 322.
*Diameter apparens Lunæ* quomodo mutetur, 555. in sole insensibilis, 1019.
*Diameter apparens Planetarum* quomodo observetur, *a.* 548. quantæ singulorum observatæ fuerint, 557.
*Diameter apparens Solis* quomodo obser-

obſervetur, 547. 548. quanta obſervata, 553.
*Diametri apparentis Solis, Lunæ & planetarum magnitudo* variabilis, 549.
*Diameter penumbræ.* Definitio, *a.* 1050.
*Diameter ſphæræ.* Definitio, *ſ.* 9.
*Diameter vera ſideris* quomodo inveniatur, *a.* 912. ejus ratio ad diametrum Solis quomodo inveniatur, 909. quanta ſit, 911.
*Diameter vera planetarum* in ſemidiametris Terræ quomodo inveniatur, 919. quanta ſit uniuſcujusque, 920. & ſeqq.
*Diameter umbræ Lunæ*, 1029.
*Diei longitudo* quomodo computetur, *a.* 213. quomodo ope globi inveniatur, 321.
*Dies ſolares* quod ſint inæquales, 709.
*Dierum ſolarium æquatio* quomodo inveniatur, 715. æqualium & inæqualium differentia, 711.
*Differentia aſcenſionalis.* Definitio, *a.* 193. quomodo computetur, 206. 265.
*Differentiarum aſcenſionalium Tabulæ* quomodo condantur. 207.
*Differentia deſcenſionalis.* Definitio, 193.
*Differentiarum horariarum Meridianorum* Tabulæ quomodo conſtruantur, 980.
*Digiti ecliptici.* Definitio, 950. quomodo inveniantur in Lunæ eclipſi, 951.
*Digiti ecliptici ſolis* quomodo inveniantur, *a.* 1001. quomodo in eclipſi terreſtri inveniantur, 1097.
*Dioptra objectiva*, *a.* 106.
*ocularis*, 106.
*Dioptræ teleſcopicæ* cur adhibeantur, 108.
*Dioptrarum teleſcopicarum* poſitio quomodo examinetur, 131.
*Dioptrica.* Definitio, *d.* 1.
*Dioptrica analytica*, 487. & ſeqq.
*Directio planetæ.* Definitio, *a.* 531.
*Diſcus Terræ.* Definitio, 1013.
*Disjuncta* quando contigua videantur, *o.* 308. quando continua, 309. 310.
*Diſtantia* duorum punctorum in ſuperficie ſphæræ, *ſ.* 54.
*Diſtantiarum differentiæ* quænam viſu non dignoſcantur, *o.* 250.
*Diſtantia Cometæ a Terra* quomodo inveniatur, *a.* 1147.
*Diſtantia curtata.* Definitio, 771. quomodo inveniatur, 789.
*Diſtantia Lunæ a Terra* quomodo variet, 556.
*Diſtantia planetæ a Sole* quomodo inveniatur, 812.
*Diſtantia planetæ a Terra* quomodo ſupputetur, 792.
*Diſtatia Solis vera a Terra* quomodo inveniatur, 894. & ſeqq.
*Diſtantia Solis maxima & minima a Terra* ubinam ſit, 554.
*Diſtantia Solis a Nodo & Apogæo lunari.* Definitio, 841.
*Diſtantia ſtellarum* quomodo obſervetur, 225.
*Dodecatemorion.* Definitio, 188.

*Eccen-*

E.

*Eccentricitas*. Definitio, *a.* 638. 639.
*Eccentricitas in Ellipsi*, 679.
*Eccentricitas Lunæ* constans, 835.
*Eccentricitas Lunæ menstrua* quomodo inveniatur, 847.
*Eccentricitas orbitæ ellipticæ Telluris* quomodo inveniatur, 810.
*Eccentricitas planetarum* quanta, 750.
*Eccentricitas planetarum superiorum* quomodo inveniatur in orbita circulari, 734. quomodo in elliptica, 813.
*Eccentricitas planetarum inferiorum* quomodo inveniatur, 749.
*Eccentricitas Solis* quomodo inveniatur, 675. 678. quanta sit, 682.
*Eclipsis Lunæ*. Definitio, *a.* 937. quomodo appareat, 458. quænam ejus causa, 459. quid sit, 461. cur ubivis ejusdem magnitudinis, 462. ejus magnitudo, 951. initium. medium, finis & duratio quomodo inveniatur, 971. typus quomodo describatur, 976. quomodo supputetur. 974. observetur, 977. 978.
*Eclipsis Lunæ partialis*. Definitio, 937. quando sit, 948.
*Eclipsis Lunæ totalis*. Definitio, 937. phænomena, 463.
*Eclipsis Lunæ totalis cum mora*. Definitio, 937. quando sit 948.
*Eclipsis Lunæ totalis sine mora*. Definitio, 937. quando sit, 948.
*Eclipsium lunarium termini necessarii*. Definitio, 943. quomodo reperiantur, 944.



*Eclipsium lunarium termini possibiles* Definitio, *a.* 943. quomodo reperiantur, 944.
*Eclipsis satellitum Jovis*, *a.* 502. 505. 510.
*Eclipsis Solis*. Definitio, 982. quando accidat, 984. 985. quomodo appareat, 448. quænam ejus causa 449. & seqq. cur non in omnibus locis eodem momento accidat, 1081. quomodo supputetur, 1008. observetur, 1010, *o.* 303. initium & finis, *a.* 1004. 1101. duratio quomodo inveniatur, 1005. termini quomodo determinentur, 995. 996. typus quomodo describatur, 1007. ubi totalis videatur, 1075. 1079. ubi partialis, 1078. 1080. ubi nulla, 1077.
*Eclipsis solaris totalis* phænomena, 454.
*Eclipsis Solis Christo patiente* num fuerit præternaturalis, 986.
*Eclipsis Terræ*. Definitio, *a.* 1011. quando detur, 1072. 1073. 1074. quomodo appareat selenitis, 1037. termini quomodo reperiantur, 1082. initium & finis quomodo inveniatur, 1085.
*Ecliptica*. Definitio, 157. divisio, 160. qualis sphæræ circulus, 171. ejus situs, 172. & seqq.
*Eclipticæ declinatio maxima* quomodo observetur, 163. quanta observata fuerit, 165.
*Ecliptica in disco Terræ*. Definitio, *a.* 1059. situs in eodem, 1060.
*Elevatio poli*. Definitio, 99. quomodo inveniatur, 200. quomodo observe-

servetur, 154. super disco Terræ cuinam æqualis, 1086.
*Elevatio æquatoris.* Definitio, *a.* 99. mensura, 100. quomodo observetur, 154. quomodo inveniatur, 200.
*Ellipsis* quando instar circuli appareat, *o.* 282. quando in parabolam degeneret, *a.* 1163.
*Ellipseos* descriptio per data tria puncta, 809. proprietates quædam, 803. & seqq.
*Engyscopium.* Definitio, *d.* 402.
*Epactæ.* Definitio, *a.* 963. quomodo inveniantur, 965.
*Epocharum Tabulæ* quomodo construantur, 719. 754.
*Epochæ motus medii & Apogæi Solis* quomodo constituantur, 718.

F.

*Faciem & tergum* quomodo simul spectemus in speculo plano, *c.* 109. 128. 129.
*Faculæ solares* num dentur, *a.* 429.
*Fasciæ in Jove* observatæ, 499.
*in Saturno* observatæ, ibid.
*Fenestrarum* scenographia, *p.* 75.
*Fenestrarum apertarum* scenographia, 79.
*Flamma* e longinquo visa cur major appareat, quam in vicinia, *o.* 265. 266.
*Flamma candelæ* quando appareat rotunda, *o.* 307.
*Figuræ apparentia* per quænam detur, *p.* 31.
*Figuræ visio*, *o.* 272. & seqq.
*Figuræ curvilineæ* projectio quomodo fiat, *p.* 35.
*Figuræ mixtilineæ* projectio, 36.
*rectilineæ* projectio, 34.
*Figura rotunda oblonga* seu ovalis quando instar circuli appareat, *o.* 282.
*Figura vera polygoni regularis & circuli* quando videatur, *o.* 286. quando non, 287.
*Focus.* Definitio, *d.* 22. quomodo determinetur in lentibus convexis, 186. 217. 221. quomodo in meniscis, 298. quomodo in superficie sphærica convexa, 89. 90.
*Focus virtualis.* Definitio, 23. quomodo determinetur in lente concava, 282. 290. quomodo in meniscis, 312.
*Fixæ* (stellæ) quomodo in asterismos distinguantur, *a.* 246. quænam semper appareant, quæ semper lateant, quomodo inveniatur, 277. quo lumine fulgeant, 1119. quid sint, 1120. quantæ sint, 1121. an habeant planetas circa se, 1122 1123. num habeant parallaxin sensibilem, 384. num sint terra majores, 1109. num ultra Saturnum a Tellure distent, 1110. num inæqualiter a Terra distent, 1114. cur aliæ aliis minores appareant, 1115. num mutentur, 1129.
*Fixæ in plures divisæ* quænam subinde observentur, 543.
*Fixæ per vices apparentes ac disparentes*, 1124. & seqq.
*Fixæ primæ magnitudinis* quantæ per telescopium appareant, 1111.
*Fixæ temporariæ*, 1127.

*Fixarum*

*Fixarum aberrationes annuæ*, 605. num parallaxis earum annua recte inde colligatur, 606. quanta hæc esse debeat, 607.
*Fixarum distantia a terra* quomodo inveniatur, 1116. quanta æstimetur, 1117.
*Fixarum mora supra horizontem* quomodo inveniatur, *a.* 268.
*Fixarum magnitudines apparentes*, 249.
*Fixarum multitudo* evicta, 1113.
*Fixarum occultationes a planetis* factæ, 542.
*Fixarum a Luna occultandarum figura* ovalis observata, 475. causa quænam sit, 476.
*Fulcrum telescopii longioris* quomodo construatur, *d.* 382.
*Fulguratio in medio disci Lunæ* eclipsi solis totali observata, 454.

G.

*Gemini*, *a.* 160.
*Globus cælestis*. Definitio, *a.* 303. constructio, 305. 309. usus, 311. & seqq. quomodo ad cœli situm componatur, 316.
*Globus descendens* quomodo repræsentari possit tanquam ascendens, *c.* 73.
*Gnomonis astronomici* constructio & usus, *a.* 137. & seqq.
*Gravitas corporis* num in omnibus Terræ locis eadem, 569. 570.

H.

*Helioscopium*. Definitio, *d.* 465. constructio, 467.
*Hemisphærium* quomodo totum ab oculo conspici possit, *o.* 427.
*Hemisphærium australe*, sive *meridionale* mundi, *a.* 52.
*Hemisphærium boreale* sive *septentrionale* mundi, 51.
*Hemisphærium inferius* cœli, 65.
*superius* cœli, 64.
*Homines* num dentur in Luna, 488. num in planetis ceteris, 526.
*Hora diei* quomodo ex solis altitudine eruatur, *a.* 216.
*Horizon*. Definitio, 61. quomodo a Meridiano secetur, 84. quomodo a circulo verticali, 85.
*Horizon apparens*, sive *sensibilis*. Definitio, 66. proprietas, 67. poli ejus ubinam sint, 90.
*Horizon occiduus*. Definitio, 69.
*ortivus*. Definitio, 68.
*Horizon rationalis*, sive *verus*. Definitio, 61. proprietates, 62. 63. situs, 86. poli ubinam sint, 60.
*Horologii motus* quomodo rectificetur, vel probetur, 297.
*Horopter*. Definitio, *o.* 341.
*Humor aqueus*. Definitio, 33.
*Humor chrystallinus*. Definitio, 34. figura, 35. 36. usus, 61. & seqq. effectus, 75.
*Humor vitreus*. Definitio, 37
*Hypothesis Latitudinis Lunæ*, *a.* 873.
*Hypothesis Lunæ*, 839. 84.

I.

*Januarum in pariete* scenographia, *p.* 73.
*Januarum apertarum* scenographia, 77.
*Ichnographia geometrica*. Definitio, *p.* 23.
*Ichnographia perspectiva*, sive *projecta*.

Definitio, *p.* 25. quomodo fiat, 33. & seqq.

*Imago* visibilis qualis in oculo delineetur, *o.* 62. & seqq. quando clarior, 77. qualis sit in presbytæ oculo, 383. qualis in oculo myopis, 386.

*Imaginis locus* in speculo concavo, *c.* 232. & seqq. 253. & seqq. in speculo convexo, 166. 167. 168. in planis, 51. & seqq.

*Imago* qualis sit in speculo concavo, 252. & seqq. in convexo, 183. in cylindrico, 280. & seqq. in cylindricis cavis, 298. & seqq. cur videatur in libero aëre, 300. in speculis planis, 60. quanta sit in speculo concavo, 240. & seqq. in convexo, 155. 175. 178. 179. 180. qualis appareat per vitrum planum, *d.* 83. qualis post lentem convexam, *o.* 387. & seqq. *d.* 224. & seqq.

*Imago inversa post lentem convexam* quomodo sistatur erecta, *c.* 231. 233. 334.

*Imago lucidi* cur multiplex videatur in speculo plano, *c.* 88.

*Imago objecti* quomodo multiplicetur in speculis planis, *c.* 93. 100. 104. 106. 110. 122. 126. 127. quando verticalis appareat horizontalis & contra, 70. 71. quando infra horizontem situ inverso appareat, 57. 58. quando post speculum longius distare videtur, quam ante ipsum abest, 134. & seqq.

*Imago prototypo similis* quomodo mechanice delineetur, *p.* 110.

*Imago deformis* quomodo formosa restituatur per speculum cylindricum, *c.* 290 conicum, 301. pyramidale, 304.

*Imagines monstrosæ* quomodo in speculis planis exhibeantur, 112. 113. 114. 116.

*Inæqualia* quando appareant æqualia, *o.* 252. & seqq.

*Inæqualitas prima.* Definitio, 773.

*Inæqualitas secunda*, sc. motus planetarum, 775.

*Inæqualitas Lunæ prima* seu *soluta*, 823.

*Inæqualitas Lunæ altera* seu *menstrua*, 824. phænomena, 838.

*Inæqualitatis tertiæ* in motu Lunæ phænomena, 855.

*Inclinatio.* Definitio, *a.* 767. maxima quomodo observetur, 783. quanta sit in singulis planetis, 784.

*Inclinationum Tabulæ* quomodo construantur, 785.

*Inclinatio incidentis radii.* Definitio, *c.* 22.

*Inclinatio limitis menstrui.* Definitio, *a.* 872. quomodo inveniatur, 876.

*Inclinatio planorum* qualis, *s.* 97.

*Inclinatio radii reflexi.* Definitio, *c.* 23.

*Inclinatio viæ penumbræ.* Definitio, *a.* 1065. quomodo inveniatur, 1066.

*Incolæ planetarum* num dentur, 527.

*Insulæ* in Luna, 480.

*Intensitas luminis.* Definitio, *o.* 81. quando non mutetur, 86. quomodo se habeat, 85.

*Inter-*

*Intervallum planetæ*. Definitio, *a*.640. quomodo inveniatur, 685.
*Jovicolæ* quantæ magnitudinis, 527.
*Iris oculi*, *o*. 25.
*Jupiter*. Definitio, 3. quale sit corpus, 505. 524. similitudo cum Tellure, 525. motus vertiginis, 496. figura ovalis in occultatione per lunam facta, 475. 476.
*Jupiter Jovialis*, 501.

L.

*Lateris species* in triangulo rectangulo sphærico quomodo determinetur, *s*. 133.
*Laterna magica*. Definitio, *d*. 464. constructio, 470. quomodo in microscopium convertatur, 476. 477.
*Latitudo*. Definitio, *a*. 768.
*Latitudo Lunæ simplex*. Definitio, *a*. 865.
*Latitudo Lunæ vera*. Definitio, *o*. 867. quomodo inveniatur, 880.
*Latitudo Lunæ visa*. Definitio, 987. quomodo inveniatur, 988. quomodo computetur in momento synodi visæ, 1000. quomodo inveniatur initio & fine eclipsis solis, 1006.
*Latitudo menstrua*. Definitio, 869. quomodo inveniatur, 878.
*Latitudo planetæ* quomodo observetur, 559. quomodo inveniatur, 795. quomodo supputetur, 814.
*Latitudo stellæ*. Definitio, 236. mensura, 237. 238. quomodo inveniatur, 243. 261. quomodo inveniatur ope globi, 312. an sit mutabilis, 251.
*Latitudo umbræ*. Definitio, 1053.
*Latitudo umbræ apparens*. Definitio, 1055. quomodo inveniatur, 1056.
*Leo*, 160.
*Lens*. Definitio, *d*. 15.
*Lentes causticæ*. Vide vitra caustica.
*Lentes causticæ* ex glacie confectæ, 201.
*Lentes convexæ* quomodo refringant lumen, 266. & seqq.
*Lentes hyperbolicæ* num sphæricis præstent, *d*. 325.
*Lentis convexæ* effectus, *o*. 73. 75.
*Lentis objectivæ* apertura in telescopio quomodo determinetur, *d*. 394. ejus necessitas, 395. 398.
*Lentium plano-convexarum* theoria, 166. & seqq.
*Lentium utrinque convexarum* theoria, 184. & seqq.
*Lentium concavarum* theoria, 279. & seqq.
*Libra*, *a*. 160.
*Limites* in orbita Lunæ, 872.
*Lineæ apparentia* per quænam detur, *p*. 31.
*Linea absidum*. Definitio, *a*. 636.
*Lineæ apsidum positio* quomodo determinetur, 674. 754. 743. quomodo in orbita elliptica planetarum superiorum inveniatur, 813.
*Linea brevissima* quænam sit in superficie sphæræ, *s*. 53.
*Linea distantiæ*. Definitio, *p*. 15. quænam sit, 16.
*Linea fiduciæ* quænam dicatur, *a*. 107.
*Linea fundamentalis*. Definitio, *p*. 11.
*Linea horizontalis* in Perspectiva. Definitio, 17. qualis sit, 18.

*Linea incidens*. Definitio, *c*. 14.
*Linea incidentiæ*. Definitio, *d* 4.
*Linea meridiana*. Definitio, *a*. 81. situs, 82. quomodo inveniatur, 120. usus, 125. 128.
*Linea objectiva*. Definitio, *p*. 27.
*Lineæ parallelæ* quando convergentes appareant, *o*. 227. & seqq.
*Linea recta* quando instar puncti appareat, *o*. 722.
*Lineæ rectæ apparentia* qualis, *p*. 28.
*Linea reflexionis*. Definitio, *c*. 15.
*Linea refractionis*. Definitio, *d*. 5.
*Linea terræ*. Definitio, *p*. 11.
*Loca optica*. Definitio, *o*. 334. theoria, 335. & seqq.
*Loci* visio, 308. & seqq.
*Loci dati distantia a centro penumbræ* quomodo inveniatur, *a*. 1099.
*Locus ad eclipticam reductus*. Definitio, 757. quomodo inveniatur,
*Locus centricus* planetæ, 755.
*Locus eccentricus in ecliptica*. Definitio, 757.
*Locus eccentricus in orbita*. Definitio, 755. quomodo supputetur, *756*.
*Locus geocentricus*. Definitio, 758.
*Locus heliocentricus*. Definitio, 757. quomodo ex geocentrico inveniatur, 812.
*Locus imaginis in speculo* ubinam sit, *c*. 41.
*Locus imaginis* in speculo concavo, convexo, 151. 152. 154. & seqq. plano,
*Locus Lunæ fictus*. Definitio, *a*. 862. *prope verus*, ibid.
*Locus verus*, ibid. quomodo supputetur, 863.
*Locus medius solis* quomodo inveniatur, 704.
*Locus opticus*. Definitio, 364.
*Locus opticus apparens*. Definitio, 365.
*Locus opticus verus*. Definitio, ibid.
*Locus physicus sideris*. Definitio, *a*. 363.
*Locus Solis in ecliptica* quomodo observetur, 203.
*Locus Solis verus* quomodo supputetur, 720. & seqq.
*Locus Terræ, ubi sol totus eclipsatus oritur vel occidit*, quomodo determinetur, 1093.
*Locus Terræ, ad quem pervenit centrum penumbræ* quomodo determinetur, 1094.
*Loca Terræ, quibus sol oritur & occidit, in principio ac fine eclipsis terrestris* quomodo determinetur, 1092.
*Longitudines* quænam visus comprehendere possit, *o*. 248. & seqq.
*Longitudo Lunæ visa*. Definitio, *a*. *989*. quomodo inveniatur, *990*. *997*.
*Longitudo planetæ* quomodo observetur, 559.
*Longitudo planetæ vera* quomodo supputetur, 814.
*Longitudo stellæ*. Definitio, *a*. 241. quomodo inveniatur 243. 263. quomodo inveniatur ope globi, 312. quomodo ad datum annum computetur, 259.
*Logitudo stellarum fixarum* quomodo mutetur, 251. quando uno gradu augeatur, 258.
*Lucerna lumen valde intensum projiciens*

*ciens* quomodo construatur, *d.* 208.

*Lumen.* Definitio, *o.* 4. 5. quomodo propagetur, 45. 46. num unum officiat propagationi alterius, 99. & seqq. quomodo intendatur per lentes convexas, *d.* 203. & seqq. quomodo per specula concava, *c.* 224. & seqq. quomodo debilitetur per specula covexa, 191. & seqq. 195. per concava, 228. 229. quomodo in colores mutetur, *o.* 183. & seqq. quomodo reflectatur a speculis planis, 55. convexis, 144. & seqq. concavis, 208. & seqq. cylindricis, 277. 278. cylindricis concavis, 294. & seqq. ellipticis, 310. 311. quomodo refringatur in superficiebus planis, *d.* 49. & seqq. in lentibus convexis, 166. & seqq. utrinque convexis, 184. & seqq. concavis, 279. & seqq. sphæris pellucidis, 178. & seqq. lentibus plano-convexis, 166. & seqq. superficiebus sphæricis, 87. & seqq.

*Luminis a duobus luminosis propagati* ratio, *o.* 104. & seqq.

*Lumen propagatum per radios convergentes* quomodo crescat, 89.

*Lumen propagatum per radios divergentes* quomodo decrescat, 87. 88.

*Lumen album* quod sit mixtum, *o.* 186.

*Lumen coloratum solare* immutabile, 201. & seqq.

*Lumen diurnum* unde, *a.* 407. 408.

*Lumen Lunæ* undenam sit, 462.

*Lumen Solis* quomodo reflectatur a speculis parabolicis *c.* 306. & seqq. cur non intendatur per reflexionem a speculis planis, 66. quomodo refringatur in lentibus plano-convexis & convexo-convexis, *d.* 197. quomodo in colores mutetur, 271. 272. quomodo per lentem concavam debilitetur, 228.

*Lumen solis per foramen angulosum transiens* quando figuram circuli assumat, 296. & seqq.

*Luminis solaris per foramen radiantis figura* qualis sit, *o.* 290. & seqq.

*Luminis solaris radii heterogenei* quomodo a se invicem separentur, 200.

*Lumen zodiacale* a quibusnam observatum, *a.* 436. 440. quid sit, 437. & seqq. 441. & seqq.

*Luna* quale sit corpus, *a.* 453. 469. 479. unde lumen habeat, 460. cur sit luminare magnum, 457. ex qua materia constet, 484. an semper æque distincte videatur, 473. an terræ semper eandem faciem obvertat, 1103. quod Tellurі propior quam sol, 452. quando in umbram terræ incidat, 940.

*Lunæ ætas media* quomodo inveniatur, 959. 966.

*Lunæ diameter apparens* quomodo observetur, 548. quanta sit, 549.

*Lunæ distantia a terra* quomodo inveniatur, 888. 889. quanta sit, 893.

*Lunæ elipsatæ* colores, 463. eorum causa, 464. causa diversitatis, 465. 466.

*Lunæ illumminatio* quomodo fiat, 455.

455. 456. ejus causa, 460. a Terra facta, 914.
*Lunæ magnitudo*, 915.
*Lunæ montes, valles & maria*, 479.
*Luæ motus proprius* quomodo innotuerit, 23. 24.
*Lunæ orientis & occidentis* figura ovalis seu elliptica, 475. ejus causa, 476.
*Lunæ similitudo* cum Tellure, 487.
*Lunatio*. Definitio, *a*. 817.
*Lunæ Joviales*, 501.
*Lunula*. Definitio, *d*. 20.
*Lux*. Definitio, *o*. 4. 5.
*Lux clarior* quibusnam conducat ad videndum, 396.
*Lux debilior* quibusnam conducat ad videndum, 395.
*Lux nimia* quod visui officiat, 390.

M.

*Machina anamorphotica* cylindrica, *c*. 293. conica, 302.
*Machina catoptrica*, in qua objecti imago multiplicatur, 137. in qua una multiplicatur & deformatur, 118.
*Machina catoptrico-dioptrica*. Definitio, *d*. 458.
*Machina hydromantica*, in qua imago spectatori pro arbitrio oculis subduci & adduci potest, *d*. 86.
*Machina politoria* quomodo construatur, *c*. 48. *d*. 539.
*Maculæ lunæ* quales observentur, *a*. 468.
*Maculæ lunæ novæ*, 468. quales sint, 472.
*Macularum solis* phænomena, 411. theoria, 412. & seqq. motus, 422. undenam prodeant, 416. quid sint, 417. quomodo observentur, 427.
*Maculæ veneris*, 494.
*Magis myops* quinam dicatur, *d*. 480. qualia ei conveniant perspicilla, 482.
*Magis presbyta* quinam dicatur, 520. qualia ei conveniant perspicilla, 522. quomodo determinentur, 523.
*Magnitudo* quando in vicinia minor appareat, quam in distantia remotiori, *o*. 254.
*Magnitudinis* visio, 209. & seqq.
*Magnitudo apparens*. Definitio, 208.
*Magnitudinum apparentium* theoria, 212. & seqq.
*Manus sine corpore* quando appareant in speculo plano, *c*. 113.
*Maria* in Luna num dentur, *a*. 479.
*Mars*. Definitio, 34. quale corpus, 524. similitudo cum Tellure, 525. phases, 491. motus vertiginis, 496. distantia a Terra, 899.
*Mediatio cœli*. Definitio, *a*. 272. quomodo inveniatur, 273. quomodo ope globi inveniatur, 315.
*Medius motus solis* quomodo inveniatur, 672.
*Mediorum motuum solis Tabulæ* quomodo construantur, 673.
*Mediorum motuum planetarum superiorum Tabulæ* quomodo construantur, 733
*Mediorum motuum planetarum inferiorum Tabulæ* quomodo construantur, 753.
*Mediorum motuum Lunæ Tabulæ* quomodo construantur, 827.

*Meniscus.*

*Meniscus*. Definitio, *d*. 20. theoria, 295. & seqq. quando æquipolleat lenti utrinque æqualiter convexæ, 301. 302. quando plano-convexæ, 304. 305. quando sphæræ, 306. 307. quando utrinque concavæ, 315. 316. quando plano-concavæ, 317. 318. quænam sit lens caustica, 324.
*Menisci ellipticæ & hyperbolicæ* num præstent sphæricis, 325.
*Menisci impropriæ* quænam dicantur, 322.
*Menisci propriæ* quænam dicantur, 322.
*Mensis anomalisticus*. Definitio, *a*. 818 quantitas quomodo inveniatur, 832.
*Mensis draconticus*. Definitio, 819. quantitas quomodo inveniatur, 831.
*Mensis periodicus*. Definitio, 816. quantitas, 835. quomodo ea inveniatur, 825.
*Mensis synodicus*. Definitio, 817. quantitas, 835. quomodo ea inveniatur, 825.
*Mercurius*. Definitio, 36. phases, 491. 538. in sole observatus, 492. num circa axem gyretur, 498.
*Mercurii digressiones maximæ a sole* quomodo observentur, *a*. 740.
*Mercurius Jovialis*, 507.
*Meridianus*. Definitio, 72.
*Meridianorum differentia horaria* quomodo inveniatur, 979.
*Meridianus universalis*. Definitio, 1087. positio super disco Terræ quomodo inveniatur, 1089.
*Meridiei momentum* quomodo observetur, 124.
*Micrometri* constructio & usus, 544. & seqq.
*Microscopium*. Definitio, *d*. 402. quomodo optima parentur, 456.
*Microscopii aquei* constructio, 436.
*Microscopium compositum*. Definitio, 405. constructio, 439.
*Microscopii reflectentis* constructio, 452. inventor, 453.
*Microscopium simplex*. Definitio, 404. theoria, 407. & seqq. constructio, 421.
*Microscopia simplicia* ex sphærulis constantia quomodo fiant, 431. theoria, 423. & seqq. constructio, 434.
*Minus presbyta* quinam dicatur, 520. qualia ei conveniant perspicilla, 522. quomodo determinentur, 523.
*Mobile* quando quiescere videatur, *o*. 361. & seqq. 374. quando retrogradi, 368.
*Modulus* pro speculis sphæricis concavis fundendis quomodo paretur, *c*, 199.
*Monoculus* quando quis appareat in speculo plano, *c*. 113.
*Montes in Luna* num dentur, *a*. 479.
*Montium lunarium* altitudo quomodo inveniatur, 917. nomina, 918. umbræ, 483.
*Montes in Venere observati*, 493.
*Motus* visio, *o*. 354. & seqq.
*Motus anomaliæ* quid sit, *a*. 820.
*Motus Aphelii Tabulæ* pro planetis superioribus quomodo construantur,

antur, 737. quomodo pro inferioribus, 746.
*Motus Apogæi lunaris* diurnus, 835.
*Motus communis* sive *diurnus*, 21.
*Motus horarius Lunæ & Solis verus* quomodo inveniatur, 968.
*Motuum hororariorum Lunæ & Solis verorum Tabulæ* quomodo construantur, 969.
*Motus horarius* in eclipsi terrestri. Definitio, 1068.
*Motus horarius Lunæ a Sole visus.* Definitio, 994.
*Motus imaginis* in speculo plano, *c.* 95. & seqq.
*Motus latitudinis Lunæ* diurnus, *a.* 836.
*Motuum latitudinis Tabulæ* pro Luna quomodo construantur, 832.
*Motus Librationis.* Definitio, 1104. caussa, 1106.
*Motus Lunæ ab Apogæo* diurnus, 836.
*Motus Lunæ a Sole* quid sit, 820. quomodo inveniatur 828.
*Motus Lunæ a Sole visus* quomodo inveniatur, 998.
*Motus Lunæ in latitudinem* quid sit, 820.
*Motus lunaris* phænomena, 821. 822.
*Motus medius.* Definitio, *a.* 643. quidnam ad eum determinandum requiratur, 644.
*Motuum mediorum Tabulæ* quomodo construantur, 673. 827.
*Motus medius Lunæ* diurnus, *a.* 835.
*Motuum Nodorum Tabulæ* quomodo construantur, 779.
*Motus Nodi Lunæ* diurnus, 835.
*Motus periodicus in longitudinem* quid sit, *a.* 820.
*Motus planetarum* phænomena observata, 562. & seqq. demonstrata, 571. & seqq.
*Motus primus.* Definitio, *a.* 21.
*primi mobilis*, 21.
*Motus proprius*, sive *secundus.* Definitio, 30.
*Motus proprius fixarum* qualis sit, 252. quantitas annua quomodo inveniatur, 255.
*Motus vertiginis* Lunæ, 1107. Solis, 422. 423. planetarum, 496. & seqq.
*Motus verus.* Definitio, 645.
*Mundus* num in Astronomia pro sphæra cava haberi possit, cujus superficiei stellæ affixæ, 18.
*Myops.* Definitio, *o.* 384. quinam sit, 401. 402. cur in luce minore legere possit quam presbyta, 408. cur legat scripturam minutam, 426. cur remota in speculo convexo distinctius videat, quam directe, *c.* 193. qualia perspicilla ei conveniant, *d.* 479. quomodo hæc determinentur, 483. 485. quomodo se ligantur, 525.

N.

*Noctis longitudo* quomodo inveniatur, *a.* 213. quomodo ope globi inveniatur, 321.
*Nodus.* Definitio, 765.
*Nodus australis*, 765.
*ascendens*, ibid.
*borealis*, ibid.
*descendens*, ibid.
*Nodi planetæ* quomodo observentur, *a.* 777.

*Nodorum planetarum* locus ad A. 1700. *a.* 780. motus quomodo inveniatur, 778.
*Nodus orbitæ Cometæ* quomodo inveniatur, 1138.
*Nodi Lunæ* quomodo moveantur, 830. eorum locus quomodo inveniatur, 829.
*Nonagesimus.* Definitio, 220.
*Novilunium medium* quomodo supputetur, 959. 967. ejus epocha quomodo inveniatur, 960.
*Novilunium verum* quomodo supputetur, 970.

O.

*Objectum* quodnam videatur, *o.* 47. ubi videatur, 58.
*Objectum oculo tectum* quando videatur in speculo plano, *c.* 132.
ad *Objectum procul remotum* quando nunquam perveniatur, *o.* 370.
*Objectum totum* quando visu comprehendatur, 237. quando non, 238.
*Objectum valde minutum* quando distinctius videatur, 425.
*Objectum verum* per polyedrum visum quomodo discernatur ab apparentibus, *d.* 274.
*Obliquitas eclipticæ* quid & quanta sit, *a.* 178.
*Observationes astronomicæ.* Definitio, 5.
*communes*, 4.
*Occasus* siderum. Definitio, 19.
*Occasus acronychus.* Definitio, 279. quomodo inveniatur, 285.
*Occasus cosmicus.* Definitio, 278. quomodo inveniatur, 285. quomodo ope globi inveniatur, 319.
*Occasus heliacus.* Definitio, *a.* 280. quomodo inveniatur, 293. quomodo ope globi inveniatur, 331.
*Occasus solis* quomodo computetur, 214. quomodo ope globi inveniatur, 320.
*Occasus stellæ fixæ* quomodo inveniatur, 270. quomodo ope globi inveniatur, 322.
*Octilis*, 931.
*Oculus.* Definitio, *o.* 16. 17. structura explicata, 78. quantum uno obtutu capiat spatium, 235. 236. quando ad objectum accedens & ab eodem recedens objectum idem semper videat sub eadem magnitudine, 232. 233.
*Oculi artificialis* constructio, 79.
*Oculus valens* quinam dicatur, 379. quinam sit, 404. 405. 406.
*Oppositio planetarum.* Definitio, *a.* 536. 928. signum, 929.
*Oppositio planetarum superiorum & solis* quomodo observetur, 727.
*Oppositio visibilis directa.* Definitio, *o.* 267.
*obliqua*, ibid.
*Optica.* Definitio, *o.* 1. significatus latior, 2.
*Orbitæ Cometarum* quales sint, *a.* 1164. 1165. 1166.
*Orbitæ planetarum ellipticæ* quomodo primum detectæ, 681. earum axis minor quomodo inveniatur, 696. & seqq.
*Orbita solis* a circulari parum differt, 676.
*Orbitarum dimensiones* in semidiame-

tris terrestribus quomodo inveniantur, 907. quantæ sint, 908.
*Ortus* siderum. Definitio, *a.* 19.
*Ortus acronychus.* Definitio, 279. quomodo inveniatur, 284.
*Ortus cosmicus.* Definitio, 278. quomodo inveniatur, 283. quomodo ope globi inveniatur, 319.
*Ortus heliacus.* Definitio, *a.* 280. quomodo inveniatur, 293. quomodo ope globi reperiatur, 331.
*Ortus solis* quomodo computetur, 214. quomodo ope globi reperiatur, 318.
*Ortus stellæ fixæ* quomodo inveniatur, 271. quomodo ope globi inveniatur, 322.

P.

*Parallaxis.* Definitio, *a.* 367. theoria, 379. & seqq. quomodo altitudinem immutet, 368. quid proprie sit, 369. ubi nulla, 328. quomodo ascensionem & descensionem rectam & obliquam, declinationem, latitudinem & longitudinem mutet, 372.
*Parallaxis altitudinis* quomodo inveniatur, 388. quomodo Cometæ, 1145. quomodo Lunæ, 887.
*Parallaxis ascensionis.* Definitio, 375. quomodo inveniatur, 390.
*Parallaxis ascensionis rectæ fixarum.* Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.
*Parallaxis declinationis.* Definitio, 374. quomodo inveniatur, 390.
*Parallaxis declinationis fixarum.* Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.
*Parallaxis descensionis.* Definitio, 375 quomodo inveniatur, 390.
*Parallaxis latitudinis.* Definitio, 377. quomodo inveniatur, 390. 391.
*Parallaxis latitudinis fixarum.* Definitio, 596. qualis sit, 598. 599.
*Parallaxis longitudinis.* Definitio, 376. quomodo inveniatur, 390. 391.
*Parallaxis longitudinis fixarum.* Definitio, 596. qualis inveniatur, 598. 599.
*Parallaxis fixarum annua.* Definitio, *a.* 596 quinam eam observare tentaverint, 600. & seqq. quanta sit, 608.
*Parallaxis fixarum absoluta.* Definitio. *a.* 596. an semper eadem, 597.
*Parallaxis horizontalis* quomodo inveniatur, 387.
*Parallaxis horizontalis Lunæ* quanta sit, 892.
*Parallaxium horizontalium Lunæ Tabulæ* quomodo construantur, 891.
*Parallaxis horizontalis Solis* quomodo inveniatur, 895.
*Parallaxis Lunæ a Sole.* Definitio, 99. quanta sit, 992.
*Parallaxis Martis diurna* quomodo observetur, 897. & seqq.
*Parallaxis Orbis.* Definitio, 763. 776. mensura, 764. quomodo supputetur, 792.
*Parallaxis Veneris diurna* quomodo observetur, 897. & seqq.
*Parietum* scenographia, *p.* 71.
*Pars media* quænam dicatur in Trigonometria sphærica, *s.* 92.
*Partes conjunctæ triangulorum sphæricorum* quænam dicantur, 93.

*Partes*

*Partes laterales* quænam dicantur in triangulo ſphærico, *ſ.* 135.
*Partes ſejunctæ trianguli ſphærici* quænam dicantur, 95.
*Particula exſors.* Definitio, *a.* 844. quomodo inveniatur, 850.
*Pavimentum lapidibus ſtratum* quomodo projiciatur, *p.* 46.
*Penduli ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis* longitudo quomodo in diverſis Telluris locis ſe habeat, *a.* 567.
*Peninſulæ* in Luna, 480.
*Pentagoni regularis* projectio, *p.* 49.
*Penumbra.* Definitio, *a.* 1039. quantum ſpatium in Terra occupet quomodo determinetur, 1058. via ejus quomodo in globo terreſtri vel mappa geographia delineetur, 1095.
*Perigæum.* Definitio, 635.
*Perihelium.* Definitio, 635. quomodo locus ejus obſervetur, 674.
*Perihelii Telluris locus* quomodo inveniatur, 810.
*Periodi planetarum circa ſolem* quantæ in ſingulis, 732. 752. 800.
*Perpendicularia* quando in ſpeculo convexo videantur everſa, *c.* 182.
*Perſpectiva.* Definitio, *p.* 1.
*Perſpicilla.* Definitio, *d.* 478. qualia myopibus conveniant, 479. 482. qualia presbytis, 519. quomodo ſeligantur, 525.
*Phaſes Lunæ* quomodo ſe habeant, *a.* 455.
*Pilarum* ſcenographia, *p.* 71.
*Piſces*, *a.* 160.
*Planetæ.* Definitio, 31. quomodo dignoſcantur, 37. ſigna, 38. quomodo moveantur circa ſolem, 633. 634. quomodo ſecunda inæqualitate exuantur, 812. quomodo locus eorum in globo dato tempore exhibeatur, 314. quinam ſoli opponantur, 537.
*Planetarum diſtantiæ a Sole* quomodo reperiantur, 796. quantæ ſint, 797. 904.
*Planetarum diſtantiæ a Terra* quomodo inveniantur, *a.* 903. quantæ ſint, 904. & ſeqq. num varient, 550. & ſeqq.
*Planetarum motus proprius* quomodo innotuerit, 28. 29.
*Planetarum occultationes*, 541.
*Planetarum orbitæ* quomodo ſe habeant reſpectu Terræ, 590.
*Planetarum ratio ad Terram* quoad ſuperficiem & ſoliditatem, 921. 922.
*Planetarum ſemidiametri veræ* quomodo inveniantur, 919. quantæ ſint, 920.
*Planeta directus* quando dicatur, 534.
*retrogradus*, 534.
*ſtationarius*, 534.
*Planetæ inferiores* quinam dicantur, 489. eorum revolutio circa ſolem quomodo inveniatur, 731.
*Planetæ primarii.* Definitio, 529. quinam ſint, 631.
*Planetæ ſecundarii.* Definitio, 529. quinam ſint, 631.
*Planetæ ſuperiores.* Definitio, 489. revolutio circa ſolem quomodo inveniatur, 729.
*Plantæ* num dentur in Luna, 488.

*Planum* quomodo refringat lumen, *d.* 49. & seqq.
*Planum geometricum.* Definitio, *p.* 8.
*horizontale*, 9.
*horopteris*, 343.
*objectivum*, 27.
*perspectivum*, 7.
*refractionis*, *d.* 8.
*verticale*, *p.* 10.
*Plenilunium medium* quomodo supputetur, *a.* 959. 967.
*Pleniluniorum mediorum epocha* quomodo inveniatur, 961.
*Plenilunium verum* quomodo supputetur, 970.
*Polemoscopium.* Definitio, *d.* 460. constructio, 468.
*Poli circuli in sphæra.* Definitio, *f.* 12.
*Poli eclipticæ* distantia a polo mundi, *a.* 178.
*Poli Meridiani* ubinam sint, 87. qualia sint puncta, 88.
*Poli Mundi.* Definitio, 46. num sint mutabiles 132. num in eadem revolutione mutentur, 114.
*Poli sphæræ.* Definitio, *f.* 11.
*Polyedrum* quidnam dicatur in Dioptrica, *d.* 262. ejus theoria, 263. & seqq. usus in camera obscura, 276.
*Polyoptrum.* Definitio, 466. constructio, 470.
*Presbyta.* Definitio, *o.* 381. quinam sit, 398. 399.
*Prismatis* scenographia, *p.* 56. scenographice delineati umbra, 85.
*Prismatis cavi* scenographia, 70.
*Prismatis in aëre penduli* umbra, 92.
*Prismatis quinquangularis cavi* scenographia, 59.
*Profunditas.* Definitio, *a.* 73. mensura, 94.
*Profunditas apparens*, 73.
*vera*, 73.
*Profunditatis poli* mensura, 96.
*Profunditas solis* quomodo observetur, 287. quomodo sub finem crepusculi vespertini & initium matutini inveniatur, 397.
*Proportionalium quantitatum* symptoma quoddam, *f.* 145.
*Projectio.* Definitio, *p.* 22.
*Projectio lineæ, plani, solidi*, ibid.
*Projectio monstrosa.* Vide Anamorphosis.
*Promontoria* Lunæ, *a.* 481.
*Prosthaphæresis.* Definitio, 652.
*Puncta accidentalia* quænam in Perspectiva dicantur, *p.* 80.
*Puncta æquinoctialia.* Definitio, *a.* 158. ubinam sint, 177.
*Puncta solstitialia.* Definitio, 159. ubinam sint, 177. quomodo sibi invicem opponantur, 169. 170. quanto intervallo distent ab æquatore, 176.
*Punctum æstivum.* Definitio, 159.
*autumnale*, 158.
*brumale*, sive *hibernum*, 159.
*Punctum concursus.* Definitio, *d.* 22. in superficiebus planis, 73. & seqq. quomodo in his determinetur, 76. in superficie cava, 112. & seqq. quomodo in hac determinetur, 113. quomodo in superficie sphærica cava, 145. quomodo in convexa, 122. 155.

*Punctum*

*Punctum dispersus*. Definitio, 23. in superficiebus planis, 56. & seqq. in vitris planis, 57. & seqq. in superficie concava, 104. & seqq. in superficie sphærica concava, 139. in superficie sphærica convexa, 96. & seqq. 121. 128. 133.

*Punctum distantiæ*. Definitio, *p.* 19.

*Punctum eclipticæ*, cum quo stella culminat, quomodo determinetur, *a.* 232. quomodo inveniatur, cum quo oritur, 282.

*Punctum incidentiæ*. Definitio, *c.* 13. *d.* 7.

*Punctum objectivum*. Definitio, *p.* 27. apparentia quomodo exhibeatur, 33.

*Punctum oculi*, sive *visus*. Definitio, 13. ubinam sit, 14.

*Punctum oriens eclipticæ* quomodo computetur, *a.* 218.

*Punctum principale*, *p.* 13.
*radians*. Definitio, *o.* 8.
*reflexionis*, *c.* 13.
*refractionis*. *d.* 7.
*suboculare*, *c.* 283.
*verticale*, *a.* 58. 59. 60.
*vernale*, 158.

*Pupilla*. Definitio, *o.* 26. magnitudo variabilis, 55. & seqq. qualis in oculo valente, 394.

*Pyramis optica*. Definitio, *p.* 4.

*Pyramidis basi insistentis* scenographia, 62.

*Pyramidis scenographice delineatæ* umbræ, 88. 90.

*Pyramidis truncatæ* scenographia, 65. 67.

Q.

*Quandrantis astronomici* constructio, *a.* 106.

*Quadrati apparentiæ* quomodo inveniantur, *p.* 40. 42. 44.

*Quadratum* quando instar trapezii appareat, *o.* 283.

*Quadratum geometricum* quale sit instrumentum & quomodo construatur, 172. usus, 174. & seqq.

*Quadratus* quinam adspectus dicatur, 928. ejus signum, 929.

*Quies mobilis* apparens, 361. & seqq. 374.

*Quiescens* quando moveri videatur, 366. 374. quando in plagam contrariam moveri videatur, 369. 376. & seqq.

*Quincunx* quinam adspectus dicatur *a.* 931.

R.

*Radices motus Solis medii & Apogæi* quomodo constituantur, *a.* 718.

*Radicum mediorum motuum & Aphelii pro planetis superioribus Tabulæ* quomodo construantur, 736.

*Radicum nodorum Tabulæ* quomodo construantur, 779.

*Radiare* quando visibile dicatur, *o.* 13. quænam corpora radient, 14. quomodo radient, 59. 60.

*Radiaturæ locus*. Definitio, 15.

*Radii colorati*, *rubeus*, *flavus* &c. Definitio, 177. num mutentur per reflexionem, 187.

*Radii divergentes* quando haberi possint pro parallelis, 93. 94. quando in pupillam fere paralleli incidant, 95.

*Radii obliqui* in superficie cava, *d.* 139. & seqq. in convexa refractio, 121. & seqq.
*Radii optici.* Definitio, *p.* 5.
*Radii paralleli* quomodo in plana superficie refringantur, *d.* 49. quomodo in cava, 104. quomodo in convexa, 87. & seqq.
*Radiorum* divergentia, *o.* 49.
*Radius luminis.* Definitio, *o.* 6.
*Radius directus*, 7.
*incidens*, *c.* 14. *d.* 4.
*Radius obliquus* quomodo refringatur, *d.* 56. & seqq.
*Radius perpendicularis* cur intensior obliquo, *o.* 84.
*Radius reflexus.* Definitio, *c.* 15.
*refractus*, *d.* 5.
*Rectangulum* quando instar trapezii appareat, *o.* 283.
*Reductio ad eclipticam.* Definitio, *a.* 770. quomodo inveniatur, 786.
*Reductionum Tabulæ* quomodo construantur, 787.
*Reflexibilitas radiorum.* Definitio, *o.* 181.
*major*, 182.
*minor*, ibid.
*Reflexibilitas radiorum diversa* evicta, 195. & seqq.
*Reflexionis* lex, *c.* 24. & seqq.
*Reflexio luminis.* Definitio, 38. evicta, 50. 53. 54. quid dicatur in theoria Lunæ, *a.* 857.
*Refrangibilitas radiorum.* Definitio, *o.* 179.
*major*, 180.
*minor*, ibid.
*Refrangibilitas radiorum diversa* evicta, 190. & seqq.
*Refractio.* Definitio, *o.* 39. evicta, 54. in vitro qua a lege fiat, *d.* 25. 26. in aqua, 28. in spiritu vini & aëre, ibid.
*Refractionis lex* prope vera, *d.* 33. 34. 39. vera, 25. & seqq. 42.
*Refractionis lex* quomodo per experimenta detegatur, 24. quomodo a priori analytice, 36.
*Refractionum* tabula, *a.* 349.
*Refractio luminis in atmosphæra*, *a.* 334. quod augeat altitudinem Solis & stellarum, 335. quomodo mutet ascensionem rectam, obliquam, declinationem, 352. longitudinem item & latitudinem, 353. num sit in dato loco constans, 341. ubi maxima, 344. quomodo decrescat versus zenith, 344. an eadem in sole & stellis, 345. quomodo observetur, 347.
*Refractio altitudinis.* Definitio, 355.
*Refractio ascensionis & descensionis.* Definitio, *a.* 356. quomodo inveniatur, 360.
*Refractio declinationis.* Definitio, 356. quomodo inveniatur. 360.
*Refractio latitudinis.* Definitio, 359. quomodo inveniatur, 361.
*Refractio longitudinis.* Definitio, 358. quomodo inveniatur, 361.
*Regula catholica* Trigonometriæ sphæricæ, *s.* 112.
*Regula sinuum catholica* in Trigonometria, 101. 102.
*Regula tangentium catholica* in Trigonometria, 109. 110.

*Remo-*

*Remotiora* quando appareant sublimiora, *o.* 318. 319. 323. quando depressiora, 321. 322. 325. quomodo appareant ad dextram vel sinistram sita, 330. 331.
*Remotius* quando tardius moveri videatur, 354. quando eadem celeritate, 355.
*Remotorum* visio qualis sit, 314.
*Repræsentatio.* Definitio, *p.* 22.
*Rerum super pavimento elevatarum* scenographia, 76.
*Retina*, *o.* 30.
*Retrogradatio mobilis* apparens, *o.* 368.
*Retrogradatio planetæ.* Definitio, *a.* 533. explicata, 587. 588. 591. 592.
*Revelatio planetarum* circa solem quomodo determinetur, 729. 751. 782.

S.

*Satellites planetæ.* Definitio, *a.* 489. distantiæ veræ a suis primariis quomodo inveniantur, 923.
*Satellites Jovis* a quonam fuerint detecti, 500. qualia sint corpora, 504. quales sint planetæ, 530.
*Satellitum Jovis* figura, 509. maculæ, 510. atmosphæra alterabilis, 511. tempora periodica quomodo inveniantur, 882. eclipses, 502. 505. distantiæ a jove, 924.
*Satellites Jovis spurii*, *a.* 519. qualia sint corpora, 522.
*Satellites Saturni*, 519. quomodo observati, ibid. quales sint planetæ, 530.
*Satellitum Saturni* distantiæ a Saturno, 884. 925. eclipsis, 520. 521. tempora periodica quomodo inveniantur, 882.
*Saturnus.* Definitio, 32. quale corpus, 523. 524. num circa axem gyretur, 498.
*Saturni* facies qualis observetur, 513. 514. similitudo cum Tellure, 525. a Luna occultandi figura ovalis, 475. hujus causa, 476.
*Saturnus Jovialis*, 501.
*Scenographia.* Definitio, *p.* 26. quomodo fiat, 55. & seqq.
*Scenographia mechanica*, 87.
*Sclerotica* tunica. Definitio, *o.* 21. cur sit tenax, 22.
*Scorpius*, *a.* 160.
*Scrupula defectus.* Definitio, 949. quomodo inveniantur pro Luna, 951. quomodo pro Sole, 1001.
*Scrupula dimidiæ durationis.* Definitio, 952. quomodo inveniantur in eclipsi lunari, 956. quomodo in solari, 1003.
*Scrupula dimidiæ moræ.* Definitio, 953. quomodo inveniantur, 957.
*Scrupula emersionis.* Definitio, 955. quomodo inveniantur, 958.
*Scrupula incidentiæ*, sive *casus.* Definitio, 954. quomodo inveniantur, 958.
*Scrupula menstrua longitudinis.* Definitio, 842. quomodo inveniantur, 848.
*Scrupula latitudinis.* Definitio, *a.* 871.
*Sectio* quid dicatur in Perspectiva, *p.* 6.
*Sectio obliqua coni scaleni* quando circulus, *s.* 151.

*Sectio obliqua cylindri* qualis ſit, *c.* 276.
*Sectoris circuli* ad aream circuli ratio, *a.* 683.
*Semidiametri apparentes Lunæ & Solis* quomodo ad datum tempus inveniantur, 972.
*Semidiametrorum apparentium Lunæ & Solis Tabulæ* quomodo conſtruantur, 973.
*Semidiameter apparens penumbræ* Definitio, 1055. quomodo inveniatur, 1056.
*Semidiameter apparens Terræ* in Luna vel planeta quanta ſit, 1015. quod in ſole inſenſibilis, 1118.
*Semidiameter penumbræ.* Definitio, 1050.
*Semidiameter ſolis* quomodo in camera obſcura inveniatur, *o.* 306.
*Semidiameter umbræ lunaris apparens*, *a.* 1029. quomodo inveniatur, 1030.
*Semiſextus* quinam adſpectus dicatur, 931.
*Sesquadrus* quinam ſit adſpectus, 931.
*Sextilis.* Definitio, 928. ſignum, 929.
*Sidera Medicæa*, 501.
*Sidera Urbanoctaviana*, 519.
*Signum cœleſte.* Definitio, 160.
*Signorum cœleſtium* nomina, ibid.
*Signa æſtiva* quænam ſint, 161.
*auſtralia*, ſive *meridionalia*, 162.
*autumnalia*, 161.
*borealia*, ſeu *ſeptentrionalia*, 162.
*brumalia*, 161.
*vernalia*, ibid.
*Sinus & arcus* differentia quomodo inveniatur, *a.* 695.
*Sinus ſummæ duorum arcuum quadrante minorum* ratio ad ſinum differentiæ eorundem, *ſ.* 143.
*Sinus totius ratio* ad tangentem & cotangentem, 104.
*Sinuum verſorum* ratio, *a.* 659. 660.
*Sinus* num in ſpeculo convexo ſub aquis videatur in diebus canicularibus, *c.* 177.
*Situs* viſibilis quando erectus, *o.* 346. quando inverſus, 347.
*Solidi* cujuſcunque ſcenographia, *p.* 56.
*Soliditatum Planetarum* ratio ad ſoliditatem ſolis quomodo inveniatur, *a.* 910. qualis ſit, 911.
*Sol* qualis ſit ſubſtantia, 431. num ignis purus, 434. an mutationibus obnoxius, 421. cur ſit luminare magnum, 409. quomodo in verticali primario obſervetur, 127. in quonam ſemicirculo eclipticæ diutius commoretur, 655. 656.
*Sol* quid dicatur in oculo, *o.* 25.
*Solis* in quatuor eclipticæ quadrantibus mora, *a.* 668. ad terram ratio quoad ſoliditatem & ſuperficiem, 916.
*Solis diameter apparens* quomodo obſervetur, 547. 548. qualis obſervetur, 549.
*Solis diſtantia a Terra* quomodo inveniatur, 894. quanta ſit, 896.
*Solis figura* qualis ſit, 425. 435.
*Solis locus in ecliptica* quomodo obſervetur, 203.
*Solis motus proprius* quomodo innotuerit,

fuerit, 26. 27. quomodo observetur, 155. 156.
*Solis orientis & occidentis figura ovalis* seu *elliptica*, 475. ejus causa, 476.
*Solstitium.* Definitio, *a.* 159. quomodo observetur, 657. 666.
*Solstitium æstivum*, 159.
*brumale*, ibid.
*Spatia amplitudinem visus in diversis distantiis definientia* quomodo se habeant, *o* 243. 244.
*Specillum.* Definitio, *d.* 15.
*Specularia.* Definitio, *c.* 1.
*Speculum.* Definitio, 3. theoria analytice investigata, 312. & seqq.
*Speculum planum.* Definitio, 5. phænomena, 51. & seqq. cur lumen Solis non intendat, 66. quantum esse debeat, ut te integrum in eo contuearis, 77. 80. item objectum quodcunque aliud, 78. 84. quomodo poliatur, 43. & seqq. quomodo conficiatur, 49.
*Speculum cavum.* Definitio, 7. proprietates & symptomata, 208. & seqq. quomodo ex metallo paretur, 201. & seqq. quomodo vitreum terminetur, 207.
*Speculum chalybeum* quodnam dicatur, 203.
*Speculum conicum.* Definitio, 10. quomodo fiat, 142. 262. usus in anamorphosibus, 301.
*Speculum convexum.* Definitio, 6. phænomena, 144. & seqq. usus in arte pictoria, 176. quomodo fiat, 140.
*Speculum cylindricum.* Definitio, *c.* 9.
*Speculum cylindricum convexum.* Definitio, 9. theoria, 266. & seqq. 277. 278. quomodo fiat, 262.
*Speculum cylindricum concavum.* Definitio, 9. theoria, 294. & seqq.
*Speculum ellipticum.* Definitio, 12. cur difficillime paretur, 263. quomodo lumen in foco uno positum reflectat. 310. 311.
*Speculum hyperbolicum.* Definitio, *c.* 11. cur difficillime paretur, 142.
*Speculum metallicum* quomodo fiat, 201. quomodo poliatur, 204.
*Speculum parabolicum.* Definitio, 11. quomodo lumen Solis reflectat, 306. cur sit ustoriorum præstantissimum, 307. cur difficillime paretur, 263.
*Specula prismatica vitrea* quomodo fiant, 142.
*Specula pyramidalia* quomodo fiant, 142. 262. usus in anamorphosibus, 304. & seqq.
*Speculum sphæricum.* Definitio, 8.
*Specula ustoria* quænam sint, 214. theoria, 209. & seqq. 215. & seqq. phænomena, 221. inter alia celebria, 220. 221. Tschirnhusiana, 221. quomodo ex ligno, gypso, charta, stramine & auro strepero parentur, 219.
*Sphæra.* Definitio, *f.* 6. proprietates & symptomata, 13. & seqq. quando instar circuli appareat, *o.* 277.
*Sphæræ illuminatio* quomodo se habeat, *o.* 111. & seqq. pars illuminata quomodo inveniatur 115. & seqq.

*Sphæræ pars* quanta videatur, 246. 247.
*Sphæræ pars hemisphærio major* quando ab oculo videri possit, 428. quando minor, 429.
*Sphærarum* theoria refractionis, *d.* 178. & seqq.
*Sphæra activitatis luminis* quomodo augeatur, *o.* 108. 109.
*Sphæra armillaris*, *a* 189.
*Sphæra mundana* num motu æquabili moveatur, 135. 136.
*Sphærica.* Definitio, *f.* 1.
*Statio planetæ.* Definitio, *a.* 532. explicata, 587. 588.
*Stellæ erraticæ.* Definitio, 31.
*Stellæ fixæ.* Definitio, 25. quomodo interdiu observentur, 230. beneficio globi cognoscantur, 317.
*Stellarum* distantiæ quomodo observentur, 225. distantia a Terra æqualis quod appareat, 8. distantia a vertice num ob motuum annuum Telluris mutetur, 594. num hæc variatio cum parallaxi annua conveniat, 600. revolutio diurna num constantis magnitudinis, 110. mora supra & infra horizontem quomodo computetur, 268. quomodo ope globi inveniatur, 322.
*Stellæ novæ* quænam sint, 1127. 1128.
*Subocularis* quænam linea dicatur, *c.* 283.
*Superficies* quando instar lineæ appareat, *o.* 273.
*Superficies Lunæ* quomodo se habeat ad superficiem Terræ, *a.* 913.
*Superficies Planetæ* quomodo se habeat ad superficiem solis, 911. quomodo ratio hæc inveniatur, 910.
*Superficies refringens.* Definitio, *d.* 6.
*Synodus.* Definitio, *a.* 535.
*Systema Copernicanum* quodnam dicatur, 632.
*Systema planetarium.* Definitio, 528. explicatum, 630.
*Systema terræ motæ* an scripturæ adversum, 626. 627.
*Systema terræ quiescentis* num in Astronomia & Physica usui sit, 621.
*Systema Tychonicum* quodnam dicatur, 632.

T.

*Tabula* quid dicatur in perspectiva, *p.* 6.
*Tabularum astronomicarum* nova forma, *a.* 723.
*Tabulæ latitudinariæ* quænam dicantur, 791.
*Tangentium* ratio, 794.
*Taurus*, 160.
*Telescopium.* Definitio, *d.* 326. inventor, 327. quomodo in microscopium convertatur, *d.* 454. 455. quomodo longius a tubi molimine liberetur, 383. quantum augeat objecta, quomodo observetur, 399.
*Telescopium astronomicum* vide tubus astronomicus.
*Telescopium terrestre* vide tubus terrestris.
*Telescopium catadioptricum* in usum observationum cœlestium quomodo construatur, *d.* 385.
*Tempus*, quo arcus æquatoris per Meri-

Meridianum transit, quomodo computetur, *a.* 211. quo stella culminat, quomodo inveniatur, 294. nocturnum quomodo observetur. 295. 296. quomodo computetur, 299. 298.
*Tempus æquale* quam habeat mensuram, 710.
*Tempus apparens*, sive *verum*. Definitio, 713. quomodo in medium convertatur, 715.
*Tempus incidentiæ & repletionis* in Eclipsi Solis quomodo determinetur, 1004.
*Tempus medium*. Definitio, 712. quomodo in apparens convertatur, 715.
*Tempus obscurationis maximæ* in eclipsi terrestri quomodo inveniatur, 1084.
*Temporum periodicorum* Planetarum circa solem ratio, *a.* 779. Satellitum Jovis & saturni circa suum primarium, 885.
*Tenebræ*. Definitio, *o.* 122.
*Terra* num moveatur motu vertiginis & motu annuo circa Solem, *a.* 622. quando in umbram Lunæ incurrere nequeat, 1026. quando incurrat, 1027.
*Terræ hemisphærium* quomodo in Luna appareat, 1014
*Terræ motæ systema* qualia admittat phænomena, 585. & seqq.
*Terræ motus* a quibusnam fuerit defensus, 625. num S. S. adversus, 626. num a membro Ecclesiæ Romanæ salva conscientia admitti possit, 628.
*Terræ obscuratio* quando maxima, 1071.
*Terræ quiescentis systema* qualia admittat phænomena, 611. & seqq.
*Tesselatæ imagines* quomodo construantur, quæ in partes dissectæ oculo integræ appareant, *o.* 312.
*Tetraëdri super angulo solido constituti* scenographia, *p.* 68. scenographice delineati umbra, 89.
*Tetragonus* qualis sit adspectus *a.* 928. signum, 929.
*Theatrorum* figura optima, *o.* 230. 231.
*Theoria* planetarum, *a.* 633. & seqq.
*Transitus Cometæ* per eclipticam quomodo inveniatur, 1140. item per æquatorem, 1141.
*Tremor circa limbum Lunæ* in eclipsi solis totali observatus, *a.* 454.
*Trianguli apparentia* quomodo inveniatur, *p.* 38.
*Triangulum æquatorium* quodnam a *Keplero* in theoria Planetarum elliptica dicatur, *a.* 688.
*Triangulum opticum*. Definitio, *p.* 4.
*Triangulum sphæricum*. Definitio, *f.* 3. proprietates, 55. & seqq.
*Triangulorum rectangulorum* proprietates, *f.* 49.
*Triangulum sphæricum*. Definitio, 3. proprietates 136. & seqq. 144. 146. 148. & seqq. 354. & seqq.
*Trianguli sphærici æquicruri* proprietas, 147.
*Triangulorum sphæricorum obliquangulorum* proprietates, 154. & seqq. resolutio, 158. & seqq.

*Triangulorum sphæricorum rectangulorum* proprietates, 98. & seqq. 165. & seqq. resolutio, 114. & seqq. 134.
*Tridecilis* quinam sit adspectus, *a.* 931.
*Trigonometria catholica*, *f.* 103. 111.
*Trigonometria sphærica.* Definitio, 2.
*Trigonus*, sive *Trinus.* Definitio, 928. signum, 929.
*Trioctilis*, quinam adspectus dicatur, 931.
*Tritura vitrorum* quomodo fiat, *d.* 533. 535.
*Tropici.* Definitio, *a.* 181. distantia quanta, 182.
*Tropicus cancri.* Definitio, 181.
*capricorni*, 181.
*Tubus.* Definitio, *d.* 326.
*Tubus astronomicus.* Definitio, 333. constructio, 358. proprietates, 359. & seqq. quomodo construatur, 376. quomodo in terrestrem convertatur, 388.
*Tubus ductitius* in usum telescopii quomodo construatur, *d.* 337.
*Tubus Galilæanus.* Definitio, 331. constructio, 340. proprietates, 341. & seqq.
*Tubus Hollandicus* vide Galilæanus.
*Tubi Newtoniani* constructio, 376.
*Tubus terrestris.* Definitio, 334. constructio, 387.
*Tunica Ruyschiana* num in oculo detur, *o.* 32.

V.

*Valles* in Luna num dentur, *a.* 479.
*Variatio* in motu Lunæ quid dicatur, 857. quomodo inveniatur, 860.
*Variatio maxima* quanta sit, 859. quomodo inveniatur, 858.
*Vas hydromanticum.* Definitio, *d.* 462. constructio, 470.
*Venus.* Definitio, *a.* 35. quale corpus, 524. num terræ similis, 525.
*Veneris digressiones maximæ a sole* quomodo observentur, *a.* 740.
*Veneris distantia* a Terra, 901.
*maculæ*, 494.
*motus vertiginis*, 496. 497.
*Veneris phases*, quomodo appareant, 491. 538. quales sint in conjunctione, 491.
*Venus Jovialis*, 501.
*Vertex coni umbrosi*, 1041.
*Verticalis primarius.* Definitio, 72.
*Via Cometæ* quomodo in globo designetur, 1142.
*Via Lunæ a Sole*, 1062.
*Via penumbræ.* Definitio, 1061. qualis sit, 1064.
*Via umbræ* quænam sit, 1062.
*Vicina* cur distinctius videantur remotis, *o.* 72. cur majora appareant remotioribus, 211.
*Vicinius* quando celerius moveri videatur, 358. quomodo ad alia remotiora relatum appareat, 333.
*Virgo*, *a.* 160.
*Visibile* quomodo in oculo delineetur, *o.* 76. quando non videatur, 71. quando clarius, 390. cur non prorsus distinctæ, 72. quando moveri, 68. augeri, 371. minui 372. proprius accessisse videatur, 373. quando

quando majus, quando minus appareat, 66. quomodo per lentem convexam, *d.* 248. 252. & seqq. quotuplex videatur per polyhedrum, 266. 268. quomodo radiet, *o.* 59. 60. cur duobus oculis unicum videatur, 345. quando geminatum, 350. & seqq. quomodo appareat per lentem concavam, *d.* 193. oblique oppositum quantum appareat, *o.* 268. & seqq.

*Visibilia* quando æqualia appareant, *o.* 67.

*Visibilis* locus ubinam sit, 344. & seqq.

*Visibilium* in camera obscura repræsentatio, *o* 110. & seqq. *d.* 236. & seqq. per lentes convexas visorum theoria, 239. & seqq.

*Visio* quando eadem, *o.* 43. 44.

*Visionis* principium, 70.

*Visio magnitudinis* quo fundamento nitatur, 66. 67.

*Visionis motus* principium, 68.

*Visio confusa.* Definitio, *o.* 41.
*distincta*, 40.
*directa*, 3.
*reflexa*, *c.* 2.
*refracta*, *d.* 3.

*Vitra caustica* quænam sint, *d.* 198. & seqq. phænomena, 199.

*Vitra* quomodo ad poliendum apta seligantur, 532. ad trituram aptentur, 533. poliantur, 527. & seqq.

*Vitrum* quid dicatur in Perspectiva, *p.* 7.

*Vitrum concavum* quomodo poliatur, *d.* 540.

*Vitrum utrinque concavum* seu *concavo concavum.* Definitio, 19.

*Vitrum utrinque æqualiter concavum*, ibid.
*inæqualiter concavum*, ibid.

*Vitrum convexum* quomodo atteratur & ad poliendum disponatur, 535. poliatur, 539.

*Vitrum convexo-convexum*, sive *utrinque convexum.* Definitio, 17.

*Vitrum utrinque æqualiter convexum*, ibid.

*Vitrum utrinque inæqualiter convexum*, ibid.

*Vitrum objectivum.* Definitio, *d.* 328.
*oculare*, 329.

*Vitra plana* quomodo poliantur, 541.

*Vitrum plano-concavum.* Definitio, 18.
*plano-convexum*, 16.

*Vitrum polyhedrum* quomodo poliatur, 543.

*Umbra.* Definitio, *o.* 122. theoria, 123. & seqq. quomodo multiplicetur, 130. quando crescat & decrescat, 157.

*Umbræ* apparentia, sive projectio, *p.* 83. & seqq. 94. & seqq.

*Umbræ a sphæra projectæ longitudo* quomodo inveniatur, *o.* 143.

*Umbræ intensitas*, 131. & seqq. figura, 134. & seqq.

*Umbræ longitudo* quomodo in plano horizontali inveniatur, 146. quando altitudini corporis æqualis, 148.

*Umbræ lumini per fenestram projecto convenientis* projectio, *p.* 102.

*Umbra*

*Umbra mera* quid dicatur, *o.* 122.
*Umbræ* montium lunarium, *a* 483.
*Umbrarum perpendicularium opacorum longitudines* quam habeant proportionem, *o.* 156.
*Umbra recta.* Definitio, 159. theoria, 163. & seqq. ad versam ratio, 165. 170. usus, 171.
*Umbra satellitum Jovis* observata, *a.* 506. 507. figura ejus, 508.
*Umbra versa.* Definitio, 161. theoria. 166. & seqq. usus, 171.
*Umbra Lunæ.* Definitio, *a.* 1029. quo dirigatur, 485. num terram totam tegere possit, 1035. quantam terræ partem tegat quomodo inveniatur, 1036.
*Umbræ lunaris* diameter vera quomodo inveniatur, 1034. via in globo terrestri, vel mappa geographica quomodo delineetur, 1095.
*Umbræ terrestris semidiameter apparens* in loco transitus Lunæ quomodo inveniatur, 941.
*Volantem* quando nos conspiciamus in speculo plano, 74.
*Uvea* tunica. Definitio, *o.* 24.

Z.

*Zenith.* Definitio, *a.* 58.
*Zodiacus.* Definitio, 188.
*Zodiacus Cometarum*, 1157.

*FINIS INDICIS SEXTI.*

VII.

# INDEX
## *RERUM ET VERBORUM*
## TOMO IV.
## CONTENTORUM.

Notes velim, literam *g.* Geographiam & Hydrographiam, *c.* Chronologiam, *s.* Gnomonicam, sive Sciatericam, *p.* Pyrotechniam, *m.* Architecturam militarem, *a.* Architecturam civilem & numeros §. §. designare; ubi vero nulla numeris adscribitur litera, eos referri ad proxime antecedentem.

A.

*Ab*, *c.* 112. 121. 123.
*Abacus*, *a.* 104.
Abend, *g.* 215.
*Aben meb*, *c.* 113.
*Abib*, 121.

*Accessus.* Definitio, *m.* 239. quomodo paretur, 244.
*Acroteria.* Definitio, 275. situs, 276. dimensiones, 277. & seqq. quomodo construenda, 282. & seqq.
*Acus magnetica.* Definitio, *g.* 291. quomodo paretur, 297.
*Adar*, *c.* 112. 121. 123.
*Adar meh*, *c.* 113.
*Adar prior*, 121.
*posterior*, ibid.
*Ædes in antis.* Definitio, *a.* 236. quales sint, 239.
*Ædificia* quomodo extruenda, *a.* 4.
*Ædificii area* quam habere debeat figuram, *a.* 421. & seqq.
*Ædificii dimensiones* quomodo reperiantur, 428. & seqq.
*Ædificii firmitas.* Definitio, *a.* 6.
*Ædificium* quale esse debeat, 18. & sqq.
*Æquator.* Definitio, *g.* 13. proprietates, 14.
*Æra.* Definitio, c. 81.
*Æra Actiaca.* 268.
*Hegira*, 227.
*Hispanica*, 265.
*Judaica*, 212.
*Martyrum*, 225.
*Persica*, 225.
*Yezdegerdica*, 255.
*Æstas.* Definitio, *g.* 76. ubinam bis sit 200. quando sub æquatore, 101. quando in zona temperata & frigida 112. cur in zona torrida non ubivis eodem tempore, 105.
*Æstatis initium & finis.* Definitio, 76. in zona torrida quomodo inveniatur, 106.
Die äussere Böschung, *m.* 52.
Die äussere Polygon, *m.* 52.
*Affirer meh*, *c.* 113.
*Africus* quinam dicatur ventus, *g.* 215. 216.
*Aiyar*, *c.* 112.
*Ala.* Definitio, *m.* 32. num concava fieri debeat, 74. quænam melior, 68. & seqq.
*Alarum* multiplicatio, 75.
retractio, 69. & seqq.
*Ala secundaria.* Definitio, 43.
*Alsanus* quinam ventus, *g.* 215. 216.
*Altitudo objecti ad distantiam datam conspiciendi* quomodo inveniatur, 50.
*Altitudo Solis* quomodo ope globi inveniatur, 235.
*Ambitus Telluris* quomodo inveniatur, *g.* 35. 40. quantus sit, 41.
*Ambulacrum valli.* Definitio, *m.* 25. latitudo 26.
*Amphiprostylos.* Definitio, *a.* 236. qualis sit ædes, 241.
*Amphiscii.* Definitio, *g.* 152. ubinam dentur, 153.
*Amplitudo occidua Solis* quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
*Amplitudo ortiva Solis* quomodo ope globi inveniatur, 235.
*Analemma.* Definitio. *f.* 132.
*Analemma signiferum.* Definitio, 132. constructio, 133.
*Angulus centri.* Definitio, *m.* 51.
*Angulus defendens exterior*, 50.
*interior*, 49.
*Anguli horarii*, quomodo inveniantur,

tur in horologio horizontali, *f.* 50. in meridionali, 58.
*Angulus humeri.* Definitio, *m.* 46.
*imminutus*, 47.
*Angulus loxodromiæ*, loxodromicus. Definitio, *g.* 318. quomodo inveniatur, 322.
*Angulus polygoni.* Definitio, *m.* 44.
*Angulus propugnaculi.* Definitio, 30. 45. magnitudo 79.
*Annuli solaris universalis* constructio, *f.* 165.
*Annuli solaris particularis* constructio, 167.
*Annus.* Definitio, *c.* 66.
*Anni epochæ unius* quomodo reducantur ad annos epochæ alterius, 84.
*Antœci* quales habeant vicissitudines tempestatum, *g.* 186. temporis, 177. 192.
*Annus abundans.* Definitio, *c.* 333. ejus character, 334.
*Annus Ægyptiacus.* Definitio, 106. quale ejus principium, 107.
*Annus æræ Actiacæ* quomodo reducatur ad annum Christi, 271.
*Annus æræ Hispanicæ* quomodo reducatur ad annum Christi, 267.
*Annus Æthiopicus.* Definitio, 111.
*Arabum*, 125.
*Atticus*, 117.
*Annus Christi* quomodo reducatur ad annum Gratiæ, 226. ad Judaicum, 216. ad annum Olympiadum, 238. ad annum Græcorum & Russorum, 198. ad annum mundi, 209. ad annum periodi Julianæ, 185. ad annum urbis conditæ, 246.
*Annus ante Christum* quomodo reducatur ad annum periodi Julianæ, *c.* 187.
*Annus deficiens.* Definitio, 331. character, 332.
*Annus Eusebianus*, quomodo reducatur ad annum periodi Julianæ, 220. ad annum Christi, 222.
*Annus fixus.* Definitio, 66.
*Annus Galaleus.* Definitio, 113. ejus præstantia, 115.
*Annus Græcorum.* Definitio, 117.
*Annus Græcorum recentiorum* quomodo reducatur ad annos Christi, 197. ad annos periodi Julianæ, 194.
*Annus Gratiæ.* Definitio, 225. quomodo reducatur ad annum Christi, 226.
*Annus Gregorianus.* Definitio, 101. differentia ab astronomico, 102. a Juliano, 103. num sit bissextilis quomodo inveniatur, 105.
*Annus Hebræorum antiquus*, 121.
*Annus Julianæ Epochæ* quomodo reducatur ad annum Christi, 263.
*Annus Julianus.* Definitio, 97. quantum deficiat ab astronomico, 98. num sit bissextilis quomodo inveniatur, 105.
*Anni Juliani dies* quomodo reducatur ad diem Judaici, 346.
*Annus Judæorum recens*, sive *Judaicus.* Definitio, 123. quomodo reducatur ad annum Christi, 217. ejus species 331. 333 quomodo species inveniatur, 345.
*Anni Judaici dies* quomodo reducatur ad diem Juliani, 345.

*Annus lunaris cœlestis.* Definitio, c. 72. quantitas, 73.
*Annus lunaris civilis communis.* Definitio, 74. quantitas, 75.
*Annus lunaris civilis embolimæus.* Definitio, 74. quantitas, 75. 76.
*Annus Macedonicus.* Definitio 119.
*Anni mundi conditi epochæ Alexandrinæ* quomodo reducantur ad annos Christi, 210.
*Anni mundi conditi Græcorum historicorum* quomodo reducantur ad annos Christi, 206. quomodo ad annos periodi Julianæ, 204.
*Annus Nabonassareus* quomodo reducatur ad annum Christi, 254. quomodo ad annum periodi Julianæ, 251.
*Annus nativitatis Christi* num sit certus, 190.
*Annus Numæus.* Definitio, 91. quantitas, ibid.
*Annus Olympiadum* quomodo reducatur ad annos Christi, 238.
*Annus ordinarius.* Definitio, 329. character, 330.
*Annus periodi Julianæ* quomodo ex datis cyclis Solis, Lunæ & Indictionum inveniatur, 181. quomodo reducatur ad annum ante Christum, 188. ad annum Christi, 186. Judaicum, 213. Eusebianum, 220. annum urbis conditæ, 242. annum Russorum & Græcorum, 194.
*Annus Persicus.* Definitio, 113. quomodo reducatur ad annum Christi, 259. quomodo initium in anno Juliano inveniatur, 260.
*Annus Romanorum veterum.* Definitio, c. 88. quantitas, 89.
*Annus Russorum* quomodo reducatur ad annum Christi, 197. quomodo ad annum periodi Julianæ, 194.
*Annus secularis* ad quodnam seculum referatur, 87.
*Annus solaris.* Definitio, 67.
*Anni solaris civilis* quantitas, 68.
*Annus solaris bissextilis*, 71.
*communis*, 69. 70.
*Annus Syriacus*, 112.
*Annus Turcarum.* Definitio, 125. quomodo reducatur ad annum Christi, 352. initium ejus quomodo computetur, 353. 355.
*Annus vagus.* Definitio, 66
*Annus urbis conditæ* quomodo reducatur ad annum Christi, 245. quomodo ad annum periodi Julianæ, 241.
*Annus Yezdegerdicus.* Definitio, 113. cum quo conveniat, 114.
*Antepagmenta*, a. 133.
*Antipodes.* Definitio, g. 180. quod dentur, 181. quinam sint, 182. 183. quomodo ope globi inveniantur, 237. quales habeant vicissitudines diei ac noctis, 185. tempestatum, 186.
*Antœci.* Definitio, 176. quinam sint, 177. quibus nulli sint, 195. quomodo ope globi inveniantur, 237. cum antipodibus comparati, 186. & seqq. 206.
*Apeliotes* quinam sit ventus, g. 215.

*Apophygis.* Definitio, *a.* 111. delineatio, 117.
*Aprilis*, *c.* 97.
*Aquilo* quinam ventus, *g.* 215. 216.
*Architecti* officium, *a.* 2. 3.
*Architectura civilis.* Definitio, 1. regulæ ejus quomodo inveniatur, 5.
*Architectura militaris.* Definitio, *m.* 1. ejus prima principia, 2. & seqq.
*Arctapeliotes* qualis ventus, *g.* 215.
*Arcus.* Definitio, *a.* 253. delineatio, 257. partes & membra, 258. 259.
*Arcuum.* Dispositio, 274.
*Arcus æquatoris inter Loxodromiæ initium in æquatore & Meridianum datum interceptus* quomodo inveniatur, *g.* 336.
*Aræostylon*, *a.* 225.
*Ardhascht meh*, *c.* 113.
*Areæ subdialis* necessitas, *a.* 442. 443. 444.
*Arenæ* qualitates, 59. examen, 60.
*Argestes* qualis ventus, *g.* 215. 216.
*Artilleria*, *p.* 2.
*Arx.* Definitio, *m.* 201.
*Ascensio obliqua Solis* quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
*Ascensio recta Solis* quomodo ope globi inveniatur, ibid.
*Ascii.* Definitio, *g.* 149. quinam sint, 150. ubinam non dentur, 151. quinam sint dato die, quomodo inveniatur, 168.
*Asrudia meh*, *c.* 113.
*Astragalus*, Definitio, *a.* 105. delineatio, 113.
*Athyr*, *c.* 106.
*Atlantes.* Definitio, *a.* 81.
*Augustus*, *c.* 97.
*Auricula.* Definitio, *m.* 72.
**Aussenwercke** / 109.
*Auster*, *g.* 211. 215.
*Austro-Africus* qualis ventus, 215.
*Autumni initium & finis.* Definitio, 79.
*Autumnus* quando sub æquatore, 103. ubi in zona torrida, 109.
*Axis Telluris.* Definitio, 12.

B.

**Das Bäncklein** / *m.* 52.
*Basis columnæ*, *a.* 96. & seqq.
*Basi columnæ & stylobatæ* quænam membra conveniant, 132.
*Basis columnæ & capituli Tuscani & Dorici*, 198
*Basis stylobatæ*, 95.
*Basis & Coronidis stylobatæ* ichnographia quomodo delineetur, 193.
*Batterie*, *m.* 227.
**Der bedeckte Weg** / 52.
*Behen meh*, *c.* 113.
**Berme** / *m.* 109.
**Bestrichener Winckel** / 52.
**Bogenstellungen** / *a.* 253.
**Bollwerck** / *m.* 52.
**Bollwercks-Winckel** / 52.
*Bomba.* Definitio, *p.* 31. quomodo paretur, 42. & seqq.
*Boreas*, *g.* 215.
*Borapeliotes*, 215. 216.
*Borolybicus*, 215.
**Brille** / *m.* 109.
**Brustwehre** / *ibid.*

C.

*Cæcias*, quinam ventus; *g.* 215. 216.

*Camen-*

*Cæmentorum virtutes* quomodo explorentur, *a.* 48.
*Calendæ* quid ſint, *c.* 95.
*Calendarium* quomodo conſcribatur, 316.
*Calendarium correctum.* Definitio, 314.
*Calendarium Gregorianum.* Definitio, *c.* 291.
*Calendarium Gregorianum perpetuum,* 392.
*Calendarium Julianum.* Definitio, 272.
*Calendarium Julianum perpetuum,* 282.
*Calibra.* Definitio, *p.* 101.
*Calx* quomodo coquenda, *a.* 65. & ſeqq. quomodo examinetur, 71. conſervetur, 72.
*Camera.* Definitio, 468. conſtructio, 471.
*Camini* conſtructio, 482.
*Canun prior, c.* 112.
*poſterior, ibid.*
*Capital* Linie / *m.* 52.
*Capitulum columnæ.* Definitio, *a.* 96. quænam ei conveniant membra, 171.
*Capituli Corinthii* ichnographia, 207.
*Ionici* ichnographia, 202.
*Romani* ichnographia, 205.
*Carbas* quinam ventus dicatur, *g.* 215. 216.
*Carbones* ad pulverem pyrium conficiendum idonei quomodo parentur, *p.* 13. & ſeqq.
*Carbonum* qualitates, 19. 20. 21.
*Cardi meh, c.* 113.
Carthaune / *p.* 100.
*Caryatides.* Definitio, *a.* 82.
*Casleu, c.* 121. 123.
*Caſtellum.* Definitio, *m.* 201. delineatio, 207. quomodo condi debeat, 202. & ſeqq.
*Caurus* quinam ventus, *g.* 215. 216.
Der *Centri* - Winckel / *m.* 52.
*Character anni, menſis, enneadecaëteridos.* Definitio, *c.* 324. menſis quinam, 325. anni quinam, 326. enneadecaëteridos quinam, 327.
*Characteres artificiales* chronologici ſive *inſtituti.* Definitio, 130.
*Characteres Aſtronomici* chronologici ſive *naturales.* Definitio, 128. quales ſint, 129.
*Characteres chronologici.* Definitio, 127.
*Characteres hiſtorici chronologici.* Definitio, 132.
*Charta* quomodo ſuper tabula expandenda, *a.* 174.
*Chartæ reductionis* in hydrographia. Definitio. *g.* 363.
*Chojac, c.* 106.
*Chorda.* Definitio, *m.* 31.
*Chronologia.* Definitio, *c.* 1.
*Circius* qualis ſit ventus, *g.* 215. 216.
*Circuli horarii* ſive *horarum.* Definitio, *ſ.* 28.
*Circulus æquinoctialis.* Definitio, *g.* 13.
*polaris antarcticus,* 19.
*polaris arcticus, ibid.*
*Circumvallatio exterior.* Definitio, *m.* 235. *interior,* 236.
*Clima.* Definitio, *g.* 114.
*Climatis* initium, 115. medium, 117. finis, 116.
*Climatum Tabulæ* quomodo conſtruantur, 138. exhibentur, ibid.
*Cochlidium.* Definitio, *a.* 515. nævi, 516. delineatio 517.

*Colli dimidium.* Definitio, *m.* 37.
*Columellæ.* Definitio, *a.* 80.
*Columna.* Definitio, 75. quomodo super alia columna erigatur, 289. & seqq.
*Columnæ conjugatæ.* Definitio, *a.* 216. quomodo conjugatio fieri debeat, 217. & seqq.
*Columna parietina.* Definitio, 75.
*Commoditas ædificii.* Definitio, *a.* 7.
*Compassus nauticus.* Definitio, *g.* 296.
*Computi vulgaris Autor*, *c.* 189.
*Conclavium* altitudo, *a.* 435. & seqq. communicatio, 440. figura, 440. locus, 441.
*Corona*, *a.* 104.
*Coronis stylobatæ*, 95. quænam membra ei conveniant, 131.
*Coronix*, 100. qualis esse debeat, 102. quænam membra ei conveniant, 131.
Die *Cortine*, *m.* 52.
*Contre*-Mine / 109.
*Contregarde*, ibid.
*Corus*, *g.* 215. 216.
*Craticula* ad firmitatem fundamenti quomodo paranda, *a.* 328.
*Crepusculi matutini initium* quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
*Crepusculi vespertini finis* quomodo ope globi inveniatur, 235.
Creutz-Gewölbe / *a.* 469.
*Crucis gnomonicæ* constructio, *f.* 163.
*Cuniculi subterranei.* Definitio, *m.* 154. quid de iis observatum, 155. & sqq. quomodo parentur, 160. 163.
*Cyclus Indictionum.* Definitio, *c.* 151. quomodo inveniatur, 153.
*Cyclus Lunæ.* Definitio, 147. quantus sit & quamdiu valeat, 148.
*Cyclus Solis.* Definitio, *c.* 140. quomodo inveniatur, 143.
*Cycli Solis* pro annis Gregorianis quomodo condantur, 145.
*Cycli Solis, Lunæ & Indictionum anni dati periodi Julianæ* quomodo inveniantur, 180.
*Cylindrus pyrotechnicus.* Definitio, *p.* 35.
*Cylindricum horologium*, *f.* 152. & seqq.
*Cymatium Doricum.* Definitio, *a.* 107. delineatio, 115.

D.

*December*, *c.* 97.
*Defensionis quantitas* quomodo mensuretur, *m.* 58. & seqq.
*Delineatio acus magneticæ.* Definitio, *g.* 293. quomodo observetur, 301.
*Declinatio plani* quomodo inveniatur, *f.* 90. 101.
*Denticuli* quid sint, *a.* 133. quomodo delineentur, 180.
*Diameter Columnæ* quomodo inveniatur, *a.* 155. 156.
*Diameter globi unius libræ* quomodo inveniatur, *p.* 110.
*Diameter globorum* pro singulis semunciis libræ quomodo inveniatur, *p.* 109.
*Diastylon* opus, *a.* 225.
*Dies.* Definitio, *g.* 118. ubinam unicus, 128. ubi perpetuo nocti æqualis, 126. quandonam ubivis terrarum nocti æqualis, 132.
*Dies iidem* ubinam æquales, 135.


*Diei*

*Diei longitudo* quomodo variet pro locorum latitudine, *g.* 134.
*Diei brevissimi & longissimi longitudo* quomodo inveniatur, 136. 142.
*Dies bissextilis* seu *intercalaris*. Definitio, *c.* 71.
*Dies civilis*. Definitio. 3.
*Dies naturalis*. Definitio, 5. quantitas quomodo inveniatur, 6.
*Dies rejiculæ*. Definitio, 336.
*Dies mensis anni Nabonassarei* quomodo reducatur ad diem anni Juliani, 202.
*Dierum hebdomadis* nomina, 45.
*Di meh*, 113.
*Dipteros*, *a.* 236. quale sit opus, 244.
*Distantia locorum* quomodo ope globi inveniatur, *g.* 264.
*Distantia locorum magno intervallo dissitorum* quomodo inveniatur, 29.
*Distantia locorum geographica*. Definitio, 51. quomodo inveniatur, 63. & seqq.
*Distantiæ Solis a vertice* mensura, 264.
*Dulheggia*, *c.* 125.
*Dulkaadah*, *ibid.*

E.

*Echinus*. Definitio, *a.* 106. delineatio, 114.
*Ecliptica*. Definitio, *g.* 15. situs, 16.
*Eclipticæ declinatio maxima* quomodo inveniatur, 140.
*Ecphora*. Definitio. *a.* 150.
**Einbohrende Defens-Linie**, *m.* 52.
**Einfallendes Licht**/ *a.* 390. 391.
*Elul*, *c.* 112. 121. 123.
*Enneadecaëteris Judaica*. Definitio, *c.* 322. *quot sit dierum*, 323.
*Epactæ annuæ*. Definitio, 296. quantæ sint, 297. & seqq.
*Epactæ menstruæ*. Definitio, 294.
*Epactæ* quomodo per Calendarium disponendæ, 302.
*Epactarum officium*. 300.
*Epactarum cyclus* quando exspiret, 299. cur non omni ævo satisfaciat 301. 303.
*Epactarum expansa Tabula* quomodo construatur, 306.
*Epacta Juliana & Gregoriana* anni dati quomodo inveniatur, 310.
*Epiphi*, 106.
*Epistylium* quid sit, *a.* 100. quale esse debeat, 101.
*Epocha*. Definitio, *c.* 81. quod sit arbitraria, 82.
*Epocha Constantinopolitana*, 171.
*Diocletiana*, 225.
*Juliana*, 261.
*Muhamedica*, 227.
*Mundi conditi Judæorum*, 212.
*Mundi Alexandrina*, 207.
*Mundi Eusebiana*, 219.
*Mundi recentiorum Græcorum & Russorum*, 192.
*Mundi Græcorum Historicorum*, 201. 202.
*Nabonassarea*, 247.
*Olympiadica*, 232.
*Urbis conditæ*, 239.
*Epocha vulgaris Christi nati* quomodo reducatur ad annum periodi Julianæ, 183.
*Epocha diei civilis*. Definitio, 10. quomodo constituatur, 11. & seqq.

*Etesiæ,*

*Etesiæ*, g. 216.
*Ethanim*, c. 121.
*Euroauster* quinam ventus, g. 215.
*Euronotus* quinam ventus, 216.
*Europææ horæ* quomodo in Babylonicas convertantur, c. 34.
*Eurus* quinam ventus, g. 215. 216.
*Eurythmia*. Definitio, a. 31. & seqq.
*Eustylon opus*, 225.

F.

*Facies*. Definitio, m. 30.
*Facierum* magnitudo, 63.
**Falckonet** / p. 100.
*Famulus pyrotechnicus*. Definitio, 37. quomodo fiat, 63.
*Fascia*, a. 104.
*Fastigium*. Definitio, 262.
*Favonius* quinam ventus, g. 215. 216.
*Februarius*, c. 97.
*Festa immobilia*. Definitio, 274. quænam sint, 275.
*Judaica* quænam sint, 549.
*Festa mobilia*. Definitio, c. 276. quænam sint, 277.
*Fenestra*. Definitio, a. 381. quomodo construenda, 382. & seqq. 389. 390. dimensiones, 387. 388. 395. situs, 490. & seqq. figura, 393. ornatus, 402. 404. quot fenestræ conclavi unicuique conveniant, 425.
*Fenestra podio septa*. Definitio, a. 414. quomodo construenda, 415. & seqq.
*Figura irregularis* quomodo ad regularitatem reducatur, m. 185. quomodo muniatur, 186. 188. & seqq.
*Finitor*. Definitio, g. 28.
*Flores capitulorum* quomodo delineentur, a. 210.
*Focus* quomodo exstruatur, a 495. 496. & seqq.
*Folia acanthina* cum cauliculis, 133.
*Forcipula composita*. Definitio, m. 105. an utilis, 106. quomodo delineetur, 138. 179.
*Forcipula simplex*. Definitio, 103. an utilis, 104. quomodo delineetur, 137. 179.
*Fornaces* quomodo construendæ, a. 486. & seqq.
*Fornices*. Definitio, a. 468. quomodo construantur, 471.
*Fossæ necessitas*, m. 15. latitudo, 16. latitudo quænam melior, 86. quales terminos habere debeat, 87.
*Fossæ operum externorum* magnitudo, 122.
*Frons primaria ædium* quam plagam respicere debeat, a. 445. & seqq.
*Frontispicium*. Definitio, 262. figura, 264. 266. locus, 265. nævi, 267. 268. quomodo delineetur, 272.
*Fulcrum*. Definitio, 74. quodnam perfectius, 84. quale esse debeat, 85. & seqq.
*Fumarii* exstructio, 499. & seqq.
*Fundamentum ædificii*. Definitio, a. 311. necessitas, 313. quale esse debeat, 314. & seqq. dimensiones, 332. 333. quomodo ponatur, 332. & seqq. 334. quomodo in loco aquoso ponatur, 339.

G.

*Gallicus*, quinam ventus, g. 215. 216.

*Gange-*

*Gangeticus* quinam ventus, 215.
*Geographia.* Definitio, 1.
**Gesichts-Linie/** *m.* 52.
**Gewölbe/** *a.* 469.
*Ginbat*, *c.* 111.
*Glacis*, *m.* 52.
*Globus aëreus.* Definitio, *p.* 71. quomodo componatur, 92.
*Globus aquaticus.* Definitio, 72. quomodo componatur, 96.
*Globus fœtens.* Definitio, 41. quomodo componatur, 68.
*Globus fumans.* Definitio, 40.
*Globi incendiarii.* Definitio 38, qua materia repleantur, 52. quomodo repleti ligentur, 54. baptizentur, 55. granatis manuariis impleantur, 57.
*Globus lucens.* Definitio 39. 74. quomodo componatur, 66. 96.
*Globus obscurans* quomodo componatur, 67.
*Globus terrestris.* Definitio, 73. quomodo componatur, 97.
*Globus terrestris* in Geographia. Definitio, *g.* 231. constructio, 233. 234. usus, 235. & seqq. quomodo ita constituatur, ut Sol omnes regiones illuminet, quæ in ipsa Tellure illuminantur, 261.
*Gnomonica.* Definitio, *f.* 1.
*Gradus Meridiani terrestris* quomodo mensurentur, *g.* 40.
*Gradus paralleli* quantitas quomodo inveniatur, 45. 46.
*Græcus* quinam ventus dicatur, 28.
*Granata.* Definitio, *p.* 31.
*Granata manualis*, ibid.



*Grando pyrotechnica.* Definitio, *p.* 32. quomodo paretur, 48.

H.

*Habase*, *c.* 111.
**Halber Mond/** *m.* 109.
*Hamle*, *c.* 111.
**Hangender Mörser**, *p.* 142.
**Haupt-Linie/** 52.
*Haziram*, *c.* 112.
*Hebdomas.* Definitio, 43.
*Helakim*, 40.
*Hellespontius* qualis ventus, *g.* 215.
*Hemisphæria.* Definitio, *a.* 468.
*Heteroscii.* Definitio. *g.* 155. ubinam dentur, 156.
*Hexastylon* quale sit opus, *a.* 214.
*Hiemis initium & finis.* Definitio, *g.* 77.
*Hiems* ubinam unica, 17. quando sub æquatore, 102.
*Hora.* Definitio, *c.* 17.
*Hora composita.* Definitio, 17.
*simplex*, ibid.
*Horæ antiquæ*, *c.* 24.
*Horæ astronomicæ.* Definitio, *c.* 21. quomodo in Babylonicas convertantur, 31.
*Horæ Babylonicæ.* Definitio, 19. quomodo in astronomicas convertantur, 31. quomodo in Europæas, 34. quomodo horologio inscribantur, *f.* 149.
*Horæ Europææ.* Definitio, 22. quomodo convertantur in astronomicas, 30. Italicas, 35. Judaicas, 37.
*Horæ Italicæ.* Definitio, 20. quomodo convertantur in Europæas, 35. quomo-

quomodo horologio inſcribantur, ſ. 149.
*Horæ Judaicæ.* Definitio, 24. quales ſint, 25. & ſeqq. quomodo in Europæas convertantur, 37.
*Horæ Norimbergenſes.* Definitio, 28.
*Horæ planetariæ*, 24.
*Horizon.* Definitio, g. 28.
*Horizon phyſicus*, 28.
*ſenſibilis*, ibid.
Hornwerck / *m.* 109.
*Horologiographia*. ſ. 2.
*Horologii* deſcriptio generalis, 36. in baculo, 160.
*Horologium æquinoctiale.* Definitio, 5. quomodo eidem ſignorum paralleli inſcribantur, 140.
*Horologium æquinoctiale inferius.* Definitio, 5. deſcriptio, 33. quot horas indicet, 7.
*Horologium æquinoctiale ſuperius.* Definitio, 5. quot horas indicet, 6. quomodo deſcribatur, 30.
*Horologium æquinoctiale univerſale* quomodo conſtruatur, 34.
*Horologium aſtrale.* Definitio, 176. conſtructio, 184.
*Horologii cylindrici* deſcriptio, 152. & ſeqq. 161.
*Horologia declinantia.* Definitio, 76. deſcriptio, 94. 96. 102. 104.
*Horologia deinclinata.* Definitio, 82. deſcriptio, 109.
*Horologium horizontale.* Definitio, 10. quo tempore ejus uſus, 11. ejus perfectio, 12. quomodo deſcribatur, 38. & ſeqq. quomodo ſub ſphæra parallela, 129. quomodo ſub recta, 124. & ſeqq.
quomodo paralleli ſignorum eidem inſcribantur, 135.
*Horologii horizontalis ſine centro* deſcriptio, 119. & ſeqq.
*Horologii horizontalis univerſalis* deſcriptio, 170.
*Horologia inclinata.* Definitio, 78. deſcriptio, 106.
*Horologium lunare.* Definitio, 75. deſcriptio, 180 182.
*Horologium meridionale.* Definitio, 14. quasnam horas indicet, 15. quomodo deſcribatur, 54. & ſeqq.
*Horologium nocturnale.* Definitio, 177.
*Horologium occidentale.* Definitio, 22. quas horas indicet, 23. quomodo deſcribatur, 68.
*Horologium orientale.* Definitio, ſ. 20 quas horas indicet, 21. quomodo delineetur, 66.
*Horologium polare.* Definitio, 25.
*Horologium polare inferius.* Definitio, 25. quas horas indicet, 27 quomodo deſcribatur, 72.. & ſeqq.
*Horologium polare ſuperius.* Definitio, 25. quas horas indicet, 27. quomodo deſcribatur, 69. & ſeqq.
*Horologia reclinata.* Definitio, 80. deſcriptio, 108.
*Horologium ſeptentrionale.* Definitio, 16. quasnam horas indicet, 17. quo tempore nullus ejus uſus, 18. quomodo deſcribatur, 63. 64.
*Horologium ſolare.* Definitio, 3. diverſitas unde, 4. quomodo vicem lunaris ſuſtineat, 178. quomodo in ſuperficie globi deſcribatur, 150.

*Horolo-*

*Horologia solaria primaria* quomodo eidem trunco inscribantur, 74.
*Horologia sine centro*. Definitio, 115. ubi construenda, 116. & seqq.
*Horologium verticale*. Definitio, 13. quomodo sub sphæra recta describatur, 127. quomodo sub parallela, 130. quomodo sine centro, 122. & seqq.
*Horologii universalis* in Tabula quadam portatili descriptio, 172.
*Hydar*, c. 111.
*Hydrographia*. Definitio, g. 2.
*Hypafricus* qualis sit ventus, 215.
*Hypaquilo* qualis sit ventus, 215.
*Hypargestes*, qualis sit ventus, 215.
*Hypæthros*. Definitio, a. 236. quale sit opus, 247.
*Hyperboreas* qualis sit ventus, g. 215.
*Hypereurus* qualis ventus, ibid.
*Hypeurus*, 215.
*Hypocæcias* qualis sit ventus, 215.
*Hypocircius* qualis ventus, ibidem.
*Hypocorus*, ibidem.
*Hypolibs*, ibidem.
*Hypophœnix*, ibidem.
*Hypothrascias Scirem*, 215.

I.

*Jacatit*, c. 111.
*Janua*. Definitio, a. 372. dimensiones, 373. & seqq. figura, 378. locus, 410. 411. ornatus, 402. 404.
*Januarius*, c. 97.
*Japyx*, 215.
*Ichnographia ædificii*. Definitio a. 524. quomodo fiat, 528.
*Ichnographia munimenti*. Definitio. m. 131.
*Ichnographia partis alicujus columnæ*. Definitio, a. 188.
*Idus* quid sint, c. 95. quot in quolibet mense, ibid.
*Jiar*, 121. 123.
*Imbrices*, a. 522.
*Inclinatio acus magneticæ*. Definitio, g. 294. quomodo observetur, 307.
*Inclinatio plani* quomodo inveniatur, f. 88. 89.
*Incolæ ejusdem paralleli* quomodo inter se comparentur, g. 196. & seqq. 202.
*Incumba*. Definitio, a. 255. membra, 256.
*Initium diei civilis*. Definitio, c. 10. quomodo constituatur, 11. & seqq.
Die innere Böschung / m. 522
— Droßirung / ibid.
— Polygon / ibid.
*Instrumentum*, quo pulvis pyrius in tormentum immittitur, p. 127. in arctum spatium redigitur, 128. tormenta repurgantur, 129.
*Instrumentum declinatorium*. Definitio, f. 85. constructio, 86. usus, 88.
*Intercolumnium*. Definitio, a. 223. prope januas & portas quantum esse debeat, 232.
*Jomada prior*, c. 125.
— *posterior*, ibidem.
*Itineris quantitas* quomodo in mari æstimetur, g. 351.
*Iter confectum in mari* quomodo inveniatur, 386. 389.
*Iter conficiendum in mari* quomodo inveniatur, 384.

*Junius*, *c.* 97.

K.

**Eine Katze** / *m.* 109.
**Kartetsche** / *p.* 32.
*Kebia* quid sint, *c.* 376.
**Die Kehle** / *m.* 52.
**Der kleine Winckel** / ibid.
**Ein Kron-Werck** / 109.

L.

*Lacunar* quomodo construendum, *a.* 466.
*Lagena pyrotechnicæ.* Definitio, *p.* 34.
*Laquear gypseum* quomodo perficiatur, *a.* 467.
*Lateres* quomodo ducantur, 51. & seqq. examinentur, 58.
*Latitudo loci.* Definitio, *g.* 54. quomodo inveniatur, 55. 137. 143. quomodo ope globi inveniatur, 237. quomodo observetur, 344. & seqq.
*Latitudinum locorum* Tabulæ, 60.
*Latitudinis mutatio* in navigatione quomodo inveniatur, 321. quomodo se habeat ad latus mecodynamicum, 327.
*Latus exterius.* Definitio, *m.* 35. *interius*, 36.
*Latus mecodynamicum.* Definitio, *g.* 317. quale sit, 329. quomodo inveniatur, 325. 328. 330. 383.
**Lauffgraben** / *m.* 240.
*Leuco-notus* qualis ventus, *g.* 215.
*Libonotus* qualis ventus, 215. 216.
*Libs* qualis ventus, 215.
*Ligna* qualia esse debeant, *a.* 43. quomodo cædenda, 46. exiccanda, 47.
*Ligni parsimoniæ* principia, 474 & seqq.
*Limen* quantum esse debeat, 380.
*Linea* quid dicatur in Architectura militari, *m.* 233. quid in Geographia, *g.* 13.
*Linea capitalis.* Definitio, *m.* 40.
*Linea communicationis.* Definitio, 241.
*Linea defensionis major.* Definitio, *m.* 41. magnitudo, 55. 56.
*Linea defensionis minor*, sive *stringens.* Definitio, 42.
*Linea semicolli* quænam melior, 77.
*Linea substylaris.* Definitio, *f.* 91. quænam sit, 92. 93.
*Literæ ardentes* quomodo efformentur, *p.* 98.
*Litera dominicalis.* Definitio, *c.* 135. quomodo variet, 136. & seqq. quando ordo restituatur, 139. quomodo inveniatur, 143.
*Loca* quænam in zona torrida sita, *g.* 69. quænam in temperata, 72. quænam in frigida, 75.
*Loca secreta ne fœtore sint molesta* quomodo impediatur, *a.* 448. & seqq.
*Loca Terræ*, ubi simul meridies, *g.* 23.
*Loca Terræ* quomodo ope globi inveniantur, in quibus dies est datarum horarum, 251. 252. quibus Sol oritur, vel occidit, quæ meridiem, quæ mediam noctem, quæ diem, quæ noctem habent, 255. quæ vident eclipseos medium, 256. quibus planeta, 257.

257. stella vel aliud phœnomenon fit verticale, 258. 259. quibus hoc oriatur, vel occidat, 260. quibus Sol, 261. vel Luna lucet, 262. quibus Sol & Luna oriuntur, vel occidunt, 263.

*Loca zonæ torridæ* quomodo inveniantur ope globi, in quibus dierum dato numero Sol non occidit, 254.

*Locus ad fluctum situs* quomodo muniatur, *m* 208.

*Longitudo diei* quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235. quomodo in horologiis solaribus indicetur, *s.* 142.

*Longitudo jactus tormentorum* quanta sit, *p.* 137.

*Longitudo loci.* Definitio, *g.* 52. quomodo inveniatur, 56. & seqq. quomodo ope globi inveniatur, 237.

*Longitudinum locorum differentia* quomodo inveniatur, 58. 59.

*Longitudinum locorum* Tabulæ, 60.

*Longitudo maris* quomodo inveniatur, 335. 354 385.

*Longitudinum in mari* differentia quomodo inveniatur, 386.

*Longitudinis mutatio* quomodo inveniatur, *g.* 337. 338. 387.

*Longitudo noctis* quomodo ope globi inveniatur, 235.

*Lorica.* Definitio, *m.* 21. crassities, 22. altitudo, 23 24.

*Lorica fenestrarum.* Definitio, *a.* 431. dimensiones, 4 2. & seqq.

*Loricæ transversæ* utilitas, *m.* 124.

*Loxodromia.* Definitio, *g.* 309. proprietates, 310. 311. 313. & seqq. quomodo inveniatur, 320.

*Loxodromiæ longitudo* quomodo se habeat ad latus mecodynamicum, 324. quomodo ad mutationem latitudinis, 319. 323.

*Lunula.* Definitio, *m.* 99. delineatio, 136.

M.

*Magabit, c.* 111.

*Majus*, 97.

*Mappæ compositæ per rhombos & distantias.* Definitio, *g.* 367.

*Mappa Geographica.* Definitio, 266.

*Mappæ hydrographicæ.* Definitio, 356.

*Mappa planæ.* Definitio, 358. quales sint, 359. & seqq. quomodo construantur, 368.

*Mappa particularis.* Definitio, 268. quomodo construatur, 278.

*Mappæ reductæ.* Definitio, 363. quales sint, 364. 365. quomodo construantur, 375.

*Mappæ universales.* Definitio, 267.

*Marchesuam*, *c.* 121. 123.

*Margo fossæ.* Definitio, *m.* 27.

*Mare* circumfluit terram, *g.* 7. latitudo in mari quomodo observetur, 340. inveniatur, 342.

*Martius*, *c.* 97.

*Mascaran*, 111.

*Materia ædificiorum.* Definitio, *a.* 34 qualis sit seligenda, 35. & seqq.

*Materia liquefacta* quid dicatur, *p.* 61.

*Meha meh*, *c.* 113.

*Mecheir*, 106.
*Membra ordinum architectonicorum.* Definitio, *a.* 103. divisio, 103. altitudines eorum quomodo determinentur, 151.
*Membra essentialia.* Definitio, 125. quænam sint, 126. & seqq.
*Mensis astronomicus.* Definitio, *c.* 58.
*Mensis civilis.* Definitio, 60.
*Mensis illuminationis.* Definitio, *c.* 55. quantus, 56.
*Mensis lunaris periodicus.* Definitio, 51. quantus sit, 52.
*Mensis lunaris synodicus.* Definitio, 53. *quantitas* 54.
*Mensis lunaris astronomicus.* Definitio, 58.
*Mensis lunaris civilis.* Definitio, 60. quantus sit, 61. & seqq
*Menses Numæi* quales fuerint, 93.
*Mensis solaris.* Definitio, 48. quod omnes non sint æquales, 50. quantus statuatur, 50.
*Mensis solaris civilis.* Definitio, 60. quantitas, 64. 65.
*Menses Romulæi* quales fuerint, 93.
*Mensium Turcicorum* initium in anno Juliano quomodo reperiatur, 356.
*Merded meh*, *c.* 113.
*Meridianus.* Definitio, *g.* 20. situs, 21. officium, 23. numerus Meridianorum, 24.
*Meridiani diversorum locorum* quomodo eidem horologio inscribantur, *f.* 144.
*Meridianus primus.* Definitio, *g.* 26. quinam sit, 27. 61.
*Meridies* quænam plaga dicatur, *g.* 215.
*Meridies* cur citius in locis orientalioribus, quam occidentalioribus, 25. ubinam sit dato momento quomodo ope globi inveniatur 174.
*Mesaquilo* quinam ventus, *g.* 215.
*Mesargestes*, ibidem.
*Meseurus*, ibidem.
*Mesoboreas*, ibidem.
*Mesocæcias*, ibidem.
*Mesocircius*, ibidem.
*Mesocorus*, ibidem.
*Mesolibonotus*, ibidem.
*Mesolibs*, ibidem.
*Mesori*, *c.* 106.
*Mesophœnix* quinam ventus, *g.* 215.
*Mesozephyrus*, ibidem.
*Mijazia*, *c.* 111.
*Milliaria longitudinis.* Definitio, *g.* 317. quomodo inveniantur, 383.
*Minutum primum.* Definitio, *c.* 39.
*secundum*, ibidem.
**Mittag** / *g.* 215.
**Mitternacht** / ibidem.
*Modulus.* Definitio, *a.* 148.
*Modulus* ornatus januarum & fenestrarum, 403.
*Molad Tohu.* Definitio, *c.* 320. character, 328.
*Monopteros* ædes rotunda, *a.* 251.
**Mörser** / *p.* 142.
*Mortarii* præparatio, *a.* 361.
*Mortarium* in Artilleria. Definitio, *p.* 140. quomodo delineetur, 143. & seqq. oneretur, 148. dirigatur, 150.
*Muharram*, *c.* 125.
*Muniendi forma Belgica.* Definitio, *m.* 126. calculus geometricus, 128.

128. 129. delineatio ichnographica, 133. 141. orthographica, 142.
*Muniendi forma Blondelliana.* Definitio, 151. calculus geometricus 152. delineatio, 153.
*Muniendi forma Paganiana.* Definitio, 145. calculus geometricus, 146. delineatio, 148.
*Muniendi forma Scheiteriana.* Definitio, 170. calculus geometricus, 171. delineatio, 173.
*Muniendi forma Vaubaniana.* Definitio, 157. calculus geometricus, 159. delineatio, 161.
*Muniendi forma Vaubaniana recentior.* Definitio, 166. delineatio, 168.
*Munimenti* forma qualis esse debeat, 61. & seqq.
*Munimenta campestria.* Definitio, 217. orthographia, 219. delineatio, 220. & seqq.
*Munimentum irregulare.* Definitio, 180. undenam tale sit, 183. 184.
*Munimentum regulare.* Definitio, 125.
*Munimentum stellatum* quomodo delineetur, *m.* 223.
*Muri* quomodo construendi, *a.* 341. & seqq. quomodo anchoris firmentur, 370. quomodo tectorio vestiantur, 363.
*Murus* ante fenestram qualis esse debeat, 413.
*Mutuli compositi.* Definitio, 133. delineatio, 182.
*Mutuli simplices.* Definitio, 133. delineatio, 181.

N.

*Navigatio circularis.* Definitio, *g.* 381. theoria, 391. & seqq.
*Navigatio Mercatoris.* Definitio, 380.
*Navigatio plana.* Definitio, 379.
**Neben-Streiche**, *m.* 52.
*Neomeniæ* omnium mensium quomodo inveniantur, *c.* 344.
*Neomenia Tisri* quomodo inveniatur, 339. & seqq.
**Der niedrige Wall**, *m.* 52.
*Nisan*, *c.* 112. 121. 123.
*Nitri* qualitates, *p.* 17. 20. 22. defæcatio & pulverisatio, 5. & seqq.
*Nonæ* quid sint, *c.* 95. quot sint in quolibet mense, ibid.
**Nord**, *g.* 211.
**Nord gen Osten**, 215.
**Nord gen Westen**, ibid.
**Nord-Nord-Ost**, ibid.
**Nord-Nord-West**, ibid.
**Nord-Ost**, ibid.
**Nord-Ost gen Osten**, ibid.
**Nord-Ost gen Norden.** ibid.
**Nord-Ost gen Westen**, ibid.
**Nord-West**, ibid.
**Nord-West gen Norden**, ibid.
**Nord-West gen Westen**, ibid.
*Notapeliotes*, ibid.
*Notolybicus*, ibid.
*Notozephyrus*, ibid.
*Notus*, ibid.
*November*, *c.* 97.
*Nox.* Definitio, *g.* 118. *c.* 8. quomodo quantitas inveniatur, 9. ubinam unica, *g.* 128.
*Numerus aureus.* Definitio, *c.* 149. quomodo inveniatur, 150.

*Obsi-*

## O.

*Obsidionis* processus, *m.* 249. defensio contra eandem, 250.
*Occidens.* Definitio, *g.* 211. 215.
*Occasus Solis* quomodo ope globi inveniatur, 235. quomodo in horologio indicetur, *f.* 142.
*Octastylon*, *a.* 214.
*October*, *c.* 97.
*Olympias*, *g.* 215.
*Opera campestria.* Definitio, *m.* 216.
*Opus coronatum.* Definitio, 108. quomodo delineetur, 140. 178.
*Opus cornutum.* Definitio, 107. quomodo delineetur, 131. 176.
*Opera externa.* Definitio, 94. utilitas, 95. qualia esse debeant, 96.
*Opus rusticum.* Definitio, *a.* 366. quibus ædificiis conveniat, 367. & seqq.
*Ordo architectonicus.* Definitio, *a.* 90. divisio, 153. quomodo componantur, 160. & seqq. 137. quomodo delineentur, 176. 178.
*Ordo Corinthius*, 145. quod sit ornatissimus, 146.
*Ordo Doricus*, 140.
*Ionicus*, 141.
*Romanus*, sive *compositus*, 143.
*Tuscanus*, 139.
*Oriens.* Definitio, *g.* 211.
*Ornatus ædificii.* Definitio, *a.* 15.
*Ornithias* qualis ventus, *g.* 216.
*Orthographia externa ædificii.* Definitio, *a.* 525. quomodo fiat, 529.
*Orthographia interna ædificii.* Definitio, *a.* 256. quomodo fiat, 530.
*Orthographia munimenti.* Definitio, *m.* 132.
*Orthographia partis alicujus columnæ.* Definitio, *a.* 188.
*Ortus Solis* quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235. quomodo in horologiis solaribus indicetur, *f.* 142.
**Ost**/ *g.* 211. 215.
**Ost gen Norden**/ 215.
**Ost gen Süden**/ ibid.
**Ost-Nord-Ost**/ ibid.
**Ost-Süd-Ost**/ ibid.

## P.

*Pachon*, *c.* 106.
*Pagomen*, 111.
*Paophi*, 106.
*Paralleli locorum* quomodo horologio solari inscribantur, *f.* 146.
*Parastata.* Definitio, *a.* 78.
*Parmula.* Definitio, *m.* 98. usus, 110. qualis esse debeat, 111. & seqq. quomodo delineetur, 135.
*Partes ordinum* quomodo componantur, 137.
*Pascha* quomodo celebrandum, *c.* 279.
*Pascha Gregorianum* quomodo computetur, 312.
*Pascha Judaicum* quomodo computetur, 347.
*Pascha Julianum* quomodo computetur 288.
*Pavimenta* qualia esse debeant, 457.
*Pauni*, 106.
*Perfectio ædificii.* Definitio, *a.* 8.
*Periodus Calippica.* Definitio, *c.* 154. quanta

quanta ſit, 156. quot lunationum, 157. quamdiu valeat, 158.
*Periodus Hipparchi.* Definitio, *c.* 161. quanta ſit, 164. quot lunationum, 165, quamdiu valeat, 166.
*Periodus Juliana.* Definitio, 175. quanta ſit, 176. ejus uſus, 178. inventor, 179.
*Periodus Victoriana.* Definitio, 167. quot ſit lunationum, 173. quantum valeat, 171. quamdiu valeat, 174.
*Periœci.* Definitio, *g.* 178. quinam ſint, 179. quibus nulli ſint, 195. 205. quomodo numerent horas, 204. quomodo ope globi inveniantur, 237.
*Peripteros.* Definitio, *a.* 236. quale ſit opus, 242.
*Peripteros ædes rotunda*, 251.
*Periſcii.* Definitio, *g.* 157. ubinam dentur, 158. quinam ſint dato loco, quomodo inveniantur, 169. 170.
*Peryſtilium* Definitio, *a.* 212. genera apud veteres, 236.
**Petarde**, *p.* 151.
*Phamenot*, *c.* 106.
*Phœnicias* qualis ventus, *g.* 215.
*Phœnix*, ibidem.
*Photoſciaterica*, *ſ.* 2.
*Pila.* Definitio, *a.* 77.
*Pila parietina*, ibidem.
*Plagæ.* Definitio, *g.* 207. quot ſint, 208. quomodo indicentur, 210. quomodo determinentur, 217.
*Plagæ cardinales.* Definitio, 211.
*Plagæ collaterales*, vel *intermediæ.* Definitio, 211. ſpecies, ibid.
*Plagæ collaterales primariæ*, ibid.
*ſecundariæ*, ibid.
*ſecundariæ primi ordinis*, ibid.
*ſecundariæ ſecundi ordinis*, ibid.
*Plinthus*, *a.* 104.
*Pluvia ignea* quomodo efficiatur, *p.* 61.
*Pluvia pyrotechnica.* Definitio, 33.
*Podium.* Definitio, *a.* 414.
*Poli Telluris.* Definitio, *g.* 12.
*Polus Terræ antarcticus*, ſive *auſtralis*, ibid.
*Polus Terræ arcticus*, ſive *borealis*, ibidem.
*Poli elevatio* ubi nulla, 125. quomodo inveniatur, 143.
*Polygonorum diſtantia* in methodo muniendi recentiore quomodo inveniatur, *m.* 209.
**Polygon-Winckel**, 52.
*Poſtes.* Definitio, *a.* 79.
*Poſticum*, 236.
*Principium anni.* Definitio, *c.* 78. ubi ſtatuendum, 79. 80.
*Profunditas Solis* quomodo ope globi inveniatur, *g.* 235.
*Projectio ſphæræ.* Definitio, *g.* 269. quomodo fiat, 272. 275.
*Projectio orthographica*, 270.
*ſtereographica*, ibid.
*Projectura*, ſive *Projectio.* Definitio, *a.* 94.
*Pronaus* qualis ædes, 236.
*Proſtylus.* Definitio, 236. quale ſit opus, 240.
*Propugnaculum.* Definitio, *m.* 29. forma, 62.

*Propugnaculi exterius vallum.* Definitio, 101. usus, 116. 117.
*Pseudodipteros.* Definitio, *a.* 236. quale sit opus, 243. 244.
*Pseudodipteros ædes.* Definitio, 249. qualis sit, 250.
*Pulchritudo.* Definitio, *a.* 10. principia, 11. & seqq.
*Pulvis pyrius.* Definitio, *p.* 4. compositio, 24. & sqq. examen, 29. 30.
*Pycnostylon* opus, *a.* 225.
*Pyrobologia*, *p.* 2.
*Pyrobolus.* Definitio, 69. quomodo conficiatur, 77. qua materia impleatur, 78. quomodo terebretur, 79.
*Pyroboli forma* quomodo paretur, 75. 76.
*Pyrobolus aquaticus* quomodo componatur, 94.
*Pyrotechnia.* Definitio, *p.* 1.
*Pyxis nautica*, seu *magnetica.* Definitio, 296. quomodo construatur, 297.

Q.

*Quadra*, *a.* 104.
*Quadrantis horodictici* constructio, *f.* 157.
*Quintilis*, *c.* 88.

R.

*Rabia prior*, *c.* 125.
*posterior*, ibid.
*Rajab*, ibid.
*Radius major.* Definitio, *m.* 39.
*minor*, 38.
*Rationum* symptoma, *g.* 84.
**Ravelin**, *m.* 109.
*Reductus* quomodo delineetur, 224. & seqq.
*Refractio horizontalis Solis* quomodo inveniatur, *g.* 144.
*Regula* quale membrum in Ordinibus, *a.* 104.
*Regula ad delineandum Ordines atque ædificium utilis* quomodo construatur, 175.
*Regula Calibræ.* Definitio, *p.* 102. quomodo paretur, 103. usus, 105. & seqq. examen, 111.
*Rhombus.* Definitio, *g.* 286. quomodo inveniatur, 387. 388. quomodo inveniatur, in quo navigandum, 384. juxta quem facta navigatio, 322. 326.
*Rosa nautica.* Definitio, 289.
*Rosa pyrotechnica* quomodo fiat, *p.* 82. 83.
*Ruderatio* quomodo fiat, *a.* 461. & seqq.

S.

*Sabat*, sive *Shebat*, *c.* 121. 123.
*Saccus globi incendiarii* quomodo delineetur, *p.* 49. 51.
*Saccus pyrotechnicus.* Definitio, 36.
*Samadan*, *c.* 125.
*Saphar*, ibid.
*Sappa*, sive *suffossio.* Definitio, *m.* 242. quomodo paretur, 246.
**Säulenstellungen**, *a.* 213.
*Saxa* quomodo cædenda, 49.
*Saxorum virtutes* quomodo cognoscantur, 48
*Scala.* Definitio, *a.* 502. quomodo construenda, 503. & seqq. delineanda, 514.
*Scalæ* constructio ad delineandos Ordines necessaria, *a.* 172. quæ erro-

errores diſtantiarum in mappis planis corrigat. *g.* 372.
*Scapus columnæ*, *a* 96. quomodo contrahatur, 183.
*Scenographia* ædium. Definitio, *a.* 517.
*Scharis meh*, *c.* 113.
Scheere, ſive Scheer-Werck, *m.* 109.
Schieß-Scharten / 109.
Schlangen, *p.* 100.
Schulter-Winckel, *m.* 52.
*Sciaterica*, *ſ.* 2.
*Sciatericum.* Definitio, 3.
*Scintillæ pyrotechnicæ* quomodo conficiantur, *p.* 87.
*Scrupulum Chaldaicum.* Definitio, *c.* 40. quomodo in horaria convertatur, 42.
*Seculum.* Definitio, *c.* 86.
*Semidiameter Terræ* quanta ſit, *g.* 41. & ſeqq. quomodo inveniatur, 30. 32. & ſeqq. 38.
*September*, *c.* 97.
*Septentrio.* Definitio, *g.* 211.
*Sextimana.* Definitio, *c.* 43.
Serpentinel / *p.* 100.
*Sextilis*, *c.* 88.
*Shaaban*, 125.
*Shabat*, ibid.
*Shawal*, ibid.
*Signorum paralleli* quomodo horologiis ſolaribus inſcribantur. *ſ.* 135. & ſeqq.
*Sima.* Definitio, *a.* 110. delineatio, 119.
*Sivan*. *c.* 123.
*Sol* ubinam fiat verticalis, ubinam non, *g.* 93. quando hoc fiat, 94. ubinam dato momento verticalis, quomodo inveniatur, 173. quando in zona torrida loco alicui fiat verticalis quomodo ope globi inveniatur, 242. & ſeqq. quando mediam diſtantiam a vertice in zona torrida habeat, quomodo inveniatur, 95. & ſeqq. ubinam ter per annum mediam diſtantiam a vertice habeat, 98. ubinam bis, 99. quo momento planum declinans illuſtrare incipiat, quomodo determinetur, *ſ.* 110. & ſeqq. quando in zona torrida appareat retrogradus, *g.* 171. ubinam dato momento oriatur & occidat, quomodo inveniatur, 175. quando in zona torrida non occidat, quomodo ope globi inveniatur, 248. item quando non amplius oriatur 249. Solis non occidentis mora ſupra horizontem quomodo inveniatur, 146.
*Solis meridiani a vertice diſtantia* quanta ſit, *g.* 159.
*Solanus* quinam ventus, 215. 216.
*Soli conditio* quomodo exploranda, *a.* 320.
*Soliditas Terræ* quanta ſit, *g.* 44.
*Sphæra obliqua.* Definitio, 121. ubinam ſit, 124.
*Sphæra parallela.* Definitio, 120. ubinam ſit, 123. phænomena ejus, 125. 128. & ſeqq.
*Sphæra recta.* Definitio, 119. phænomena, 125. & ſeqq. ubinam ſit, 122.
Spreng-Kugel / *p.* 58.
*Statio vallaris.* Definitio, *m.* 25.

Stehender Mörser, *p.* 142.
*Stellulæ pyrotechnicæ* quomodo conficiantur, 84.
Die Streiche, *m.* 52.
Die streichende Defens-Linie / ibid.
Der Streich-Winckel / ibid.
*Structura Græca*, *a.* 354.
*incerta*, 352.
*Isodoma*, 356.
*pseudisodoma*, 357.
*revincta*, 359.
*reticulata*, 349.
*Stupæ pyrotechnicæ* præparatio, *p.* 59.
*Stylobata.* Definitio, *a.* 95.
*Subsolanus* qualis ventus, *g.* 215.
*Substructio*, *a.* 311.
*Subvesperus* qualis ventus, *g.* 215. 216.
Süd / *c.* 211.
Süd gen Osten / *g.* 215.
Süd gen Westen / ibid.
Süd-Ost / ibid.
Süd-Ost gen Osten / ibid.
Süd-Ost gen Norden / ibid.
Süd-Süd-Ost / ibid.
Süd Süd-West / ibid.
Süd-West, ibid.
Süd-West gen Süden / ibid.
Süd-West gen Westen / ibid.
*Suggestus mortariorum.* Definitio, *m.* 228.
*Suggestus tormentorum.* Definitio, 227. delineatio, 229.
*Sulphuris* depuratio, *p.* 10. qualitates, 18. 21. 22.
*Supercilia*, *a.* 104.
*Supernas* quinam ventus, *g.* 215. 216.
*Superficies Terræ* quanta sit, 44. quomodo se habeat ad zonam frigidam, 88 & seqq. quomodo ad temperatam, 85. torridam, 80. 81.
*Symmetria* quid sit & in quo consistat, *a.* 24. & seqq.
*Syne*, *c.* 111.
*Systylon* opus, *a.* 225.

T.

*Tabulæ loxodromicæ.* Definitio, *g.* 331. quomodo construantur, 333.
*Tænia*, *a.* 104.
*Tamuz*, *c.* 112.
*Tebeth*, 123.
*Tecta* quomodo construenda, *a.* 519. & seqq. 523.
*Tegulæ hamatæ*, 522.
*imbricatæ*, ibid.
*Tekuphæ* quid sint, *c.* 337. quomodo inveniantur, 348.
*Tempestates annuæ* quomodo se habeant sub æquatore, *g.* 100. & seqq. quomodo in zona torrida extra æquatorem, 104. & seqq.
*Tempestates vagæ.* Definitio, *g.* 227. causæ, 229.
*Templi Cella* sive *Corpus*, *a.* 236.
*Temporis momentum* quomodo ex altitudine Solis ope globi inveniatur, *g.* 236.
*Termini paschales.* Definitio, *c.* 284.
*Terminorum paschalium* Tabula Gregoriana quomodo construatur, 309.
*Terra* cur circumnavigari potuerit, *g.* 5.
*Terræ figura* qualis sit, 3. 4.

*Terræ figura sphærica* num in Tellure citra errorem sensibilem assumi possit, 10.
*Testudines*. Definitio, *a*. 468.
*Tetrastylon*, 214.
*Thamuz*, *c*. 121. 123.
*Thir meh*, 113.
*Thisri*, 121. 123.
*Thot*, 106.
*Thrascias* qualis ventus, *g*. 215. 216.
*Tisbrin prior*, *c*. 112.
*posterior*, ibid.
**Tonnen-Gewölbe**, *a*. 469.
*Tormentum*. Definitio, *p*. 99. species, 100. delineatio, 115. & seqq.
*Tormentum* quomodo oneretur, *p*. 130. dirigatur, 133. 134. cur explosum retrocedat, 138.
*Tormentum insititium*. Definitio, 151. quomodo paretur & oneretur, 152.
*Torus*, *a*. 105. quomodo delineetur, 113.
*Trabeatio*. Definitio, *a*. 100. quænam cuilibet intercolumnio conveniat quomodo inveniatur, 227. & seqq.
**Traversen**, *m*. 109.
*Trenchéen*-**Kugel**, *p* 58.
*Triacontaëteris Muhammedana*. Definitio, *c*. 350.
*Triglyphi cum guttis* quid sint, *a*. 133. quomodo delineentur, 179.
*Trochilus*, *a*. 108. quomodo delineetur, 116.
*Tropicus cancri*. Definitio, *g*. 17. situs, 18.
*Tropicus Capricorni*. Definitio, 17. situs, 18.
*Truncus stylobatæ*, *a*. 95.
*Tybi*, *c*. 106.
*Tykymt*, 111.
*Tympani* altitudo, *a*, 270. 271.
*Tyr*, *c*. 111.
*Tysbas*, ibid.

V.

*Vallum*. Definitio, *m*. 13. cur munimentis conveniat, 14. altitudo, 18. 82. declivitas, 19. defensio qualis esse debeat, 53.
*Valli operum externorum* dimensiones, 120.
*Veadar*, *c*. 123.
*Ventus*. Definitio, *g*. 215. divisio, 215. qualis sit, qui per terram continentem spirat, 222. 225. qualis, qui per maria spirat, 220.
*Ventus cardinalis*, 215.
*collateralis*, ibid.
*collateralis primarius*, ibid.
*collateralis secundarius primi* vel *secundi ordinis*, ibid.
*Venustas*. Definitio, *a*. 10.
*Veris initium & finis*. Definitio, *g*. 78.
*Ver* quando sub æquatore, 103. ubinam bis, 109.
*Versorium*. Definitio, 296.
*Versuræ compositæ* quomodo delineandæ, *a*. 408.
*Versuræ simplices* quomodo delineandæ, 407.
*Vertex objectorum* cur iter facientibus prius videatur quam radix & contra, *g*. 8. 9.

*Via navis.* qualis sit, 339.
*Vinea.* Definitio, *m.* 243. quomodo paretur, 248.
*Visus distantia*, quam in superficie maris vel planitie terræ attingit, quomodo inveniatur, *g.* 47.
*Umbra meridiana* quo die altitudini corporis æqualis, *g.* 166. quando quolibet die, 167. quomodo variet in diversis locis, 164.
*Umbræ solstitiales* quomodo se habeant in diversis locis, 164.
*Umbræ rectæ* ratio ad altitudinem opaci, 160.
*Umbræ versæ* ratio ad altitudinem opaci, 161.
*Voluta.* Definitio, *a.* 133. quomodo delineetur, 135.
*Urnæ pyrotechnicæ.* Definitio, *p.* 34.
*Utilitas ædificii.* Definitio, *a.* 7.
*Vulturnus* quinam ventus, *g.* 15. 16.
W.
Waffen-Plätze / *m.* 109.
Der Wall, *m.* 52.
Wallgang, ibid.
West, *g.* 212.
West gen Norden, 215.
West gen Süden / ibid.
West-Nord-West / ibid.
West-Süd-West, ibid.
Winckel der Flanck und Cortine / *m.* 52.
Z.
*Zephyroboreas* qualis ventus, *g.* 215.
*Zephyrus*, ibid.
*Zius*, *c.* 121.
*Zonæ* inter se collatæ quoad magnitudinem, *g.* 91. 92.
*Zona frigida australis.* Definitio, 73. latitudo, 74.
*Zona frigida borealis.* Definitio, 73. latitudo, 74.
*Zonæ temperatæ* ratio ad superficiem Terræ, 85. 86. magnitudo, 87.
*Zona temperata australis.* Definitio. *g.* 70. latitudo, 72.
*Zona temperata borealis.* Definitio, 70. latitudo, 72.
*Zona torrida.* Definitio, 66. latitudo, 68. magnitudo, 82. ratio ad superficiem Terræ, 80. 81, quomodo ab æquatore dividatur, 68.
*Zophorus.* Definitio, *a.* 100. qualis esse debeat, 101.
Der Zwischen-Wall / *m.* 52.

*FINIS INDICIS TOMI IV.*

VIII.

# INDEX

## Rerum in Commentatione de Studio Mathematico recte instituendo contentarum, quæ legitur Tomo V. Elementorum Matheseos.

A.
*Aërometriæ* studium quomodo instituendum, 264. & sequentibus.

*Æquatio*

*Æquatio ad parabolam* quomodo deducatur ex ſectione coni, 205.

*Æquatio curvæ particularis* quomodo reducatur ad generalem, 197.

*Æquationes ad curvam, in qua origo abſciſſarum non eſt in aliquo puncto curvæ*, quomodo tractentur, 206.

*Æquationis cubicæ & biquadraticæ conſtructio* quod ſupponat inventionem duarum mediarum proportionalium inter duas datas, 223.

*Æquatiorum inventio* cur ſubinde non uno modo tentanda, 174.

*Æquationum uſus* in curvis mechanicis oſtenditur, 207.

*Agrimenſores* an theoriam geometriæ recte negligant, 129. & ſeqq.

*Algebra* quomodo tractanda, 143. & ſeqq. quomodo ad Geometriam applicanda, 173. & ſeqq. qualis primum fuerit & quomodo deinceps ulterius perfecta, 165. quousque perfecta, 188. cur ad tertium cognitionis gradum adſpiranti cognitu neceſſaria, 681. quod ſubinde ſuppeditet absque ulla ambage conſtructiones problematum veterum, 183.

*Algebraicum ſtudium* quomodo facilitetur, 166.

*Analyſis mathematica* quomodo exercenda, 143. & ſeqq. cur ad tertium cognitionis gradum adſpiranti cognitu neceſſaria, 81.

*Analyſis Diophantea* quomodo tractanda, 171. 172.

*Analyſis infinitorum* quomodo tractanda, 216. & ſeqq.

*Analyſis veterum* qualis fuerit, 145.

*Approximationes* quomodo per ſeries infinitas inveniantur, 244. & ſeqq.

*Architecti militares* an theoriam Geometriæ tuto negligant, 129. & ſeqq.

*Architecturæ civilis* ſtudium, 337. & ſeqq.

*Architecturæ militaris* ſtudium, 333. & ſeqq. ſcientifica cognitio num proſit Architecto militari, 335.

*Arithmetica* quomodo in uſum artis inveniendi tractanda, 121.

*Arithmetica infinitorum* in infinitum extenſa, 251.

*Ærithmetica literalis* quomodo tractanda, 146. & ſeqq.

*Arithmetica literalis* uſus in inveniendo, 154.

*Arithmetica practica* quomodo tractanda, 113. & ſeqq.

*Arithmeticæ practicæ* compendium quomodo ex Elementis Autoris exſcribendum, 120.

*Arithmetica theoretica* quomodo tractanda, 118.

*Ars inveniendi* quomodo ope architecturæ civilis exerceatur, 339.

*Artificia analytica* cur probe notanda, 166. 167. 192. inter ſe conferenda, 192.

*Artis characteriſticæ* notio quomodo acquiratur, 147. uſus in inveniendo, 156.

*Artis iveniendi regulæ* abſtrahendæ ab Arithmetica communi, 122. a literali, 157. 163. 164.

*Artis*

*Artis inveniendi causa* quomodo Mathesis tractanda, 106.
*Artium scientiam excolenti* quid notasse prosit; 329.
*Astronomiæ* studium, 290. & seqq. cognitio historica quomodo acquirenda, 293. & seqq.
*Astronomia* quid conferat ad artem inveniendi, 302. & seqq.
*Astronomia practica* quomodo addiscatur, 297. & seqq.
*Asymptotos determinandi methodus* quo principio nitatur, 231.

C.

*Calculus algebraicus* a perplexitate liberatus, 187. num theoriam supponat in solvendis problematis, 145
de *calculi differentialis inventore controversia* quomodo intelligenda, 228.
*Calculi integralis* notio explicata, 235.
*Calculus literalis* in Algebra quomodo per numeros explicetur servata universalitate, 168.
*Calculus numerosus* quomodo ad formam universalis reducatur, 154. quomodo in locum literalis surrogari possit, 169.
*Calculus situs* quid sit, 144. quales supponat in Geometria definitiones, 155.
*Catoptricæ* studium, 274. & seqq
*Chronologiæ* studium, 323. & seqq.
*Circulus* cur per æquationem algebraicam definiri possit, 195.
*Circuli proprietates* algebraice erutæ, 193. & seqq. 206.
*Circuli quadratura* per series infinitas explicata, 238.
*Citationes* in demonstrationibus quem habeant usum, 45.
*Cognitionis humanæ gradus* quot dentur, 1. quod non eadem facilitate acquirantur, 2. quomodo acquirantur, 3.
*Cogitandi modus naturalis* quomodo servetur in studio mathematico, 108.
*Conchoidis proprietates* quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 203. constructio facillima inde deducta, ibid. tangens quomodo ducenda, 232.
*Constructio æquationum* quomodo ad Analysin veterum propius adducatur, 181.
*Constructiones æquationum superiorum* quomodo inventæ, 218. 219. cur analyticas dederit Autor, 220.
*Constructiones geometricæ formularum algebraicarum* num pure enunciandæ, 180. an semper synthetice demonstrandæ, 177. quodnam inter elegantes & inelegantes intercedat discrimen, 185.
*Corollaria* quid sibi velint, 58. quomodo expendendæ, 59. quomodo expendenda, 59. quomodo symbolice repræsentanda eorum demonstratio, 60.
*Curiositatis gratia* quomodo Astronomia tractanda, 292
*Curvæ* quænam per æquationes algebraicas definiri nequeant, 196. quænam ab Autore considerentur

tur in Elementis ſuis, 209. quomodo ad curvas alias referantur, 208. quænam in conſtructione problematis alteri præferenda, 221.
*Curvarum doctrina* quantum adhuc diſtet a perfectione ſua, 217.
*Curvarum proprietates* quomodo per æquationes eruantur, 193.
*Curvarum quadraturæ* a quadratura parabolæ pendentes, 237. quod reducantur ad quadraturam circuli & hyperbolæ, 239.
*Cycloidis* proprietas ſingularis, 250.

D.

*Definitiones* quomodo expendendæ, 5. quomodo expendendæ in uſum artis inveniendi, 82. & ſqq. cur ab iis incipiendum, 4. cur exemplis & quomodo illuſtrandæ, 5. quo ordine collocandæ & legendæ, 6.
*Definitiones arithmeticæ* quomodo exemplis illuſtrentur, 11. 12 objectio quædam removetur, 16.
*Definitiones geometricæ* quomodo ad evidentiam ſenſus reducendæ, 13.
*Definitiones nominales* quales eſſe debeant, 10.
*Defintiones reales* quomodo inveniantur præſuppoſitis nominalibus, 87. 88. num nominalibus præferendæ, 89.
*Definitionum* repræſentatio ſymbolica, 11. & ſeqq.
*Demonſtrandi* principia qualia ſupponantur, 71.
*Demonſtrationes* quando ſint naturales, 62. quales ab Autore exhibeantur, 63. quales vulgo, 64. quomodo reſolvendæ, 31. 38. 40. & ſeqq. 47. quomodo faciant ad perficiendum intellectum, 99. & ſeqq. 102. & ſeqq. quomodo libris inſerantur, 46. quomodo in Hydroſtatica facilitandæ, 263.
*Demonſtrationes arithmeticæ* cur ſervent univerſalitatem ad exempla applicatæ, 50.
*Demonſtrationes aſtronomicæ* quatenus recedant a rigore, 301.
*Demonſtrationes catoptricæ* num ſint ſuperfluæ, 277.
*Demonſtrationes dioptricæ* quod pluribus modis fieri poſſint, 281.
*Demonſtrationes mechanicæ* quales ſint, 32. cur in locum cæterarum non ſurrogandæ, 33. quod æquipolleant exemplis numericis, 34. quibusnam ſatisfiaciant, 36. quomodo ad tertium cognitionis gradum conducant, 72. 73.
*Domonſtrationes problematum* quomodo reſolvendæ, 52. quomodo ſymbolice repreſententur, 53. 55.
*Demonſtrationes ſyntheticæ* num recte negligantur, 101. num ex calculo algebraico erui poſſint, 178. quænam cum iis non confundendæ, 179. cur analyticis miſceantur ab autore, 260.
*Demonſtrationum forma*, 31. 37. ſymbolica repreſentatio, 39. 42. quem habeat uſum, 44. 48. 49.

*Dioptricæ* ſtudium, 280. & ſeqq.

E.

*Ellipſeos* conſtructio ex æquatione elicita, 215. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 200.

*Experientiæ ac rationis connubium* cur perpetuum eſſe debeat, 312.

F.

*Fictionum* in calculo algebraico uſus, 189.

*Figuræ* in Matheſi quales requirantur, 10.

*Formulæ algebraicæ* quomodo applicandæ, 158. & ſeqq.

G.

*Geographiæ* ſtudium, 317. & ſeqq.

*Geographiæ hiſtorica cognitio* quomodo acquiratur, 318.

*Geometria* quomodo in uſum Matheſeos reliquæ tractanda, 132. uſus in reliqua Matheſi ſtabilitus, 133, 136. quomodo intellectus perficiendi gratia tractanda, 134.

*Geometriæ elementaris ſupplementum* in uſum Algebræ conſcribendum, 186.

*Geometria practica* quomodo tractanda, 122. & ſeqq. quomodo ex Elementis Autoris extrahenda, 128.

*Gnomonicæ* ſtudium, 326. & ſeqq.

H.

*Hydraulicæ* ſtudium quomodo inſtituendum, 267. & ſeqq.

*Hydrographiæ* ſtudium, 322.

*Hydroſtraticæ* ſtudium, 261. & ſeqq. uſus in Philoſophia naturali, 262.

*Hyperbolæ* conſtructio ex æquatione elicita, 216. proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 201. 202.

*Hypotheſes* quomodo excolendæ, 309. 310. qualibus in Philoſophia locus, 311.

I.

*Inductio* quomodo pariatur, 35.

*Integratio differentialium* cur ſubinde requirat quantitatem adjiciendam, 236.

*Intellectus* cur & quomodo ſtudio Matheſeos perficiatur, 92. & ſeqq. quomodo perficiatur, ſi ad primum tantummodo cognitionis gradum adſpires, 94. & ſeqq.

*Intellectus perfectio* quænam maxima, 106.

*Intellectus perficiendi gratia* quomodo in Geographia verſandum, 321.

*Intellectui quæ patent* quomodo ad evidentiam ſenſus reducantur, 11. & ſeqq.

*Irrationalium* exiſtentia, 225. ad formam rationalium reductio quem habeat uſum, 152.

L.

de *Locis geometricis* notanda, 210. & ſeqq.

*Logica genuina* unde agnoſcatur, 104.

*Logicæ* ſtudio quodnam præmittendum, 105.

M.

*Mathesis* an in usum artis inveniendi tractari possit, 314. & seqq. quomodo in hunc usum tractetur, 106.

*Matheseos studium* quomodo intellectus perficiendi causa tractandum, 90.

*Matheseos sublimioris* studiosi quænam ex Mechanicis addiscere debeant, 259.

*Mechanica* quantum a veteribus promota, 252. quantum a recentioribus, ibid. quomodo tractanda in usum tertii gradus cognitionis, 255. 256.

*Mechanicæ praxis* quomodo addiscenda, 253. 254.

*Mechanicæ principia* ad phænomena naturæ explicanda, utilia, 258.

*Mechanicæ studium* quomodo tractandum, 252

*Methodus Mathematica* num Theologiæ, Jurisprudentiæ & Medicinæ conveniat, 107.

*Methodus de maximis & minimis* quo nitatur principio, 234.

*Methodus tangentium inversa* quomodo expendenda, 248.

N.

*Notiones ontologicæ* quomodo ex Mathesi derivandæ, 340.

O

*Opticæ* studium quomodo instituendum, 271. & seqq. quod ad Physicam conducat, 272.

P.

*Parabolæ* proprietates quomodo ex æquatione ad eandem deducantur, 198.

*Perspectiva* quomodo tractanda, 273.

*Philosophiæ naturalis principia mathematica* quænam proprie dicantur, 257.

*Philosophus* quomodo versari debeat in Catoptrica, 276. quomodo in Dioptrica, 282.

*Præparatio ad demonstrationem* cur necessaria, 74. 75. quomodo ad eam perveniatur, 76.

*Præparatio ad tertium gradum cognitionis* per secundum, 71.

*Praxis* quomodo reddatur oculata, 140.

*Problemata* quomodo in theoremata convertantur, 51. 54. quomodo tractanda, ac si resolutio invenienda esset, 77. & seqq.

*Problematum* symbolica repræsentatio, 26 27.

de *Problematis physico mechanicis* notanda, 257.

*Propositiones* quomodo rite exponendæ, 17. quomodo a nobis enunciatæ, 18. 19. quomodo a veteribus & Clavio, 20. cur pure enunciandæ, 21. 57.

*Pyrotechniæ* studium, 330. quid conferat ad artem inveniendi, 332.

Q.

*Quadraturæ per series infinitas* pendent a quadratura infinitarum parabolarum, 239.

R.

*Radices duæ* in contactu æquales, 199.

*Rationum doctrina* quomodo facilitetur, 160. 161.
*Rationum inæqualitatis* tractatio ad modum æquationum, 191.
*Regressus serierum* explicatur, 241.
*Regulæ arithmeticæ* cur formulis algebraicis ab Autore non fuerint adscriptæ, 175.
*Resolutiones problematum* quomodo illustrandæ, 22. quomodo in potestatem redigendæ, 23. quomodo sola attentione ad theoremata innotescant, 80.
*Resolutiones problematum numericæ* quomodo exemplis illustrandæ, 29.
*Resolutionum spuriarum examina* quomodo subinde instituantur, 180.

S.

*Saltus in ratiocinando* expenditur, 61.
*Scientiæ* conjunctis viribus excolendæ, 313.
*Sensus* quid adjumenti afferant intellectui in veritate intelligenda, 7. 8. 9.
*Series magis convergentes pro circulo* quomodo deducantur ex minus divergentibus, 242. 243.
*Sphæricorum* studium, 285. & seqq.
*Studium mathematicum* quibusnam difficile videatur, 98.
*Subnormalium formulæ algebraicæ* quomodo geometrice construantur, 230.
*Subtangentis* notio explicata, 233.
*Subtangentium formulæ algebraicæ* quomodo geometrice construantur, 229.

T.

*Tabulæ astronomicæ* expenduntur, 298.
*Tangentium methodus Barrowiana*, 227. 228. quomodo inde prodeat differentialis, 228.
*Theoremata* quomodo in usum artis inveniendi expendenda, 68. quod eo modo inveniri potuerint, quo demonstrantur, 70. quomodo in problemata resolvenda convertantur, 67.
*Theorematum* symbolica repræsentatio, 24. 25.
*Theorica Planetarum* quomodo ab autore tradita, 309.
*Trigonometria* in quem usum primum inventa, 137. quomodo in usum praxeos tractanda, 138. & seqq.
*Trigonometriæ sphæricæ* studium, 286. & sepq.

V.

*Veritas invenienda* quod alias cognitas supponat, 71.
*Veritatis inveniendæ utilitas* cur non attendenda, 176.
*Vulgarium meditatio* quem habeat usum, 170.

# *FINIS*

## *TOMI V. ELEMENTORUM MATHESEOS.*

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wolff, Christian <<von>>,

Elementa Matheseos Universæ

Bd.: Tomvs V

A. MDCCXLI

Coburg, Landesbibliothek -- E I 7
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11942591-0